Weak equivalence and homotopy equivalence

秋桜

目次

1. 位相空間における例
2. 単体的集合における例
3. 可換環上のコチェイン複体における例
4. モデル圏による一般化

ホモトピー群の間の同型と不変量の間の同型

代数的位相幾何学では，様々な対象を直接調べることが困難であるため，しばしばホモロジー群やコホモロジー群などの不変量を考える．
その不変量はホモトピー不変性をもつことが多い．

しかし，一般に，より広いクラスの「弱ホモトピー」で不変であるとは限らない．つまり，ホモトピー群の間の同型を導くときに不変量の間に同型を導くとは限らない．

本講演では，上記を念頭において weak equivalence と homotopy equivalence との関係について位相空間，単体的集合，可換環上のコチェイン複体に対して考察し，その後，モデル圏の視点で一般化する．

目次

1 位相空間における例

2 単体的集合における例

3 可換環上のコチェイン複体における例

4 モデル圏による一般化

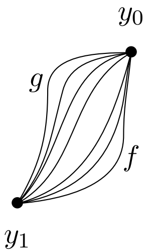
ホモトピー

定義 (ホモトピー)

X, Y を位相空間とし，$f, g\colon X \to Y$ を連続写像とする．
連続写像 $H\colon X \times [0,1] \to Y$ で

$$\forall x \in X,\ H(x,0) = f(x),\ H(x,1) = g(x)$$

をみたすものを f から g へのホモトピーとよぶ．f から g へのホモトピーが存在するとき，$f \simeq g$ と表す．



ホモトピー群

I^n を n 次元単位立方体を表す．つまり，$I^n := [0,1]^n$ とする．
また，I^n の境界 ∂I^n は少なくとも 1 つの成分が 0 または 1 であるもので構成される I^n の部分空間を表す.
X を位相空間とし，x を X の点とする.
このとき，$\pi_n(X,x)$ を連続写像 $f\colon I^n \to X$ で $f(\partial I^n) = \{x\}$ を満たすもののホモトピー類の集合とする．[1]

定義 (ホモトピー群)

$[f],[g] \in \pi_n(X,x)$ に対し，以下の演算を定めると群になる．この群をホモトピー群とよぶ.

$$([f]+[g])(s_1,s_2,\ldots,s_n) := \begin{cases} [f](2s_1,s_2,\ldots,s_n) & s_1 \in [0,\frac{1}{2}] \\ [g](2s_1-1,s_2,\ldots,s_n) & s_1 \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

[1]連続写像 $f\colon I^n/\partial I^n = S^n \to X$ で $f(\{s\} = \partial I^n/\partial I^n) = \{x\}$ を満たすもののホモトピー類と同等である.

ホモトピー同値と弱ホモトピー同値

定義 (ホモトピー同値)

X, Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．
連続写像 $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$，$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ が成立するとき，
$f\colon X \to Y$ はホモトピー同値であるという．

定義 (弱ホモトピー同値)

X, Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．
任意の n に対し，準同型写像 $\pi_n(f)\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ が同型であるとき，
$f\colon X \to Y$ は弱ホモトピー同値であるという．

命題

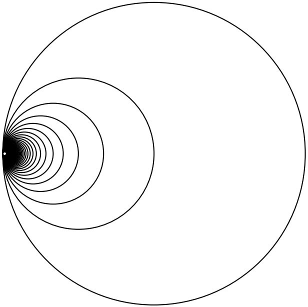
連続写像 f はホモトピー同値ならば弱ホモトピー同値である．

Hawaiian earring

一般に逆は成り立たない．実際に，以下の反例がある．

弱ホモトピー同値であるが，ホモトピー同値ではない例

Hawaiian earring からその CW 近似を与える連続写像は弱ホモトピー同値であるが，ホモトピー同値ではない．



CW 複体

定義 (CW 複体)

位相空間 X が以下を満たすとき，CW 複体という．

(1) X^0 を X の離散部分空間とし, 0 胞体という.

(2) X^{k+1} は帰納的に接着写像とよばれる連続写像 $(\varphi_i)_{i \in I_k} \colon \coprod_{i \in I_k} S^k \to X^k$ と包含写像 $i \colon \coprod_{i \in I_k} S^k \hookrightarrow \coprod_{i \in I_k} D^{k+1}$ の押し出しとして得られる.

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{i \in I_k} S^k \arrow[r, "(\varphi_i)_{i \in I_k}"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & X^k \arrow[d] \\
\coprod_{i \in I_k} D^{k+1} \arrow[r] & X^{k+1}
\end{tikzcd}
$$

CW 複体

(3) X は図式

$$X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \dots$$

の余極限として得られ, 弱位相をもつ．つまり，$A \subset X$ は開集合 $\Leftrightarrow$ 任意の *n* に対し，$A \cap X^n \subset X^n$ は開集合が成立する.

$$\begin{tikzcd}
X^0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & X^1 \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] & X^2 \arrow[r] \arrow[dll] \arrow[dl] & \dots \\
X \arrow[r, dotted] & \forall A
\end{tikzcd}$$

Whitehead の定理

弱ホモトピー同値がホモトピー同値になる十分条件を与えているのが以下の定理である．

Whitehead の定理

CW 複体の間の連続写像 f は弱ホモトピー同値ならばホモトピー同値である．

証明はここでは省略するが，胞体近似定理を用いると比較的簡単に証明できる．
完全に余談だが，上記の Whitehead は J.H.C.Whitehead であり，G.W.Whitehead とは別人である．

目次

1 位相空間における例

2 単体的集合における例

3 可換環上のコチェイン複体における例

4 モデル圏による一般化

単体的集合の定義

集合と写像のなす圏を **Set** と表す.

定義 (単体的集合)

$n \in \mathbf{N}$ に対し, $[n] := \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ を標準的な順序で順序集合とみなす. $n \in \mathbf{N}$ に対して定まる順序集合 $[n]$ と順序を保つ写像のなす圏を simplex category といい, Δ と表す. また, 関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \to$**Set** を単体的集合という.

つまり, 単体的集合は Δ 上の前層である. この前層圏を **sSet** と表す.

単体的ホモトピー

定義 (単体的ホモトピー)

X, Y を単体的集合とし，$f, g\colon X \to Y$ を単体的写像とする．
単体的写像 $H\colon X \times \Delta^1 \to Y$ で

$$\forall x \in X,\ H(x, 0) = f(x),\ H(x, 1) = g(x)$$

をみたすものを f から g への単体的ホモトピーとよぶ．f から g への単体的ホモトピーが存在するとき，$f \simeq g$ と表す.

定義 (単体的ホモトピー同値)

X, Y を単体的集合とし，$f\colon X \to Y$ を単体的写像とする.
単体的写像 $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$，$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ が成立するとき，$f\colon X \to Y$ は単体的ホモトピー同値であるという.

Kan 複体の定義

一般の単体的集合では単体的ホモトピーはあまり良く振る舞わない[2]のに対して Kan が導入した Kan 複体では良く振る舞う.

定義 (Kan 複体)

K は単体的集合であり，任意の $n \in \mathbf{N}$ と任意の $0 \leq i \leq n$ と任意の単体的写像 $f\colon \Lambda_i^n \to K$ に対し，以下の図式を可換にする単体的写像 $\widetilde{f}\colon \Delta^n \to K$ が存在するとき Kan 複体であるという.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_i^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & K \\
\Delta^n \arrow[ur, "\exists \widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

[2]例えば，同値関係にならない

Whitehead の定理 単体的集合 ver.

ここでは正確に定義はしないが，位相空間と同様に単体的集合でも単体的弱ホモトピー同値が定義できる．

命題

単体的写像 f は単体的ホモトピー同値ならば単体的弱ホモトピー同値である．

一般に逆は成り立たない．
単体的弱ホモトピー同値が単体的ホモトピー同値になる十分条件を与えているのが以下の定理である．

Whitehead の定理 単体的集合 ver.

Kan 複体の間の単体的写像 f は単体的弱ホモトピー同値ならば単体的ホモトピー同値である．

証明はここでは省略するが，比較的簡単に証明できる．

目次

1 位相空間における例

2 単体的集合における例

3 可換環上のコチェイン複体における例

4 モデル圏による一般化

チェインホモトピー

R を単位的可換環とする．R 加群の圏を $\mathbf{Mod}(R)$ と表し，R 加群のコチェイン複体の圏を $\mathbf{Ch}(R)$ と表す.

定義 (チェインホモトピー)

$(M, d), (N, \partial)$ を R 加群のコチェイン複体とし，$f, g\colon (M, d) \to (N, \partial)$ をコチェイン写像とする．R 加群の準同型写像の族 $(h^n\colon M^n \to N^{n-1})_n$ で

$$f - g = \partial \circ h + h \circ d$$

をみたすものを f から g へのチェインホモトピーとよぶ．f から g へのチェインホモトピーが存在するとき，$f \simeq g$ と表す.

ホモトピー圏

定義 (チェインホモトピー同値)

M, N を R 加群のコチェイン複体とし，$f\colon M \to N$ をコチェイン写像とする．コチェイン写像 $g\colon N \to M$ が存在し，$f \circ g \simeq \mathrm{id}_N$，$g \circ f \simeq \mathrm{id}_M$ が成立するとき，$f\colon M \to N$ はチェインホモトピー同値であるという．

$\mathbf{Ch}(R)$ の射集合をチェインホモトピー同値で割って得られるホモトピー圏を $K(\mathbf{Mod}(R))$ と表す．

導来圏

定義 (擬同型)

R 加群のコチェイン複体の間のコチェイン写像 $f\colon M \to N$ は任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し, コホモロジー上の同型射 $H^n(f)\colon H^n(M) \to H^n(N)$ を誘導するとき擬同型とよぶ.

命題

コチェイン写像 f はチェインホモトピー同値ならば擬同型である.

一般に逆は成り立たない.
擬同型射は $K(\mathbf{Mod}(R))$ 上の積閉系を定める.

定義 (導来圏)

導来圏とは $K(\mathbf{Mod}(R))$ を擬同型射のなす積閉系で局所化した圏である.

入射的加群

定義 (入射的加群)

M は R 加群であり, 任意の R 加群 N, L と任意の単射 $i\colon N \to L$ と任意の準同型写像 $f\colon N \to M$ に対し, 以下の図式を可換にする準同型写像 $\widetilde{f}\colon L \to M$ が存在するとき入射的加群であるとよぶ.

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & M \\
L \arrow[ur, "\exists \widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

ホモトピー圏と導来圏

命題

$\mathrm{Inj}(\mathbf{Mod}(R))$ を $\mathbf{Mod}(R)$ の入射的加群のなす充満部分圏とする．このとき，以下の圏同値が成立する．

$$K^+(\mathrm{Inj}(\mathbf{Mod}(R))) \cong D^+(\mathbf{Mod}(R))$$

命題

下に有界な入射的コチェイン複体の間のコチェイン写像 f は擬同型ならばチェインホモトピー同値である．

目次

1 位相空間における例

2 単体的集合における例

3 可換環上のコチェイン複体における例

4 モデル圏による一般化

Mor $\mathscr{C}$

モデル圏を定義する準備をする．
圏 $\mathscr{C}$ に対し，$\mathscr{C}$ の射を対象とし，$f\colon A \to B$ と $g\colon C \to D$ に対し，図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad h \quad} & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow[\quad i \quad]{} & D \end{array}$$

を可換にするような射の組 (h, i) を f から g への射とすることで圏 $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ が定まる．また，関手

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{dom} : & \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ & \Cup & & \Cup \\ & f\colon A \to B & \longmapsto & A \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \mathrm{codom} : & \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ & \Cup & & \Cup \\ & f\colon A \to B & \longmapsto & B \end{array}$$

が存在する．

レトラクト

定義 (レトラクト)

$\mathscr{C}$ を圏とする．図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathrm{A}}"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & D \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

が可換であるとき，f は g のレトラクトとよぶ.

Functorial factorization

定義 (Functorial factorization)

$\mathscr{C}$ を圏とする．2 つの関手 $\alpha, \beta\colon \operatorname{Mor}\mathscr{C} \to \operatorname{Mor}\mathscr{C}$ が,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom} \circ \alpha &= \mathrm{dom}, \\
\mathrm{codom} \circ \beta &= \mathrm{codom}, \\
\mathrm{codom} \circ \alpha &= \mathrm{dom} \circ \beta, \\
\forall f \in \operatorname{Mor}\mathscr{C},\ f &= \beta(f) \circ \alpha(f)
\end{aligned}
$$

を満たすとき，(α, β) を functorial factorization とよぶ.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(f) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha(f)"'] & & \mathrm{codom}(f) \\
& \mathrm{codom} \circ \alpha(f) = \mathrm{dom} \circ \beta(f) \arrow[ur, "\beta(f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

Functorial factorization

特に，可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ C & \xrightarrow[g]{} & D \end{array}$$

は可換図式

Functorial factorization

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{dom}\circ\beta(f)=\mathrm{codom}\circ\alpha(f) \arrow[ddd, "\mathrm{dom}\circ\beta(u,v)=\mathrm{codom}\circ\alpha(u,v)" description] \arrow[drr, "\beta(f)"] & & \\
A \arrow[urr, "\alpha(f)"] \arrow[rrrr, "f"] \arrow[d, "u"'] & & & & B \arrow[d, "v"] \\
C \arrow[rrrr, "g"] \arrow[drr, "\alpha(g)"'] & & & & D \\
 & & \mathrm{dom}\circ\beta(g)=\mathrm{codom}\circ\alpha(g) \arrow[urr, "\beta(g)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

を誘導する.

リフト

定義 (リフト)
$\mathscr{C}$ を圏とし，f, g を $\mathscr{C}$ の射とする．このとき，可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

のリフトとは，$h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, X)$ で $i = h \circ f$ と $p = g \circ h$ を満たすものである．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

LLP と RLP

定義 (Left lifting property，Right lifting property)

$\mathscr{C}$ を圏とし，f, g を $\mathscr{C}$ の射とする．このとき，f が g に対し，left lifting property をもつ．または，g が f に対し，right lifting property をもつとは，任意の可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\forall i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\forall p"'] & Y \end{tikzcd}$$

に対し，リフト $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, X)$ が存在することである．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\forall i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\forall p"'] \arrow[ur, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

モデル構造

定義 (モデル構造)

$\mathscr{C}$ を圏とする．$\mathscr{C}$ のモデル構造とは，3 つの $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ の部分圏 **W**,**Cof**,**Fib** と 2 つの functorial factorization$(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ で以下を満たすものである．

2-out-of-3
$\mathscr{C}$ の射 f, g が $\mathrm{codom}\ f = \mathrm{dom}\ g$ を満たすとする．このとき，$f, g, g \circ f$ のうち少なくとも 2 つが **W** に属しているならば，残りの 1 つも **W** に属している．

Retracts
f, g を $\mathscr{C}$ の射とし，f を g の *retract* とする．このとき，g が **W** に属しているならば f は **W** に属しており，g が **Cof** に属しているならば f は **Cof** に属しており，g が **Fib** に属しているならば f は **Fib** に属している．

モデル構造

Lifting
Cof と **W** の両方に属する射 f は **Fib** に属する射 g に対し，*left lifting property* をもち，**Cof** に属する射 f は **Fib** と **W** の両方に属する射 g に対し，*left lifting property* をもつ．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"', "\wr"] & X \arrow[d, two heads, "g"] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, "\exists h"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"'] & X \arrow[d, two heads, "g", "\wr"'] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, "\exists h"] & Y
\end{tikzcd}
$$

モデル構造

Factorization
任意の $\mathscr{C}$ の射 f に対し，$\alpha(f)$ は **Cof** に属する射であり，$\beta(f)$ は **Fib** と **W** の両方に属する射である．また，任意の $\mathscr{C}$ の射 f に対し，$\gamma(f)$ は **Cof** と **W** の両方に属する射であり，$\delta(f)$ は **Fib** に属する射である．

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[dl, hook, "\alpha(f)"'] \arrow[dd, "f"] \arrow[dr, hook, "\gamma(f)", "\sim"'] & \\
{} \arrow[dr, two heads, "\beta(f)"', "\sim"] & & {} \arrow[dl, two heads, "\delta(f)"] \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

モデル圏

W に属する射を weak equivalence，**Cof** に属する射を cofibration，**Fib** に属する射は fibration，**Cof** と **W** の両方に属する $\mathscr{C}$ の射を trivial cofibration，**Fib** と **W** の両方に属する $\mathscr{C}$ の射を trivial fibration とよぶ．[3]

定義 (モデル圏)

完備かつ余完備でモデル構造をもつ圏をモデル圏とよぶ．

モデル圏は一般の圏においてホモトピー論を行うための枠組みである．
しかし，同じ圏でも入るモデル圏構造は一意ではない．
重要なのは，状況に合わせて適切なモデル構造を選ぶことである．

[3] 今回はそれぞれ $\xrightarrow{\sim}$, $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$, $\overset{\sim}{\hookrightarrow}$, $\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}$ で表す．

モデル圏の例

例 (**Top** の Quillen モデル構造)

Top は weak equivalence を弱ホモトピー同値写像とし，fibration を Serre fibration とし，cofibration を trivial fibration に対し left lifting property をみたす連続写像と定めるとモデル圏となる．このモデル構造を Quillen モデル構造とよぶ.

例 (**sSet** の Kan-Quillen モデル構造)

sSet は weak equivalence を幾何学的実現関手による像が弱ホモトピー同値写像になる単体的写像とし，fibration を Kan fibration とし，cofibration を単射と定めるとモデル圏となる．このモデル構造を Kan-Quillen モデル構造とよぶ.

例 (**Ch**(R) の入射的モデル構造)

単位的可換環 R 上の加群のコチェイン複体のなす圏 **Ch**(R) は weak equivalence を擬同型写像とし，cofibration を単射とし，fibration を全射かつ fibrant な核をもつコチェイン写像と定めるとモデル圏となる．このモデル構造を入射的モデル構造とよぶ.

Cofibrant object と fibrant object

モデル圏は完備かつ余完備なので始対象 0 と終対象 1 をもつ.

定義 (Cofibrant object, Fibrant object)

始対象からの射 $0 \to A$ が cofibration のとき, A を cofibrant object とよび, 終対象への射 $B \to 1$ が fibration のとき, B を fibrant object とよぶ.

CW 複体は **Top** の Quillen モデル構造における cofibrant object になり, Kan 複体は **sSet** の Kan-Quillen モデル構造における fibrant object になり, 下に有界な入射的コチェイン複体は $\mathbf{Ch}(R)$ の入射的モデル構造の fibrant object になる.

Cylinder object と Path object

モデル圏におけるホモトピーは cylinder object と path object を用いて定義される.

定義 (Cylinder object)

$\mathscr{C}$ をモデル圏とし，$A \in \mathscr{C}$ とする．$X \in \mathscr{C}$ が余積の普遍性から得られる射 $\mathrm{id}_A \coprod \mathrm{id}_A : A \coprod A \to A$ を $A \coprod A \hookrightarrow X \xrightarrow{\sim} A$ と分解するとき，cylinder object とよぶ.

定義 (Path object)

$\mathscr{C}$ をモデル圏とし，$A \in \mathscr{C}$ とする．$X \in \mathscr{C}$ が余積の普遍性から得られる射 $\mathrm{id}_A \times \mathrm{id}_A : A \to A \times A$ を $A \xrightarrow{\sim} X \twoheadrightarrow A \times A$ と分解するとき，path object とよぶ.

Left homotopy と Right homotopy

定義 (Left homotopy)

$\mathscr{C}$ をモデル圏とし，$f, g \colon A \to B$ を $\mathscr{C}$ の射とする．A の cylinder object X と $\mathscr{C}$ の射 $h \colon X \to B$ が存在し，以下の図式を可換にするとき，f は g と left homotopic とよび，h を f から g への left homotopy とよぶ．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "h"] & \\ A \coprod A \arrow[u, hook] \arrow[r, "f \coprod g"'] & B \end{tikzcd}$$

定義 (Right homotopy)

$\mathscr{C}$ をモデル圏とし，$f, g \colon A \to B$ を $\mathscr{C}$ の射とする．B の path object X と $\mathscr{C}$ の射 $h \colon A \to X$ が存在し，以下の図式を可換にするとき，f は g と right homotopic とよび，h を f から g への right homotopy とよぶ．

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, two heads] \\ A \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f \times g"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

主定理

domain が cofibrant object で codomain が fibrant object のとき，left homotopy と right homotopy は一致する．このとき，単に homotopy という．また，cofibrant かつ fibrant な object の間の weak equivalence は homotopy で特徴付けできる．

命題

$\mathscr{C}$ をモデル圏，A, B を $\mathscr{C}$ の cofibrant かつ fibrant な object，$f\colon A \to B$ を $\mathscr{C}$ の射とする．このとき，
f が weak equivalence

$\iff$

$\mathscr{C}$ の射 $g\colon B \to A$ が存在し，$g \circ f$ が id_A と homotopic かつ $f \circ g$ が id_B と homotopic

証明の概略

$f\colon A \to B$ が weak equivalence であるとし，$\mathscr{C}$ の射 $g\colon B \to A$ が存在し，$g \circ f$ が id_A と homotopic かつ $f \circ g$ が id_B と homotopic であることのみ示す．Factorization より分解

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "\sim" sloped, "q"'] & & B \\
& X \arrow[ur, two heads, "p"'] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．2-out-of-3 より $p\colon X \to B$ も weak equivalence であり，B が fibrant なので，X も fibrant である．可換図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, hook, "q"', "\wr"] & A \arrow[d, two heads] \\
X \arrow[r, two heads, "p"'] & 1
\end{tikzcd}
$$

に対し，Lifting より，リフト $r\colon X \to A$ が存在する．

証明の概略

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, hook, "q"', "\wr"] & A \arrow[d, two heads] \\
X \arrow[ur, "r"] \arrow[r, two heads, "p"'] & 1
\end{tikzcd}$$

よって，$r \circ q = \mathrm{id}_A$ となる．一方，X が fibrant かつ q が trivial cofibration であるため，全単射

$$\begin{array}{cccc}
q^* : & [X, X] & \longrightarrow & [A, X] \\
 & \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} \\
 & [g] & \longmapsto & [g \circ q]
\end{array}$$

が得られる．ここで，$[A, X]$ はホモトピーで割った Hom 集合である．

証明の概略

このとき,

$$\begin{aligned} q^*([q \circ r]) &= [q \circ r \circ q] && (\text{Definition of } q^*) \\ &= [q] && (r \circ q = \mathrm{id}_A) \\ &= q^*([\mathrm{id}_X]) && (\text{Definition of } q^*) \end{aligned}$$

となるため, $[q \circ r] = [\mathrm{id}_X]$ である. つまり, $q \circ r \sim \mathrm{id}_X$ である.
よって r は q の homotopy inverse である. 同様にして, p の homotopy inverse s が得られる. このとき,

$$\begin{aligned} [f \circ r \circ s] &= [q \circ p \circ r \circ s] \\ &= [q \circ s] \\ &= [\mathrm{id}_B] \end{aligned}$$

であるため, $r \circ s$ が f の homotopy inverse となる.

参考文献

[Hov13] Mark Hovey. Quillen model categories. In: J. K-Theory 11.3 (2013), pp. 469–478.

[Hov99] Mark Hovey. Model categories. Vol. 63. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999.

[Qui67] Daniel G. Quillen. Homotopical algebra. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[ぺ23] ぺーぱー (@paper3510mm). モデル圏の理論. ver. 2023 年 1 月 27 日. url: https://paper3510mm.github.io/pdf/modelcat.pdf.