Bott 周期性とK理論
(@Esquisse 1102)
数学徒のつどい (2024, 10, 19)

§ Introduction

$\boxed{\text{Bott 周期性}}$ … ユニタリー群のホモトピー群に関する定理
(Bott, 1957) 現代の数学に大きな影響を与えた

$\boxed{\text{(位相的) K理論}}$ … (一般) コホモロジー理論の一種
(Atiyah - Hirzebruch 1959, 1961)
K群導入　コホモロジー理論として発展

Grothendieck, 1957 (代数的) K群の導入

Grothendieck - Riemann - Roch の定理と Bott 周期性を背景に誕生. 様々な分野に発展・応用されている
(e.g. 一般コホモロジー, 指数定理, 作用素環, 物性物理 etc)

Bott 周期性の証明

Bott (1957) … Morse 理論を使用

☆ Atiyah - Bott (1964) … K理論の定理として証明
球面束上のベクトル束を詳しく調べることによる"初等的"証明

☆ Atiyah (1967) … Fredholm 作用素の族の指数を使った証明

(☆) Cuntz (1986) … Toeplitz 環と呼ばれる C^*環 (作用素環) を用いた証明

⋮ } Bott 周期性の証明は他にも色々ある

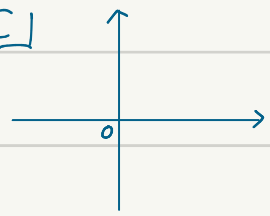
→ 今日はこれらについて紹介する

トポロジーと解析が深く関わる様子が伝われば幸いです

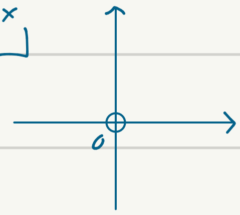
§ ホモトピー群 と Bott 周期性

Q. $\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ のちがいは？

$\mathbb{C}$」



$\mathbb{C}^\times$」



A. 穴が空いているか否か

↳ これを数学的に定式化する

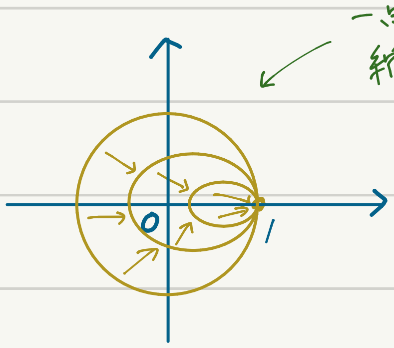
⤳ ホモトピー群

observation

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

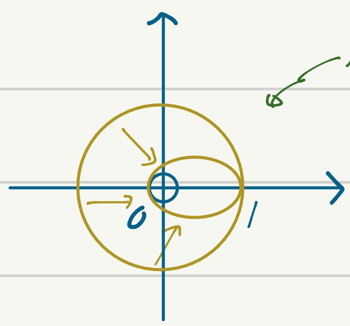
$X = \mathbb{C}$ or $\mathbb{C}^\times$ として, X 内で S^1 を一点 $=1$ に縮められるかを考える

$\mathbb{C}$」



一点 $=1$ に縮められる

$\mathbb{C}^\times$」



原点 $=0$ で引っかかって一点 $=1$ に縮められない

これは連続写像

$f : S^1 \to X \; ; \; e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}$

が

$g : S^1 \to X \; ; \; e^{i\theta} \mapsto 1$

に連続的に変形できるか？　という問題になる

↳ ホモトピー

$I := [0,1] \subset \mathbb{R}$: 区間

Def

連続写像 $f, g : X \to Y$ が ホモトピック

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^{\exists}F : X \times I \longrightarrow Y$: 連続

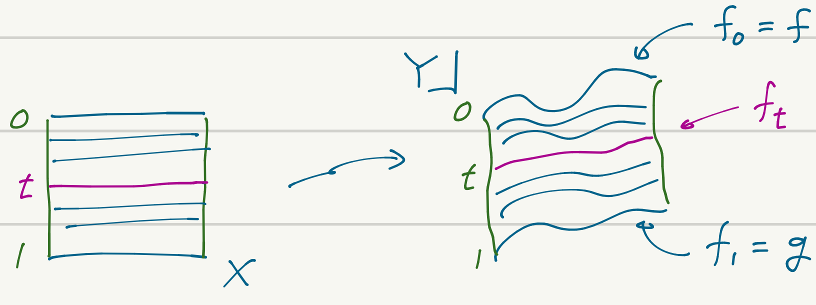
s.t. $\begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ F(x,1) = g(x) \end{cases}$, $^{\forall}x \in X$

$f_t(x) := F(x,t)$

とかけば、これは

$f = f_0 \rightsquigarrow f_t \rightsquigarrow f_1 = g$

というようにfとgが連続的に変形できることをいっている



上のobservationの例では

$f : S^1 \to X$; $e^{i\theta} \longmapsto e^{i\theta}$

$g : S^1 \to X$; $e^{i\theta} \longmapsto 1$

に対して

$X = \mathbb{C} \Rightarrow f \simeq g$

$X = \mathbb{C}^{\times} \Rightarrow f \not\simeq g$

- f と g がホモトピックであるとき、$f \simeq g$ とかく
- $C(X,Y) := \{ f : X \to Y \mid f : \text{連続} \}$ とすると

  $\simeq$ は $C(X,Y)$ 上の同値関係を定める
- $[X,Y] := C(X,Y)/\simeq$ と定義する

  (i.e. $[X,Y]$ = XからYへの連続写像のホモトピー類のなす集合)
- $\pi_1(X) := [S^1, X]$ を Xの基本群 という

  適切な演算で群になる(省略)

⚠ 基点についての議論を今日は省略する

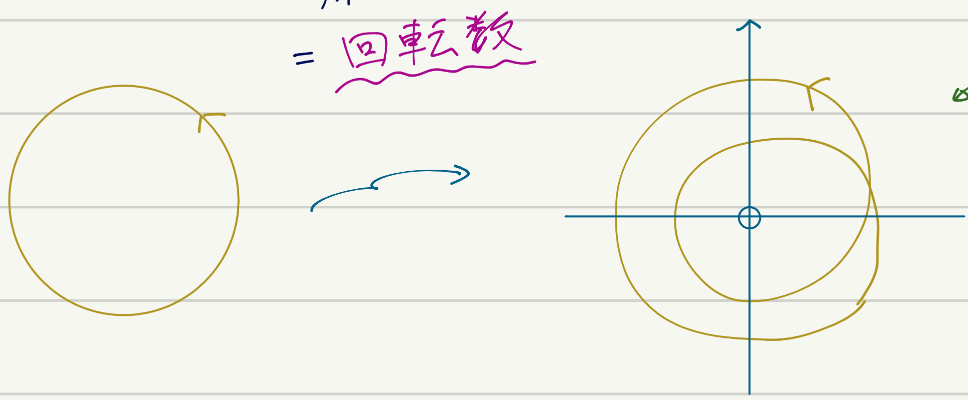
(基本群も正しくは基点をとって「基点を保つホモトピー」で定義する)

e.g. $\pi_1(\mathbb{C}) = \{\text{定値写像}\} =: 0$

$\pi_1(\mathbb{C}^{\times}) \cong \mathbb{Z}$

原点=0を何周するか

= 回転数



これは 回転数 = 2

• 基本群はホモトピー不変性をもつ

↪ ホモトピー同値な空間に対して基本群は同じ

• X と Y がホモトピー同値（$X \simeq Y$ とかく）

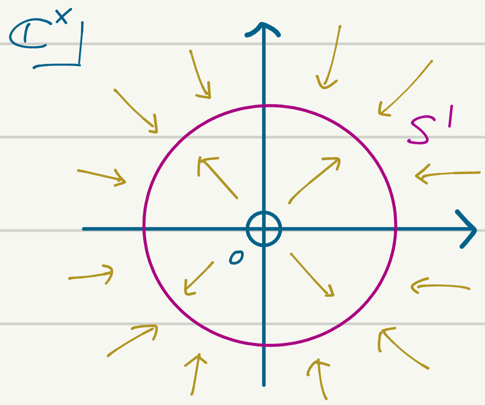
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}f : X \to Y$, ${}^{\exists}g : Y \to X$ 連続写像

s.t. $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$

ここが「=」 ⟹ 同相（$X \approx Y$ とかく）

e.g. $f : \mathbb{C}^\times \to S^1$, $g : S^1 \to \mathbb{C}^\times$

$re^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}$ 　 $e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}$



$\Rightarrow f \simeq g$

$\Rightarrow \mathbb{C}^\times \simeq S^1$

$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^\times) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

$f : S^1 \to S^1$ の回転数

e.g. $\phi_k : S^1 \to S^1$

$e^{i\theta} \mapsto (e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$

$\Rightarrow \phi_k$ の回転数 $= k$

• $S^n := \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$

: n 次元球面

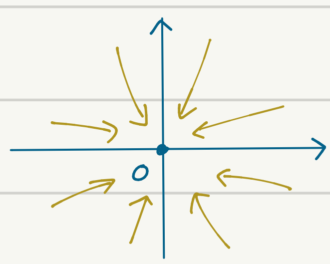
ホモトピー群もホモトピー不変性をもつ

Def

$\pi_n(X) := [S^n, X]$ を X の n 次元ホモトピー群という

$\mathbb{R}^m \simeq \{0\}$ から分かる

e.g. $\pi_n(\mathbb{R}^m) = 0$, ${}^{\forall}n, m \in \mathbb{N}$



Q. $\pi_n(S^m) = ?$

A. 未解決（完全には分かっていない）

$u^* := {}^t\bar{u}$（転置共役）

- $U(n) := \{ u \in M_n(\mathbb{C}) \mid u^* u = u u^* = 1 \}$

単位行列

: n 次ユニタリー群

（$n \times n$ ユニタリー行列全体）

Bott 周期性

Thm (Bott, 1957)

$$m > \frac{n}{2} \Rightarrow \pi_n(U(m)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n : \text{odd}) \\ 0 & (n : \text{even}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} U(n) & \hookrightarrow & U(n+1) \\ \cup & & \cup \\ u & \longmapsto & \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{}_{n} & \underbrace{}_{1} \end{array} & \end{array} \end{array}$$

とみて，

$$U := \varinjlim_{n} U(n)$$

とおくと，Bott 周期性は次のようにもかける

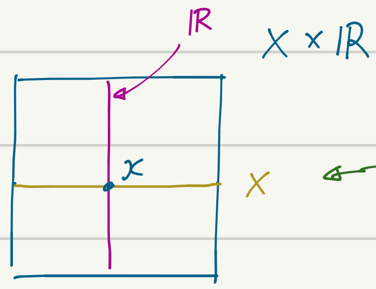
Thm (Bott, 1957)

$$\pi_n(U) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n : \text{odd}) \\ 0 & (n : \text{even}) \end{cases}$$

§ ベクトル束とK理論

ベクトル束

X を位相空間として, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする



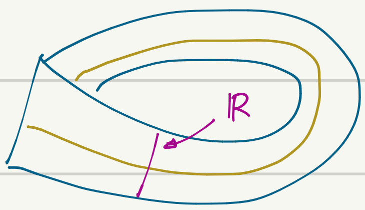
Xの上にベクトル空間$\mathbb{R}$が定まっていると思う

直積 $X\times\mathbb{K}^n$ は各点 $x\in X$ に
ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ が定まっている空間と思える

⇝ このように Xの各点にベクトル空間が定まっているもの
= ベクトル空間の族

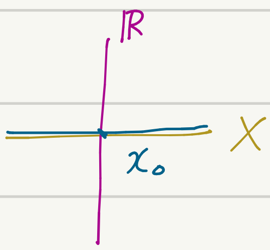
直積でないベクトル空間の族もある:

①



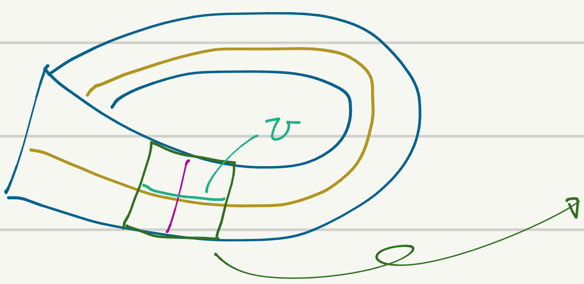
Möbiusの帯

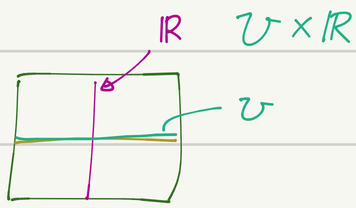
②



$$E = \coprod_{x\in X} E_x, \quad E_x = \begin{cases} \mathbb{R}, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

①,②の違い : ① は(任意の点の近傍で)局所的に直積になっている



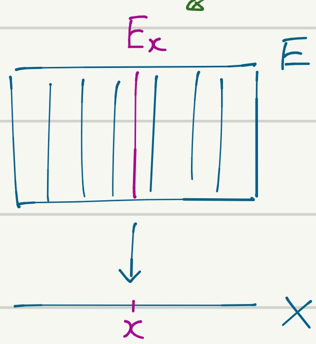


(②は x_0の近傍で直積にならない)

位相空間 E が X 上のベクトル束

"$\underset{\text{def}}{\iff}$" EはX上のベクトル空間の族で, $^\forall x\in X$ の近傍で直積の形にかける

- ベクトル束を $E \to X$ とかくことも多い
- $x \in X$ に対応するベクトル空間を E_x とかき，x 上のファイバーという



x 上のファイバー

E "=" $\bigsqcup_{x \in X} E_x$

ベクトル空間 E_x $(x \in X)$ が X 上で「束」になっている

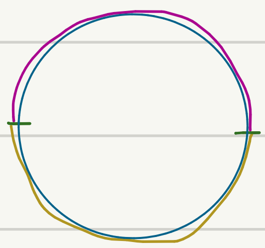
各 $x \in X$ の上にベクトル空間 E_x がのっているイメージ

ベクトル束の作り方

① 貼り合わせ：

X, X_1, X_2：コンパクト Hausdorff
$A \subset X$：閉集合
とする

$X = X_1 \cup X_2$，$A = X_1 \cap X_2$ とする

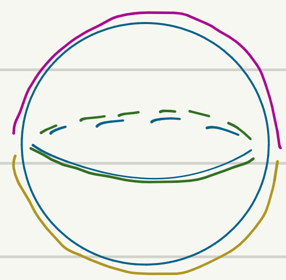


$X = S^1$

$X_1 = \{ e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi \}$

$X_2 = \{ e^{i\theta} \mid \pi \le \theta \le 2\pi \}$

$A = \{ 1, -1 \}$



$X = S^2$

X_1 = 上半球

X_2 = 下半球

$A = S^1$

このとき，

X_1 上のベクトル束 E ; $\dim E_x = n$

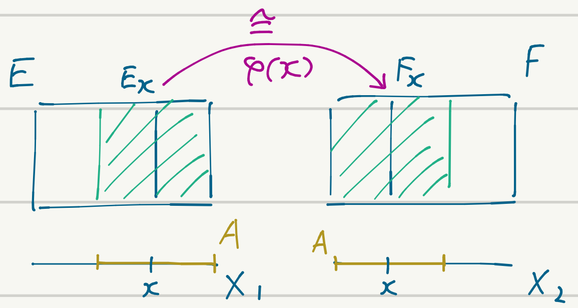
X_2 〃 F ; $\dim F_x = n$

連続写像 $\varphi : A \to GL_n(\mathbb{K}) := \{ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n：線形同型 \}$

から $X = X_1 \cup X_2$ 上のベクトル束 (E, φ, F) を次の様にして構成できる：

$$(E, \varphi, F) := E \sqcup F / \sim$$

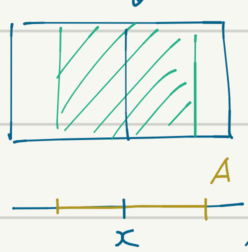
$$e \sim f \overset{\text{def}}{\iff} e = f \text{ or } e \in E_x,\ f \in F_x \text{ かつ } f = \underset{GL_n(\mathbb{K})}{\underset{\rotatebox{90}{$\in$}}{\varphi(x)}} e$$



$\varphi(x)$ で E_x と F_x を "貼り合わせる"

⇝

$(E, \varphi, F)_x = E_x = \varphi(x) F_x$



Ex $X = S^1$

$X_1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$, $E = X_1 \times \mathbb{R}$

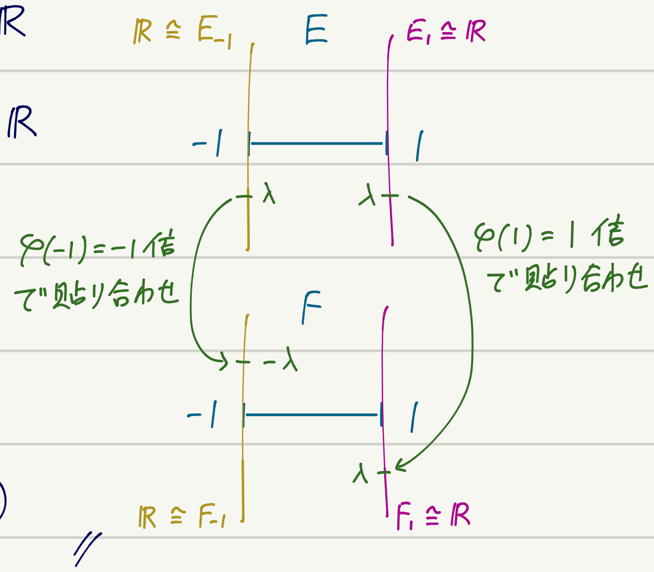
$X_2 = \{e^{i\theta} \mid \pi \le \theta \le 2\pi\}$, $F = X_2 \times \mathbb{R}$

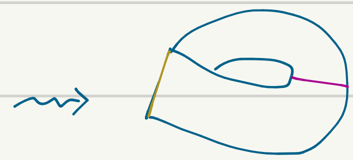
$A = \{1, -1\}$

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & A & \longrightarrow & GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

$\Rightarrow$ (E, φ, F) = Möbiusの帯

(Möbius束という)





(E, φ, F)

= Möbius束

//

Ex $X = S^2$, X_1 = 上半球 =: D^+, X_2 = 下半球 =: D_-, $A = S^1$

とするとき、

$E = X_1 \times \mathbb{C}$, $F = X_2 \times \mathbb{C}$

を

$$\begin{array}{cccc} \phi_k : & S^1 & \longrightarrow & S^1 \subset GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ & e^{i\theta} & \longmapsto & e^{ik\theta} \end{array}$$

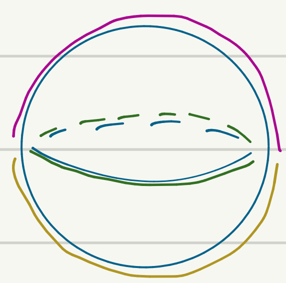
← k回転

で貼り合わせることで、ベクトル束

$H^{-k} := (E, \phi_k, F)$ ← 符号に注意

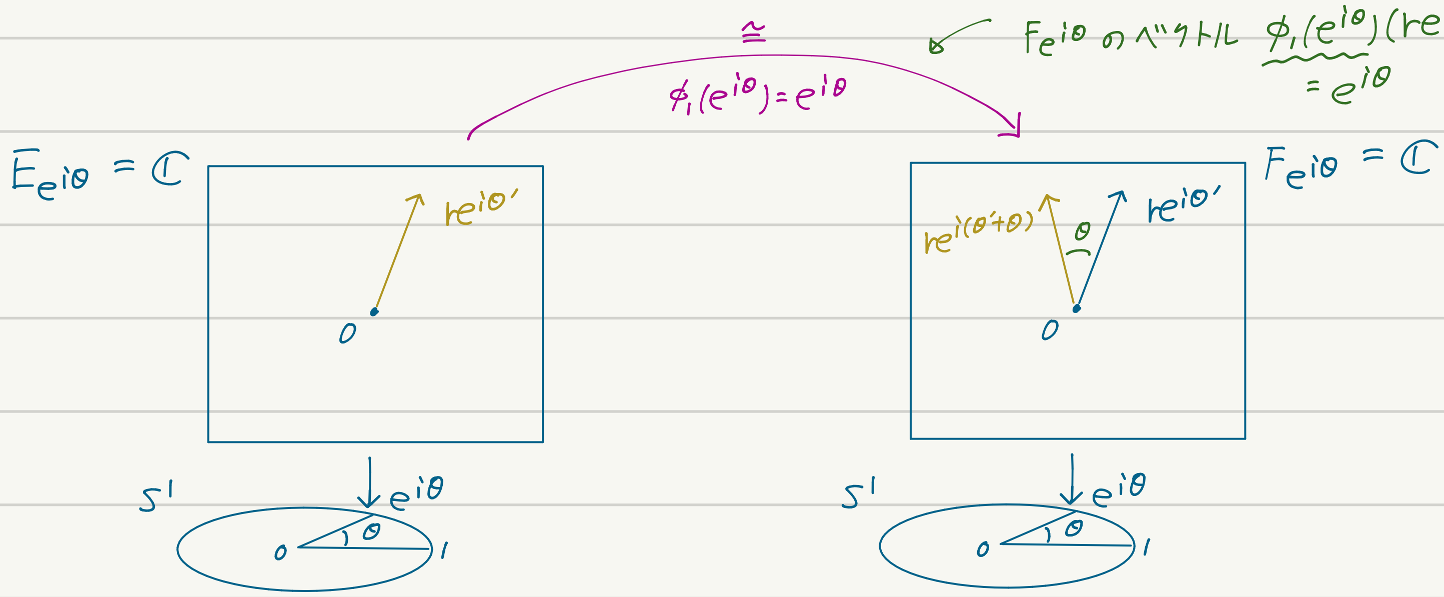
($H^k = (E, \phi_k, F)$ とする流儀もある)

が得られる



$E_{e^{i\theta}}$ のベクトル $re^{i\theta'}$ を

$F_{e^{i\theta}}$ のベクトル $\underbrace{\phi_1(e^{i\theta})}_{=e^{i\theta}}(re^{i\theta'}) = re^{i(\theta'+\theta)}$ と同一視



//

ホモトピック　　ベクトル束としての同型

- $\varphi \simeq \psi \Rightarrow (E, \varphi, F) \cong (E, \psi, F)$

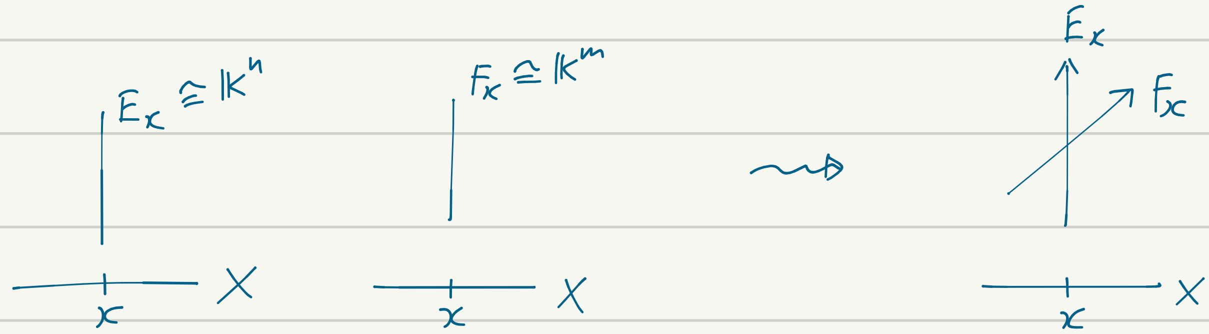
$E \to X$ と $F \to X$ に対して
$E \cong F \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ E と F は同相かつ
$E_x \cong F_x$, $^\forall x \in X$
線形同型

② 直和とテンソル積：

ベクトル束 $E \to X$, $F \to X$ に対して, 直和 $E \oplus F$ とテンソル積 $E \otimes F$ を次の様に定める：

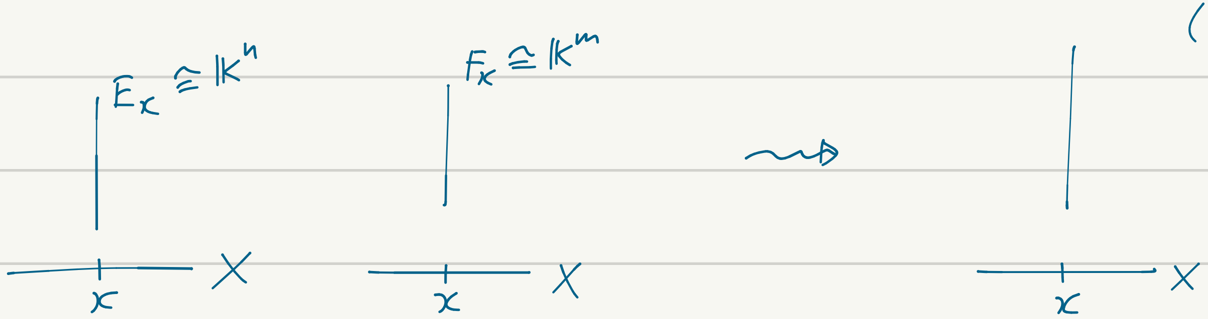
- $E \oplus F$ "=" $\displaystyle\bigsqcup_{x \in X} E_x \oplus F_x$ ← 各ファイバーで直和をとる

$(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$
$\cong \mathbb{K}^{n+m}$



- $E \otimes F$ "=" $\displaystyle\bigsqcup_{x \in X} E_x \otimes F_x$ ← 各ファイバーでテンソル積をとる

$(E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x$
$\cong \mathbb{K}^{nm}$



$\dim E_x = \dim F_x = n$　　$\dim E'_x = \dim F'_x = m$

<u>Ex</u>　$X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = A$, $E \to X_1$, $F \to X_2$, $E' \to X_2$, $F' \to X_2$

$\varphi : A \to GL_n(\mathbb{C})$, $\psi : A \to GL_m(\mathbb{C})$ とする

- $\varphi \oplus \psi : A \longrightarrow GL_{n+m}(\mathbb{C})$; $x \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(x) & 0 \\ 0 & \psi(x) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left(E \oplus F, \varphi \oplus \psi, E' \oplus F'\right) \cong (E, \varphi, F) \oplus (E', \psi, F')$

- $\varphi \otimes \psi : A \to GL_{nm}(\mathbb{C})$; $x \longmapsto \varphi(x) \otimes \psi(x)$

$\Rightarrow \left(E \otimes F, \varphi \otimes \psi, E' \otimes F'\right) \cong (E, \varphi, F) \otimes (E', \psi, F')$

※ $\phi_0 : S^1 \to GL_1(\mathbb{C})\,;\, e^{i\theta} \mapsto 1$

$\rightsquigarrow H^0 = S^2 \times \mathbb{C}$ ：自明束

これらを使うと

$$(D^+\times\mathbb{C}^2,\ \phi_{-1}\oplus\phi_{-1},\ X\times\mathbb{C}^2) \cong H^1\oplus H^1$$

$$(D^+\times\mathbb{C}^2,\ \phi_{-2}\oplus\phi_0,\ X\times\mathbb{C}^2) \cong H^1\otimes H^1\oplus H^0$$

がわかり，

$$\phi_{-1}\oplus\phi_{-1} \simeq \phi_{-2}\oplus\phi_0$$

$\begin{pmatrix} z & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2}t & -\sin\frac{\pi}{2}t \\ \sin\frac{\pi}{2}t & \cos\frac{\pi}{2}t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2}t & \sin\frac{\pi}{2}t \\ -\sin\frac{\pi}{2}t & \cos\frac{\pi}{2}t\end{pmatrix}$

より

$$H^1\otimes H^1\oplus H^0 \cong H^1\oplus H^1$$

が成り立つ　$\rightsquigarrow$ 貼り合わせ関数の計算でベクトル束の計算ができる

//

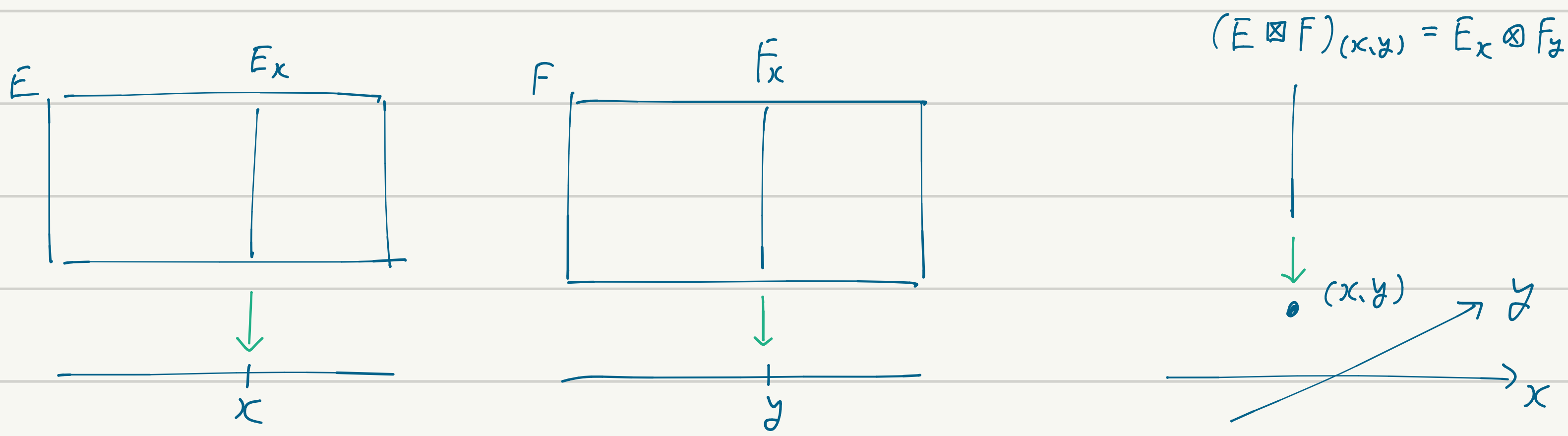
③ 外部テンソル積：

ベクトル束 $E\to X$，$F\to Y$ に対して，外部テンソル積 $E\boxtimes F \longrightarrow X\times Y$ を

$$E\boxtimes F \text{ “=” } \coprod_{(x,y)\in X\times Y} E_x\otimes F_y$$

← (x,y) 上のファイバーを $E_x\otimes F_y$ とする

として定める



K理論

以下，特に断わらない限り $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ とし，X や Y はコンパクトHausdorff空間とする

← K群がうまくふるまう空間

Def

$\mathrm{Vect}(X) := \{X$ 上の $\mathbb{K}$-ベクトル束の同型類$\}$

$E=\mathbb{K}^n$

$\bullet\ X=\{*\}$

(e.g. $X=$ 一点 $\Rightarrow$ $\mathrm{Vect}(X) \cong \mathbb{N}$
$[E] \longleftrightarrow \dim E$)

一点上のベクトル束
= ベクトル空間

← 次元で同型類が決まる

ちゃんとした構成法がある

Def

$K(X)$ "$:=$" $\{[E]-[F] \mid [E],[F] \in \mathrm{Vect}(X)\}$

を X の K群 という

(※ $E \cong F$
$\Rightarrow [E]-[F]=0$)

(e.g. $X=$ 一点 $\Rightarrow$ $K(X) \cong \mathbb{Z}$
$[E]-[F] \longleftrightarrow \dim E-\dim F$)

$[E],[F],[E'],[F'] \in \mathrm{Vect}(X)$ に対して

- $([E]-[F])+([E']-[F'])$ "$=$" $[E\oplus E']-[F\oplus F']$
- $([E]-[F])\cdot([E']-[F'])$ "$=$" $[E\otimes E']-[E\otimes F']-[F\otimes E']+[F\otimes F']$

$$= [(E\otimes E')\oplus(F\otimes F')]-[(E\otimes F')\oplus(F\otimes E')]$$

により $K(X)$ に和と積が定まる

$\rightsquigarrow$ $K(X)$ は可換環（特にアーベル群）となる

$x_0 \in X$ を1つとる

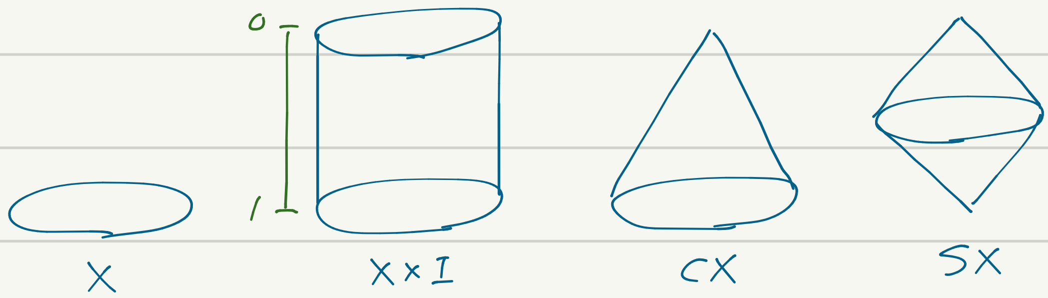
$\tilde{K}(X) := \{[E]-[F] \in K(X) \mid \dim E_{x_0}-\dim F_{x_0}=0\}$

を X の簡約K群 という ← $K(X)$ の部分環（群）

(e.g. $X=$ 一点
$\Rightarrow \tilde{K}(X)=0$)

§ K理論におけるBott周期性とAtiyah-Bottによる証明

K理論におけるBott周期性



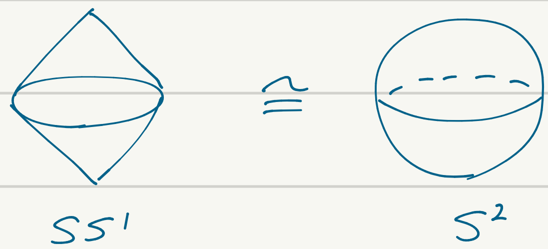
$I=[0,1]$ とするとき、

$CX := (X\times I)/X\times\{0\}$

を X の錐(cone)といい、

$SX := (X\times I)/(X\times\{0\})\cup(X\times\{1\})$

を X の懸垂(suspension)という



(e.g. $X=S^1 \Rightarrow SX \cong S^2$)

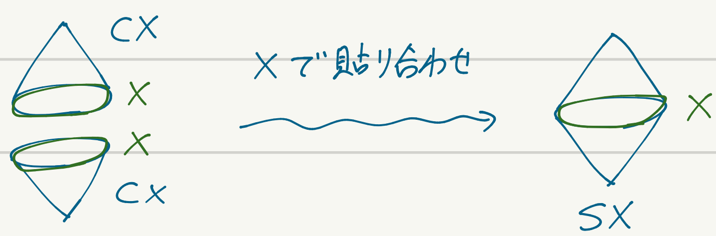
n回懸垂をとる

$S^nX := \underbrace{SS\cdots S}_{n}X$ と定める

Thm (K理論におけるBott周期性)

$\tilde{K}(S^2X) \cong \tilde{K}(X)$

ユニタリー群に対するBott周期性との関係



- 懸垂 SX は錐 CX を2つ貼り合わせたものとみることができる
- CX 上のベクトル束は自明束のみ ← CX:可縮より従う(= 1点とホモトピー同値)から従う

  直積と同型なベクトル束のこと

⇝ $\varphi: X \to GL_n(\mathbb{C})$ により SX 上のベクトル束 $E_\varphi := (CX\times\mathbb{C}^n, \varphi, CX\times\mathbb{C}^n)$

自明束を φ で貼り合わせたベクトル束

Fact

ファイバーの次元が n のベクトル束の同型類のなす集合

$$[X, GL_n(\mathbb{C})] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Vect}_n(SX)$$
$$[\varphi] \longmapsto [E_\varphi]$$

※ $\varphi \simeq \psi \Rightarrow E_\varphi \cong E_\psi$

(i.e. ホモトピックな貼り合わせ関数は同型なベクトル束を定める)

ユニタリー群

この対応とホモトピー同値 $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U(n)$ から同型

$$[X, U] \cong \tilde{K}(SX)$$

が成り立つ

$SS^n \cong S^{n+1}$

$$\rightsquigarrow \pi_n(U) = [S^n, U] \cong \tilde{K}(SS^n) \cong \tilde{K}(S^{n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n: odd) \\ 0 & (n: even) \end{cases}$$

(ユニタリー群に対する Bott 周期性)

Bott 周期性から

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \cong \tilde{K}(S^0) \cong \tilde{K}(S^2) \cong \tilde{K}(S^4) \cong \cdots \\ 0 \cong \tilde{K}(S^1) \cong \tilde{K}(S^3) \cong \tilde{K}(S^5) \cong \cdots \end{cases}$$

K 群の計算　　$SS^n \cong S^{n+1}$

Atiyah-Bott による Bott 周期性の証明

- 外部テンソル積により，積

$$K(X) \times K(Y) \longrightarrow K(X \times Y)$$
$$([E], [F]) \longmapsto [E]\cdot[F] := [E \boxtimes F]$$

が定まる.

b を Bott 元という

- $b := [H^1] - [H^0] \in \tilde{K}(S^2) \subset K(S^2)$

は $\tilde{K}(S^2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元になる

$$n \cdot b \leftrightarrow n$$

$\tilde{K}(S^2)$ の任意の元は $n \cdot b \quad (n \in \mathbb{Z})$ の形でかけるということ

- $\tilde{K}(S^2 X) \subset K(S^2 \times X)$ とみれる

Fact

b との積 $K(X) \longrightarrow K(S^2 \times X)$ が Bott 周期性の同型

$\qquad a \longmapsto b \cdot a$

$\beta : \widetilde{K}(X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{K}(S^2 X)$ ← β を Bott 写像という

を誘導する

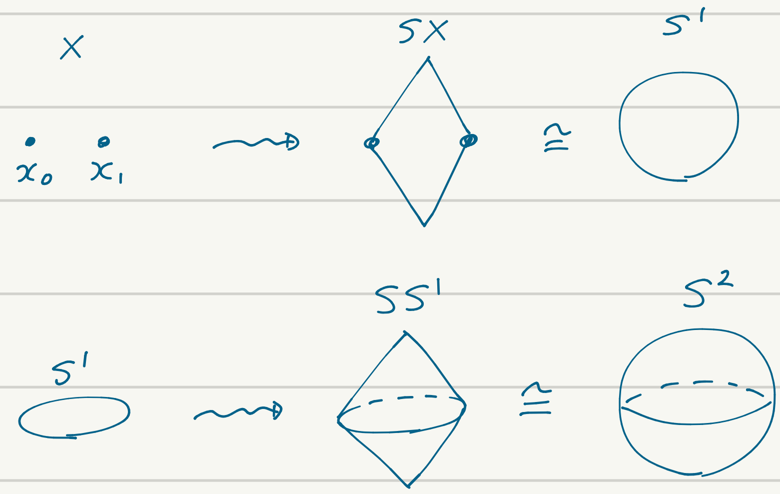
今日は「構成」に焦点を当てる

☆ Bott 周期性の証明 ⟶ β の逆写像 $\alpha : \widetilde{K}(S^2 X) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$ を構成すればよい

observation

$X = \{x_0, x_1\}$ (二点) $\Rightarrow SX \cong S^1$

$\Rightarrow S^2 X \cong SS^1 \cong S^2$



$\rightsquigarrow \beta : \widetilde{K}(X) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{K}(S^2 X) \cong \widetilde{K}(S^2) \cong \mathbb{Z}$

$\qquad n \longmapsto n \cdot b$ 〜 $\widetilde{K}(S^2)$ の生成元

$\rightsquigarrow \alpha : \widetilde{K}(S^2) \longrightarrow \widetilde{K}(X) \cong \mathbb{Z}$

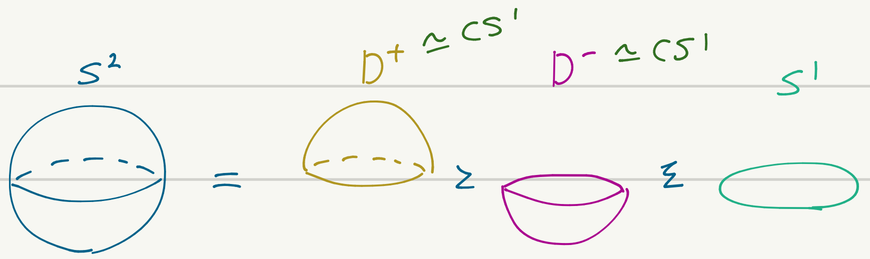
$\qquad n \cdot b \longmapsto n$

と定めればよい

i.e. $\widetilde{K}(S^2)$ における b の係数を求めればよい!

Q. どうやって求めるか?

A. 「S^2 上のベクトル束は連続写像 $\varphi : S^1 \to GL_n(\mathbb{C})$ で決まる」ことを使う



で貼り合わせたもの

$\rightsquigarrow$ S^2 上のベクトル束は $E_\varphi = (CS^1 \times \mathbb{C}^n, \varphi, CS^1 \times \mathbb{C}^n)$

↖ CS^1 上の自明束 $CS^1 \times \mathbb{C}^n$ を $\varphi : S^1 \to GL_n(\mathbb{C})$ で貼り合わせたもの

Ex

$$K(S^2) \cong \tilde{K}(S^2) \oplus \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ [E_\varphi] & \longleftrightarrow & \alpha(E_\varphi)b + \gamma(E_\varphi)[H^0] \end{array}$$

が成り立つことを使って，bの係数 $\alpha(E_\varphi)$ を求めてみる

- $\varphi = \overbrace{\phi_0 \oplus \cdots \oplus \phi_0}^{n}$ $\left(\rightsquigarrow \varphi(z) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}) \right)$

$$\Rightarrow E_\varphi = [H^0 \oplus \cdots \oplus H^0]$$
$$= [H^0] + \cdots + [H^0]$$
$$= n[H^0]$$

$$\Rightarrow \alpha(E_\varphi) = 0, \quad \gamma(E_\varphi) = n$$

- $\varphi = \phi_{-k}$ $\quad (\phi_{-k}(e^{i\theta}) = e^{-ik\theta})$

$$\Rightarrow E_\varphi = H^k \cong H^1 \otimes \cdots \otimes H^1$$

$$\Rightarrow [E_\varphi] = [H^1]^k$$
$$= k\cdot([H^1] - [H^0]) + [H^0]$$
$$= k \cdot b + [H^0]$$

$[H^1]^2 - 2[H^1] + [H^0] = 0$ in $K(S^2)$

$H^1 \otimes H^1 \oplus H^0 \cong H^1 \oplus H^1$

変換関数の計算で求めた関係式

$$\Rightarrow \alpha(E_\varphi) = k, \quad \gamma(E_\varphi) = 1$$

//

$\rightsquigarrow$ 変換関数を詳しく調べることで b の係数が分かる

$\rightsquigarrow$ βの逆写像 $\alpha : \tilde{K}(S^2X) \to \tilde{K}(X)$ を構成できる!!

• Atiyah-Bott による $\alpha : \widetilde{K}(S^2X) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$ の構成

① $S^2 \times X$ 上のベクトル束は $\varphi : S^1 \times X \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ を用いて E_φ の形でかける

$$(z, x) \longmapsto \varphi(z, x)$$

② φ を Laurent 多項式で近似

(Fourier解析における Fejér の定理の一般化)

$$\varphi(z,x) \rightsquigarrow \sum_{k=-m}^{\ell} a_k(x) z^k$$

③ z^m をかけて Laurent 多項式を多項式に変形

$$\varphi(z,x) \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\ell+m} a_{k-\ell} z^k$$

④ 多項式を線形化

(n階線形微分方程式を一階連立微分方程式に変形することのアナロジー)

$$\varphi(z,x) \rightsquigarrow B(x)\begin{pmatrix} z & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z \end{pmatrix} + C(x)$$

$$(A(x), C(x) \in GL_{n'}(\mathbb{C}))$$

⑤ $zI + A$ の形に帰着

$$\varphi(z,x) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} z & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z \end{pmatrix} + A(x)$$

$$(A(x) \in GL_n(\mathbb{C}))$$

(※ 実際の Atiyah-Bott の論文では $B(x)\begin{pmatrix} z & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z \end{pmatrix} + C(X)$ を直接スペクトル分解している)

(有限次元の)線形写像に対する Dunford 積分を使う

⑥ スペクトル分解

$\rightsquigarrow$ $A(x)$ の $|\lambda| < 1$ に対応する固有空間 $V^+(x)$ をファイバーとする X 上のベクトル束 $\alpha(E_\varphi)$ がとれる

⑦ $K(S^2 \times X) \longrightarrow K(X)$

$$[E_\varphi] \longmapsto -[\alpha(E_\varphi)]$$

が

$$\alpha : \widetilde{K}(S^2X) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$$

を誘導する

§ Fredholm作用素の族の指数とAtiyahによる証明

任意のCauchy列が収束先をもつ

内積が定まっている(複素)線形空間であって、その内積から定まるノルムが完備

Fredholm作用素

H :(複素) Hilbert空間とする

⚠ Hilbert空間 ≠ 無限次元線形空間
(有限次元Hilbert空間もあれば、Hilbert空間でない無限次元線形空間もある)

- 線形写像 $T: H \to H$ が有界作用素

$$\overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def} \quad \|T\| := \sup_{0 \neq v \in H} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} < \infty$$

Tによるベクトルの"伸び率"が有界ということ

- $\mathcal{B}(H) := \{T: H \to H \ ; \ 有界作用素\}$ とする

$T, S \in \mathcal{B}(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (T+S)(v) := Tv + Sv \\ (\lambda T)(v) := \lambda Tv \end{cases}$$

で $\mathcal{B}(H)$ は線形空間

$\|T\|$ は $\mathcal{B}(H)$ 上のノルムになる(作用素ノルムという)

- $T \in \mathcal{B}(H)$ に対して

$\mathrm{Ker}(T) := \{v \in H \mid Tv = 0\}$

$\mathrm{Im}(T) := \{w \in H \mid {}^{\exists}v \in H \ \ s.t. \ w = Tv\}$

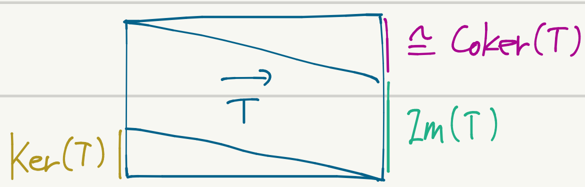
$\mathrm{Coker}(T) := H / \mathrm{Im}(T)$

はいずれも線形空間

Def

$T \in \mathcal{B}(H)$ が Fredholm作用素

$\overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def}$ $\dim(\mathrm{Ker}(T)) < \infty$, $\dim(\mathrm{Coker}(T)) < \infty$



- $\mathrm{Fred}(H) := \{T \in \mathcal{B}(H) : \mathrm{Fredholm}作用素\}$ とかく
- $T \in \mathrm{Fred}(H)$ に対して

$$\mathrm{Index}(T) := \dim(\mathrm{Ker}(T)) - \dim(\mathrm{Coker}(T)) \in \mathbb{Z}$$

を T の指数 (index) という

次元定理 ($\dim H = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$)

(e.g. $\dim H < \infty \Rightarrow {}^{\forall}T \in \mathcal{B}(H)$ は Fredholm であり、$\mathrm{Index}(T) = 0$)

Ex

$$H = \ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ (a_0, a_1, \cdots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}, \quad k \geq 0$$

$$\begin{array}{cccc} S_k : & H & \longrightarrow & H \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (a_0, a_1, \cdots) & \longmapsto & (\underbrace{\overbrace{0, \cdots, 0}^{k}}_{\cong\, \mathrm{Coker}(S_k)}, \underbrace{a_0, a_1, \cdots}_{\mathrm{Im}(S_k)}) \end{array}$$

← シフト作用素という

とすれば S_k は Fredholm 作用素であり,

$$\mathrm{Index}(S_k) = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(S_k))}_{=0} - \underbrace{\dim(\mathrm{Coker}(S_k))}_{=k} = -k$$

//

$$L^2(S^1) := \left\{ f : S^1 \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{S^1} |f(z)|^2 dz < \infty \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \phi_k : & S^1 & \longrightarrow & S^1 \subset \mathbb{C} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & e^{i\theta} & \longmapsto & e^{ik\theta} \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ ${}^{\forall} f \in L^2(S^1)$ は $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \phi_k$ と(一意的に)かける

$$H^2(S^1) := \left\{ f \in L^2(S^1) \;\middle|\; f = \sum_{k \geq 0} \lambda_k \phi_k \right\}$$ ← Hardy 空間という

$$\begin{array}{ccccc} P : & H = L^2(S^1) & \longrightarrow & H^2(S^1) & : 直交射影 とする \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k \phi_k & \longmapsto & \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \phi_k & \end{array}$$

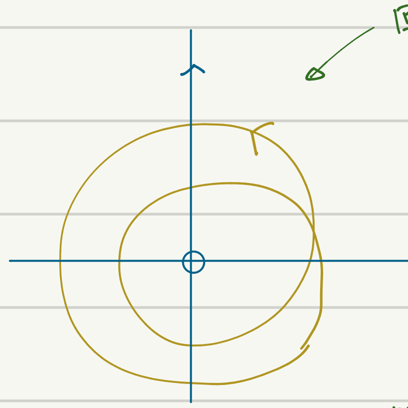
このとき, $f \in C(S^1) := \{ f : S^1 \to \mathbb{C} : 連続 \}$ に対して合成

$$\begin{array}{ccccccc} T_f : & H^2(S^1) & \hookrightarrow & L^2(S^1) & \xrightarrow{M_f} & L^2(S^1) & \xrightarrow{P} H^2(S^1) \\ & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & & & g & \longmapsto & fg & \end{array}$$

← かけ算作用素という

を Toeplitz 作用素という

回転数 = 2



Thm (Toeplitz 作用素の指数定理, Gohberg-Krein, 1960)

$H := H^2(S^1)$, $f \in C(S^1)$ とする

$f(z) \in GL_1(\mathbb{C})$ $(= \mathbb{C} \setminus \{0\})$, ${}^{\forall} z \in S^1$

$\Rightarrow T_f \in \mathrm{Fred}(H)$ であり,

$$\mathrm{Index}(T_f) = -(f \text{の回転数})$$

回転数 $= -k$

e.g. $f(z) = \phi_{-k}(z) = z^{-k}$

$\Rightarrow M_f\left(\sum_{\ell \geq 0} \lambda_\ell z^\ell\right) = \sum_{\ell \geq 0} \lambda_\ell z^{\ell - k}$

$\Rightarrow T_f\left(\sum_{\ell \geq 0} \lambda_\ell z^\ell\right) = \sum_{\ell - k \geq 0} \lambda_\ell z^{\ell - k}$

$\Rightarrow \dim(\underbrace{\mathrm{Ker}(T_f)}_{= \mathrm{span}\{z^0, \cdots, z^{k-1}\}}) = k$, $\dim(\mathrm{Coker}(T_f)) = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Index}(T_f) = k = -(f \text{の回転数})$

Fredholm作用素の族の指数

H : 無限次元 Hilbert 空間
$X = \{x_0\}$: 一点集合　とする

このとき,

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Fred}(H) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \overset{\cong}{\longleftrightarrow} & K(X) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ T & \longmapsto & \mathrm{Index}(T) & \longleftrightarrow & [\mathrm{Ker}(T)] - [\mathrm{Coker}(T)] \end{array}$$

$$\mathrm{Index}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) - \dim(\mathrm{Coker}(T))$$

より, 指数を $K(X)$ の元 とみることができる

⇝ これを任意のコンパクト Hausdorff 空間に一般化する

Def

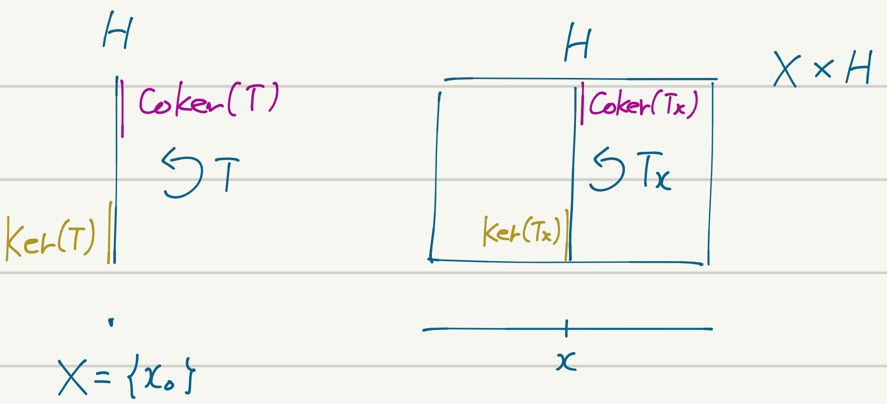
Fredholm作用素の族 といい, $\{T_x\}_{x\in X}$ とかいたりもする

$T : X \to \mathrm{Fred}(H)$: 連続 に対して (Fredholm作用素 が $x \in X$ でパラメトライズされているとみる)

$$\mathrm{Index}(T) := \Big[\bigcup_{x\in X} \mathrm{Ker}(T_x)\Big] - \Big[\bigcup_{x\in X} \mathrm{Coker}(T_x)\Big] \in K(X)$$

を Fredholm作用素の族 T の 指数 という

⚠ 正確にはこの定義は正しくない
($\bigcup \mathrm{Ker}(T_x)$ や $\bigcup \mathrm{Coker}(T_x)$ がベクトル束に
なるとは限らないため)



実はこれは同型になる
(Atiyah-Jänich の定理)

• 族の指数は群準同型

$$\begin{array}{ccc} [X, \mathrm{Fred}(H)] & \longrightarrow & K(X) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ [T] & \longmapsto & \mathrm{Index}(T) \end{array}$$

を定める

Atiyah による Bott 周期性の証明

observation

Atiyah-Bott の証明 : $K(S^2) \cong \tilde{K}(S^2) \oplus \mathbb{Z}$

$$[E_\varphi] \longleftrightarrow \alpha(E_\varphi)\cdot b + \gamma(E_\varphi)\cdot [H^0]$$

この係数を $\varphi : S^1 \to GL_1(\mathbb{C})$ から計算することがポイント

$\varphi = \phi_{-k}$　　上でやった計算

$\Rightarrow [E_\varphi] = k \cdot b + [H^0]$

$\Rightarrow \underline{\alpha(E_\varphi) = k = -(\phi_{-k} \text{の回転数}) = \mathrm{Index}(T_{\phi_k})}$

⇝ 貼り合わせ関数 $\varphi : S^1 \to GL_1(\mathbb{C})$ から定まる Toeplitz作用素 の指数 が 係数を与えている！

⇝ これを $\varphi : S^1 \times X \to GL_n(\mathbb{C})$ に一般化する

Atiyah による $\alpha : \tilde{K}(S^2 X) \to \tilde{K}(X)$ の構成

① $S^2 \times X$ 上の ベクトル束は $\varphi : S^1 \times X \to GL_n(\mathbb{C})$, $(z, x) \mapsto \varphi(z, x)$ を用いて E_φ の形でかける

② $x \in X$ に対して, $f_x(z) : S^1 \to GL_n(\mathbb{C})$, $x \mapsto \varphi(x, z)$ とすると, 合成

$$T_{f_x} : H^2(S^1) \otimes \mathbb{C}^n \hookrightarrow L^2(S^1) \otimes \mathbb{C}^n \xrightarrow{M_{f_x}} L^2(S^1) \otimes \mathbb{C}^n \xrightarrow{P \otimes 1} H^2(S^1)$$

行列のかけ算として作用

より正確には $\mathbb{C}^n$ でなく φ で貼り合わせられる X 上のベクトル束のファイバーとのテンソル積をとる

は $H := H^2(S^1) \otimes \mathbb{C}^n$ 上の Fredholm 作用素となり, 族 $T_\varphi := \{T_{f_x}\}_{x \in X}$ が定まる

③ $K(S^2 \times X) \longrightarrow K(X)$, $[E_\varphi] \longmapsto \mathrm{Index}(T_\varphi)$

が $\alpha : \tilde{K}(S^2 X) \to \tilde{K}(X)$ を誘導する

§ C^*-環のK理論とCuntzによる証明

コンパクトHausdorff

C^*-環 : $B(H)$ や $C(X) := C(X, \mathbb{C})$

C^*-環のK理論 : C^*環 A $\rightsquigarrow$ アーベル群 $K(A)$

X : コンパクトHausdorff $\Rightarrow$ $K(C(X)) \cong K(X)$

$A : C^*$-環 $\Rightarrow$ $SA := A \otimes C_0(\mathbb{R})$: 懸垂

$S^n A := \underbrace{S \cdots S}_{n} A$ $\quad$ $C_0(\mathbb{R})$ "=" $\{ f \in C(S^1) \mid f(1) = 0 \}$

C^*環のK理論におけるBott周期性 : $K(S^2A) \cong K(A)$

CuntzによるBott周期性の証明

Toeplitz作用素 $\quad$ ($C_0(\mathbb{R})$ "$\subset$" $C(S^1)$)

コンパクト作用素全体

① $\mathcal{T}_0 := \{ T_f + K \mid f \in C_0(\mathbb{R}),\ K \in \mathcal{K}(H) \}$

$0 \to \mathcal{K}(H) \to \mathcal{T}_0 \to C_0(\mathbb{R})$: 完全

② 任意のC^*環Aに対して

$0 \to A \otimes \mathcal{K}(H) \to A \otimes \mathcal{T}_0 \to A \otimes C_0(\mathbb{R}) \to 0$: 完全

Atiyahのαの構成

$A = \mathbb{C}$のとき, $f \longmapsto \mathrm{Index}(T_f)$に対応

③ $K(\underbrace{(A \otimes \mathcal{T}_0) \otimes C_0(\mathbb{R})}_{= S(A \otimes \mathcal{T}_0)}) \to K(\underbrace{(A \otimes C_0(\mathbb{R})) \otimes C_0(\mathbb{R})}_{= S^2A}) \xrightarrow{\partial} \underbrace{K(A \otimes \mathcal{K}(H))}_{\cong K(A)} \to K(A \otimes \mathcal{T}_0)$: 完全

④ $K(A \otimes \mathcal{T}_0) = K(S(A \otimes \mathcal{T}_0)) = 0$ を示す

非可換 + "無限次元"

ポイント : • $\mathcal{T}_0$ の性質に帰着

$0 \to J \to A \to B \to 0$: 完全
$\Rightarrow K(J) \to K(A) \to K(B)$: 完全

• $K(A \otimes \mathcal{K}(H)) \cong K(H)$, K : 半完全, K : ホモトピー不変 のみで示せる

$\rightsquigarrow$ K群の"表示"に依らない, 同様の性質をもつ他の関手でも"Bott周期性"が成立

References

- Atiyah, K-theory
- Atiyah, Bott periodicity and the index of elliptic operators, 1968
- Atiyah, Algebraic topology and operators in Hilbert spaces, 1969
- Atiyah-Bott, On the periodicity theorem for complex vector bundles, 1964
- Bott, The periodicity theorem for the classical groups and some of its appliations, 1970
- Cuntz, K-theory and C^*-algebras, 1984