

結び目理論、場の理論、表現論の交差点

ジョーンズ多項式を中心として

やの

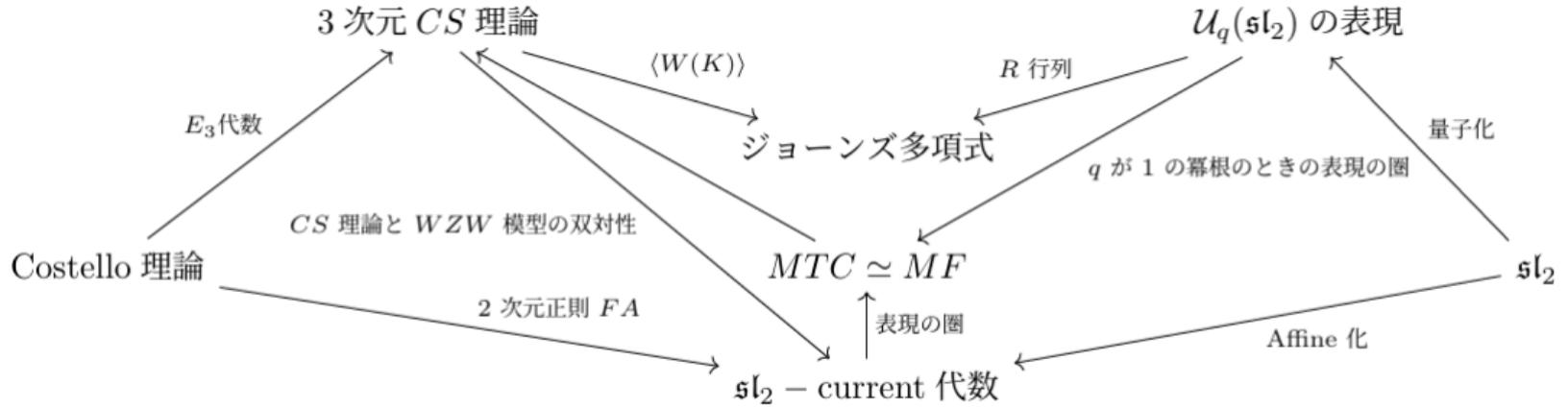
October 2, 2024

場の理論の数学的側面について

場の理論の数学的な研究について

- 場の理論の数学的定式化
(e.g. 因子化代数、非摂動論的場の理論)
- 既に数学的に定式化されている場の理論について
(e.g. 頂点作用素代数、位相的場の理論)
- すでに数学の問題になっているもの
(e.g. ホモロジカルミラー対称性)

本講演では次の図式に注目する:



左側が物理っぽくて右側が数学っぽいものを書いているが、全部ちゃんと数学的に定式化はできている。

お品書き

- 1 ジョーンズ多項式
- 2 量子群との関係
- 3 3次元 Chern-Simons 理論との関係
- 4 圏論化について

① ジョーンズ多項式

② 量子群との関係

③ 3次元 Chern-Simons 理論との関係

④ 圏論化について

結び目とは

Definition (結び目)

結び目とは S^1 から S^3 への埋め込み K あるいはその像のことである

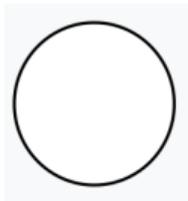
Definition (絡み目)

絡み目とはいくつかの S^1 から S^3 への埋め込み L あるいはその像のことである

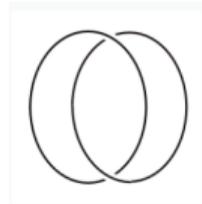
Definition (isotopic)

絡み目 L と L' が isotopic であるとは微分同相 $h_1 : L \rightarrow L'$ で恒等射 $h_0 = id_{S^3}$ と homotopic であるようなものが存在することである

自明な結び目、以下単に S^1 と書く



ホップリンク

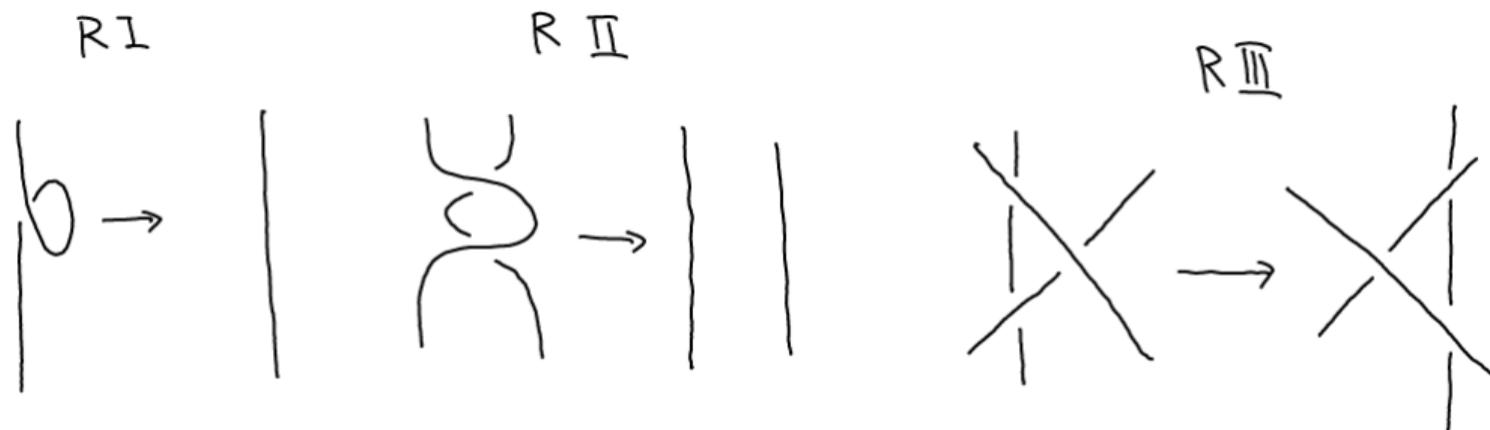


三葉結び目



ライデマイスタームーブ

絡み目とは3次元的な対象であるが、3次元は難しいので2次元に射影して考えると有用である。この射影図を結び目図式と呼ぶ。結び目図式で isotopy に対応するのは次の操作であり、ライデマイスタームーブと呼ばれる:



結び目不変量

Definition (結び目不変量)

結び目不変量とは次の写像のことである:

$$\{\text{links}\}/\text{isotopy} \simeq \{\text{link diagrams}\}/R\text{I}, R\text{II}, R\text{III} \rightarrow \text{Set}$$

ここでは行先の集合として $\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ を考える。

e.g.

- $\forall L \in \{\text{links}\}, L \mapsto 1$
- $\{\text{links}\} \ni L \mapsto \min\{\text{number of link of } L\}$
- $\{\text{links}\} \ni L \mapsto w(L) = \{\text{number of positive link of } L\} - \{\text{number of negative link of } L\}$

ジョーンズ多項式

Definition (ジョーンズ多項式)

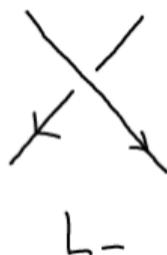
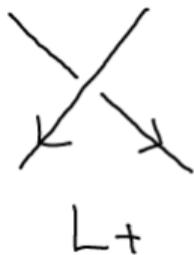
ジョーンズ多項式とは結び目不変量 $V : \{\text{links}\}/\text{isotopy} \rightarrow \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ で次の関係式を満たすものである:

(i) スケイン関係式

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)$$

(ii) 規格化

$$V(S^1) = 1$$



- $V((S^1)^m)$ の計算

$$\begin{aligned}t^{-1}V((S^1)^{m-1}) - tV((S^1)^{m-1}) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V((S^1)^m) \\(t - t^{-1})V((S^1)^{m-1}) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V((S^1)^m) \\V((S^1)^m) &= (-t^{1/2} - t^{-1/2})V((S^1)^{m-1})\end{aligned}$$

これより帰納的に次がわかる:

$$V((S^1)^m) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})^{m-1}$$

- $V(\text{Hopf link})$ の計算

$$t^{-1}V(H) - tV((S^1)^2) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(S^1)$$

これより次がわかる:

$$V(H) = -t^{5/2} - t^{1/2}$$

- ① ジョーンズ多項式
- ② 量子群との関係
- ③ 3次元 Chern-Simons 理論との関係
- ④ 圏論化について

量子群

Definition (量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$)

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とは次の関係式を満たす E, F, K, K^{-1} によって \mathbb{C} 上生成される単位的代数である:

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1$$

$$KE = qEK, \quad KF = q^{-1}FK, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

量子群は $U(\mathfrak{sl}_2)^1$ のパラメータ q による変形量子化である。 $K = q^{H/2} = e^{\hbar H/2}$ とおくと、 \mathfrak{sl}_2 の関係式から上の関係式を満たすことがわかる。

¹ $U(\mathfrak{sl}_2)$ とは次の関係式を満たす E, F, H によって \mathbb{C} 上生成される単位的代数である。

$$[E, F] = H, \quad [H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F$$

普遍 R 行列を

$$\mathcal{R} = q^{H \otimes H/4} \exp_q \left((q^{1/2} - q^{-1/2}) E \otimes F \right) \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2) \hat{\otimes} \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$$

と定義する。 $\mathcal{R} = a \otimes b, (a, b \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2))$ と表示し、

$\mathcal{R}_{12} = a \otimes b \otimes 1, \mathcal{R}_{23} = 1 \otimes a \otimes b, \mathcal{R}_{13} = a \otimes 1 \otimes b$ とする。このとき、次が成り立つことが知られている:²

$$\mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23}$$

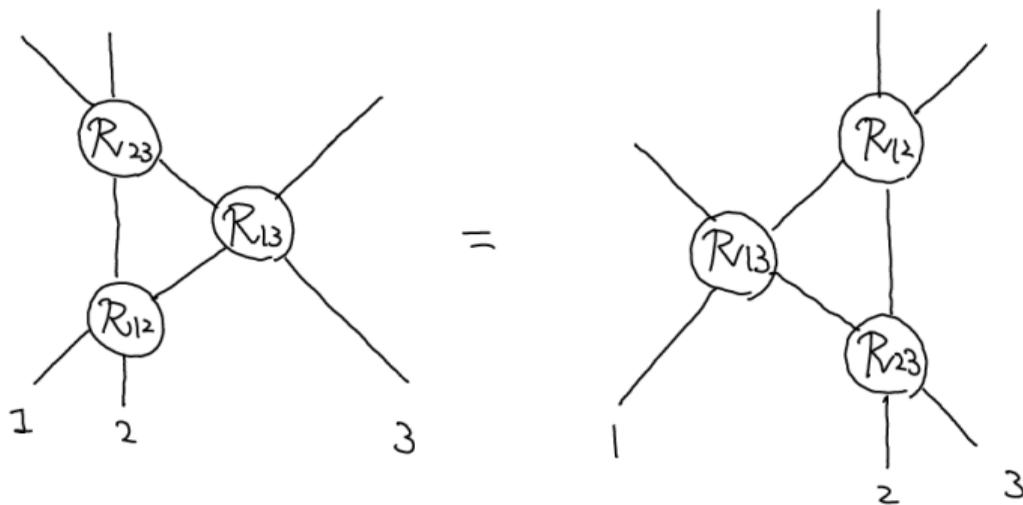
Yang-Baxter 方程式と呼ぶ。

²これは量子群が準三角ホップ代数の構造を持つことからわかる。

Yang-Baxter 方程式

$$\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}$$

は次の図として理解することができる:



これと RIII を比較すると R 行列は結び目の交叉を表現するものであると思うことができる。つまり、R 行列は結び目の交叉の情報を持っている。

Braid 群

Definition (Braid 群)

Braid 群 B_n とは次を満たす $\{\sigma_i\}_{i=1}^{n-1}$ によって生成される群である:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 2$$

Theorem (Alexander)

任意の *link* に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在して *Braid* 群 B_n の元を対応させることができる。

e.g.

- $\{\text{links}\} \ni S^1 \rightarrow id. \in B_1$
- $\{\text{links}\} \ni H \rightarrow \sigma_1 \sigma_1 \in B_2$

量子群の表現

$\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ の 2次元表現 $\rho : \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^2)$ を次で定める:

$$\rho(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(K) = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}$$

このとき $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 上にもテンソル積表現が定義され、 $(\rho \otimes \rho)(\mathcal{R})$ を計算することができる。
 $P(v \otimes w) = w \otimes v, (v, w \in \mathbb{C}^2)$ として

$$R = P \circ (\rho \otimes \rho)(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} q^{1/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1/4} & 0 \\ 0 & q^{-1/4} & q^{1/4} - q^{-3/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{1/4} \end{pmatrix}$$

となる。

天下りの的ではあるが次を定義する:

$$\hat{R} = q^{-3/4} R|_{q^{1/2} = -t^{1/2}} = \begin{pmatrix} -t^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & t^{3/2} - t^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{1/2} \end{pmatrix}$$
$$\hat{h} = \rho(K)|_{q^{1/2} = -t^{1/2}} = \begin{pmatrix} -t^{1/2} & 0 \\ 0 & -t^{-1/2} \end{pmatrix}$$

Theorem

Alexander の定理により link L が $b \in B_n$ に対応したとする。このとき Braid 群 B_n の表現 ψ_n を $B_n \ni \sigma_i \mapsto (id.)^{\otimes(i-1)} \otimes \hat{R} \otimes (id.)^{\otimes(n-i-1)} \in End((\mathbb{C}^2)^{\otimes n})$ により定めると

$$\frac{1}{-t^{1/2} - t^{-1/2}} tr \left(\hat{h}^{\otimes n} \cdot \psi_n(b) \right)$$

はジョーンズ多項式と一致する。

スkein関係式のチェック

スkein関係式は1つの交叉にのみ注目した式であることに注意すると

$$\begin{aligned} t^{-1}\hat{R}^{-1} - t\hat{R} &= t^{-1} \begin{pmatrix} -t^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & t^{3/2} - t^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{1/2} \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -t^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{3/2} - t^{1/2} & t^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{-1/2} \end{pmatrix} \\ &= (t^{1/2} - t^{-1/2})id. \end{aligned}$$

また、規格化についても次のように確かめられる。

$$\frac{1}{-t^{1/2} - t^{-1/2}} \text{tr}(\hat{h} \cdot \psi_1(S^1)) = \frac{1}{-t^{1/2} - t^{-1/2}} (-t^{1/2} - t^{-1/2}) = 1$$

あとはこれが結び目不変量になることを示せばよいが今回は省略する。³

³Braid 群で isotopy に対応する操作を見つけてその操作で不変であることを示せばよい。

- 1 ジョーンズ多項式
- 2 量子群との関係
- 3 3次元 Chern-Simons 理論との関係**
- 4 圏論化について

3次元 Chern-Simons 理論

M を 3次元の多様体とするとき、3次元の Chern-Simons 理論とは次の作用によって定められるゲージ場の理論である:

$$S(A) = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

ここではゲージ群は $SU(2)$ とする。⁴ $k \in \mathbb{Z}$ のとき位相的場の理論というやつになることが知られている⁵:

$$Z(M) = \int \mathcal{D}A e^{iS(A)}$$

が位相不変量になる。⁶

⁴ トレースは adjoint 表現で取る

⁵ シュワルツタイプの TQFT と呼ばれるタイプの TQFT である。もう 1 つウィッテンタイプとかいうのもあるが私はよく知らない。

⁶ Reshetikhin-Turaev 不変量 (RT 不変量) と呼ばれるものになる。

Wilson loop

ゲージ理論には Wilson-loop と呼ばれる観測量が存在することがよく知られている:

$$W(\gamma) = \text{tr} \mathcal{P} \exp \left(i \oint_{\gamma} A \right)$$

ここで γ は M 内の閉曲線、 \mathcal{P} は適当に決めた loop の基点に沿って path のパラメータの順番に沿って積分する記号。⁷ これもまた位相不変量になり、ゲージ不変であることが知られている。次で「定義」される Wilson loop の期待値を計算することを考える:

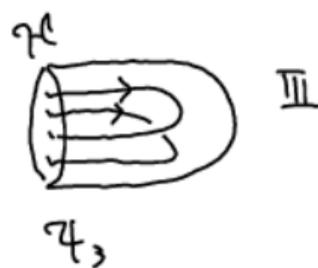
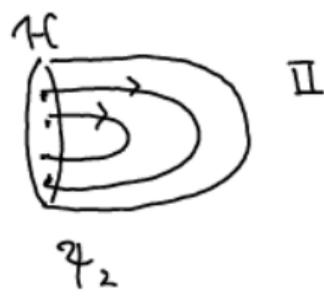
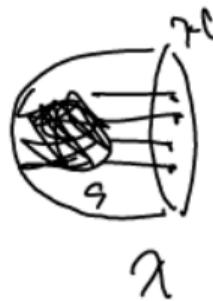
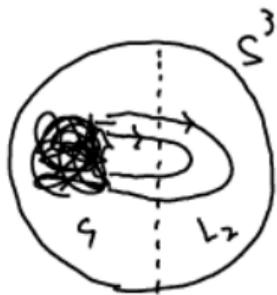
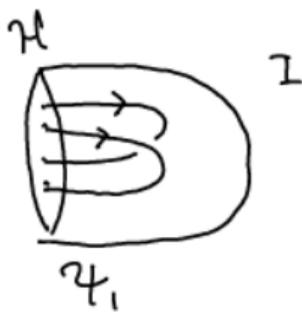
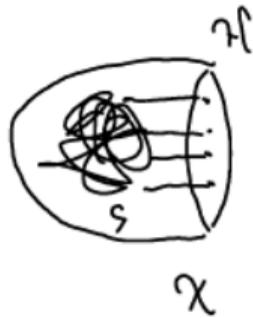
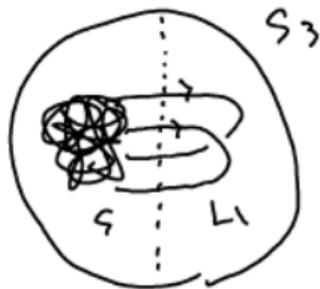
$$\langle W(\gamma) \rangle = \frac{1}{Z(M)} \int \mathcal{D}A W(\gamma) e^{iS(A)}$$

Theorem (Witten)

$M = S^3$ とし、閉曲線 γ を *knot* とみなすと $\langle W(\gamma) \rangle$ は γ のジョーンズ多項式に一致する。

⁷ トレースをどの表現空間の上で取るかという問題はあるがここでは基本表現の上で取る

- 分配関数、期待値は状態の成すヒルベルト空間上の内積で計算できる
- 量子力学において状態の成すヒルベルト空間は時間一定面に対して定まる
- M を適当に切ったとき右側と左側に対応する状態が存在してその内積を取ることで分配関数を計算することができるだろう
- 閉曲線 γ 付きの S^3 を適当に切ったとき右側と左側に対応する状態が存在してその内積を取ることで Wilson loop の期待値を計算することができるだろう
- Wilson loop の期待値の間の関係式は状態の間の関係式に書き換えられる
- 状態の成すヒルベルト空間は 3 次元多様体の境界に出てきているので 3D CS \Leftrightarrow WZW model の dual で 2 次元共形場の考察を使える



前スライドの3つの link L_1, L_2, L_3 に対応する Wilson loop の期待値が

$$\langle W(L_k) \rangle = (\chi, \psi_k), \quad k = 1, 2, 3$$

となるような $\psi_k \in \mathcal{H}, k = 1, 2, 3$ が存在すると仮定する。⁸ 定理の証明のためにはこれらがス
ケイン関係式を満たすことを示せばよい。したがって

$$\alpha(\chi, \psi_k) + \beta(\chi, \psi_2) + \gamma(\chi, \psi_3) = 0$$

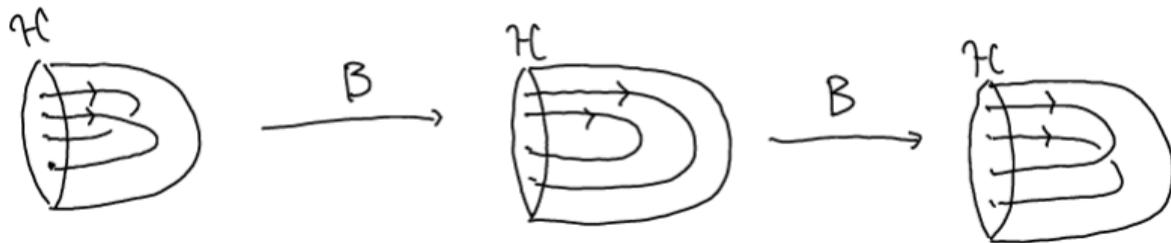
なる $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ の組で非自明なものを見つけて、これらが上手く $t \in \mathbb{C}$ を選んでくると
 $(\alpha, \beta, \gamma) = (t, -(t^{1/2} - t^{-1/2}), -t^{-1})$ となることを示せばよい。
内積の非退化性から

$$\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \gamma\psi_3 = 0$$

となる。

⁸存在を示すことは無理、経路積分を数学的に定式化することができていないので数学の問題にもならない。

次の図で operator $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ を定義する:



つまり B は 1,2 番目を入れ替える操作に対応する operator である。⁹ このとき $\psi_2 = B\psi_1, \psi_3 = B^2\psi_1$ であるから

$$(\alpha + \beta B + \gamma B^2)\psi_1 = 0$$

なる関係を得る。

⁹交叉の正負には気を付ける必要があるため $B^2 = id.$ ではない

WZW model との duality

ここで S^3 を切ったことで生じる境界を見ると、4-ponted marked surface であることがわかる。ここで、次の主張を用いる:

境界付き 3次元多様体の上の $SU(2)$ -CS 理論の境界には $SU(2)$ WZW model が表れる

1番目と4番目をそれぞれ原点、無限遠点と思うと \mathcal{H} は conformal block の空間と呼ばれるものである。2番目と3番目の点を入れ替える自由度しかないため \mathcal{H} は 2次元である。¹⁰ したがって B は 2次正方行列であり、CFT の議論から

$$B \sim \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\pi}{2(2+k)}\right) & 0 \\ 0 & -\exp\left(\frac{3i\pi}{2(2+k)}\right) \end{pmatrix}$$

がわかる。

¹⁰もっとまじめに議論するためには extended TQFT を用いる必要がある

ここでケーリー・ハミルトンの式を思い出す:

$$B^2 - (\text{tr}B)B + (\det B)I_2 = 0$$

これより (α, β, γ) の非自明な組として次の組が存在する:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \det B, \quad \frac{\beta}{\gamma} = -\text{tr}B$$

ここで

$$t = \exp(2\pi i/(2+k))$$

とすると α, β, γ を選んで $(\alpha, \beta, \gamma) = (t, -(t^{1/2} - t^{-1/2}), -t^{-1})$ が成り立つようにできる。¹¹

¹¹ $V((S^1)^2) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})V(S^1)$ となるように選ぶとできる。上のほうの絵の s を絡まりが無いように選んで Wilson loop を比べると

$$-\frac{\alpha + \gamma}{\beta} = -t^{1/2} - t^{-1/2}$$

とすればよいことが分かる

- 1 ジョーンズ多項式
- 2 量子群との関係
- 3 3次元 Chern-Simons 理論との関係
- 4 圏論化について

Question

量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と 3次元 $SU(2)$ -Chern Simons 理論のどちらからもジョーンズ多項式を得ることができた。これは圏論的にはどのように理解できる？

Question

量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と 3次元 $SU(2)$ -Chern Simons 理論のどちらからもジョーンズ多項式を得ることができた。これは圏論的にはどのように理解できる？

Answer

$\{MTCs\} \rightarrow \{3D\ TQFTs\}$ の対応における不変量と見ることができる

量子群と CS 理論

Theorem

$\{MTCs\} \rightarrow \{3D\ TQFTs\}$ の対応が存在する。

Theorem

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の $q = e^{\pi i/(2+k)}$, $k \in \mathbb{Z}$ のとき^a, MTC $\mathcal{C}^{int}(\mathfrak{sl}_2, k)$ を作ることができる。

^aこのとき q が 1 の冪根である

Theorem

$\{MTCs\} \rightarrow \{3D\ TQFTs\}$ の対応において

$$\mathcal{C}^{int}(\mathfrak{sl}_2, k) \mapsto 3D\ SU(2) - \text{Chern} - \text{Simons theory of level } k$$

量子群と CFT

Theorem

$\hat{\mathfrak{sl}}_2$ から MTC $\mathcal{O}_k^{int}(\mathfrak{sl}_2)$ を作ることができる。

Theorem

$\mathcal{O}_k^{int}(\mathfrak{sl}_2)$ と $\mathcal{C}^{int}(\mathfrak{sl}_2, k)$ は MTC として圏同値である。

以上の定理を組み合わせると次の対応がわかる:

$$\hat{\mathfrak{sl}}_2 \rightarrow \mathcal{O}_k^{int}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathcal{C}_k^{int}(\mathfrak{sl}_2, k) \rightarrow 3D \text{ } SU(2) - \textit{Chern - Simons theory}$$

この対応は $\{MTCs\} \rightarrow \{3D \text{ TQFTs}\}$ の対応を観察すると

境界付き 3次元多様体の上の $SU(2)$ -CS 理論の境界には $SU(2)$ WZW model が表れる
という主張に他ならないことがわかる。

参考文献

- 結び目の不変量, 大槻知忠
- 量子群とヤン・バクスター方程式, 神保道夫
- Lecture on Tensor Categories and Modular Functor, Bojko Bakalov, Alexander Kirillov, Jr
- Quantum field theory and the Jones polynomial, Edward Witten
- Factorization Algebras in Quantum Field Theory vol1,2, Kevin Costello, Owen Gwilliam
- Vertex Algebras and Algebraic Curves, Edward Frenkel David Ben-Zvi

MTC

Definition (MTC)

Semisimple ribbon category \mathcal{C} が Modular tensor category (MTC) であるとは次の条件を満たすことである:

- (i) simple object の同型類が有限個である
- (ii) $\{\tilde{S}_{ij}\}_{i,j \in \{\text{iso class of simple obj}\}}$ が可逆行列である。

$$\tilde{S}_{ij} = \text{diagram of two circles with arrows and labels } i$$

e.g.

MTC

Definition (MTC)

Semisimple ribbon category \mathcal{C} が Modular tensor category (MTC) であるとは次の条件を満たすことである:

- (i) simple object の同型類が有限個である
- (ii) $\{\tilde{S}_{ij}\}_{i,j \in \{\text{iso class of simple obj}\}}$ が可逆行列である。

$$\tilde{S}_{ij} = \text{diagram of two circles with arrows and labels } i$$

e.g.

- 簡単な例はない

MTC

Definition (MTC)

Semisimple ribbon category \mathcal{C} が Modular tensor category (MTC) であるとは次の条件を満たすことである:

- (i) simple object の同型類が有限個である
- (ii) $\{\tilde{S}_{ij}\}_{i,j \in \{\text{iso class of simple obj}\}}$ が可逆行列である。

$$\tilde{S}_{ij} = \text{diagram of two circles with arrows and labels } i$$

e.g.

- 簡単な例はない
- 最も簡単な例は有限群の quantum double の有限次元表現の圏 $\text{Rep}_f D(G)$

色付きジョーンズ多項式

本節では $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の 2 次元表現を考えたが、同様の構成方法により 2 次元でない表現に対しても結び目不変量を構成することができることが知られている。この構成似よって得られる結び目不変量を色付きジョーンズ多項式と呼ぶ。

色付きジョーンズ多項式の線形結合で表される結び目不変量を量子不変量と呼ぶようである。また別の拡張として \mathfrak{sl}_2 を一般の simple Lie algebra にすることも考えられる。このときホップフリー多項式と呼ばれる結び目不変量を得ることができる。

さらに一般に量子群以外の Ribbon ホップ代数と呼ばれるクラスの準三角ホップ代数に対しても同様の構成を行うことができる。