代数的場の理論と Fermi 粒子

Dau(@Dau60028)

すうがく徒のつどい第 6 回 (2024/10/20)

お品書き

本講演の流れ

- 作用素環 (C^* 環・von Neumann 環) を導入し, それに関する基本的事柄を紹介する.
- 作用素環の表現や状態を導入し, 作用素環論による物理の代数的整備の足掛かりとする.
- 準同値や因子環を基にセクターを定義し, それらを用いて物理の代数的整備を行う.

- 特殊相対論を速習し，そして代数的場の理論での局所可観測量に対する要請である AHK 公理系と真空状態を導入する．
- Fermi 場はその反交換関係ゆえ AHK 公理系を充たさないため，Fermi 的物理量は直接観測することはできない．
  実は，代数的場の理論を構成する理論の一つである DHR 解析に於いて，Bose 的可観測量のみの理論から出発して Bose-Fermi 超選択則やスピン・統計の関係を数学的に得られることが知られている．
- DHR 解析に於いて物理的状態を指定する DHR 選択基準や DR 圏を導入する．
- DHR 解析に於いて最重要である DR 再構成定理を紹介する．
- DR 再構成定理に基づき場の代数を構成し，そのセクター構造を述べる．
- 超選択セクターの情報として $\hat{\mathbb{Z}}_2$ に着目すると，Fermi 的物理量が得られる，つまり Fermi 場が構成されることを紹介する．

聴くうえでの留意点

- 講演者は物理屋ゆえ, (特に) 数学的に不正確なことを述べる可能性がある．詳細は参考文献を参照されたい．
- 本講演を聴くうえでそれほど重要でない初出語句等については, その説明を省略する場合がある．
- 本講演では前半に作用素環論を速習するが, 後半で (数理) 物理を論じたいため, 作用素環に関する概念の導入・説明をした後に物理的な補足を述べる場面がある．
- 本講演では数学での主張を Fact, (数理) 物理での主張を Theorem と表記する．これに伴い, 記号を使い分ける場面がある．
- 時間の都合上, Fermi 粒子の解説まで達しない可能性がある．

作用素ノルム位相以外の作用素位相

作用素ノルム $\|\cdot\|$ により与えられる位相は作用素の "拡大能力" のみ着目している.
$\Rightarrow$ 作用素のその他の性質に着目した位相も考えるべきであろう.

$B(\mathcal{H})$: Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素全体の集合.

Definition ((作用素) 弱位相)

各 $A \in B(\mathcal{H})$ と各 $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して, $\omega_{\xi,\eta}(A) := \langle \xi | A\eta \rangle \in \mathbb{C}$ とおく. $B(\mathcal{H})$ 上の全ての半ノルム $|\omega_{\xi,\eta}(\cdot)|$ $(\xi, \eta \in \mathcal{H})$ により与えられる局所凸位相を (作用素) 弱位相という.

他にも (作用素) 強位相, 強 * 位相, σ 弱位相, σ 強位相, そして σ 強 * 位相が知られている.

多元環・ノルム環

Definition (多元環)

$\mathbb{C}$ 上線型空間 $\mathcal{A}$ が**多元環**であるとは，$\mathcal{A}$ に結合的な積 AB が与えられ，それと線型空間の演算が分配法則と結合法則を充たすときをいう．特に，単位元を持つときは**単位的**であるという．また，対合なる全単射 A^* が定義されているときは **$*$ 多元環**という．

Definition (ノルム環・Banach 環)

多元環 $\mathcal{A}$ が**ノルム環**であるとは，$\mathcal{A}$ はノルム空間で，かつ積がノルムに関して劣乗法性：$||AB|| \leq ||A||\ ||B||$ を充たすときをいう．特に，完備な場合を **Banach 環**という．そして，対合を持つノルム環で条件：$||A^*|| = ||A||$ を充たすものを**対合ノルム環**という．特に，完備な対合ノルム環を **Banach* 環**という．

C^* 環

Definition ((抽象的)C^* 環)

Banach* 環 $\mathcal{A}$ が **(抽象的)C^* 環**であるとは, Banach ノルムが C^* ノルム条件 : $||A^*A|| = ||A||^2$ を充たしているときをいう.

Example ($B(\mathcal{H})$)

$B(\mathcal{H})$ は Banach ノルムとして作用素ノルム, 対合として随伴を採ることにより単位的 C^* 環となる.

Example ((具体的)C^* 環)

$B(\mathcal{H})$ の部分 * 環 $\mathcal{M}$ が作用素ノルムについて閉じているとき, $\mathcal{M}$ は C^* 環である. この $\mathcal{M}$ を **(具体的)C^* 環**と呼ぶ.
実は, 任意の抽象的 C^* 環はある具体的 C^* 環と等長同型である (Gel'fand-Naimark の定理).

Cuntz 環

本講演で重要な役割を担う C^* 環を導入する[1].

Definition (Cuntz 環)

$n \geq 2$ とする．次の関係式を充たす $1, S_1, \ldots, S_n$ で生成される単位的 * 環の普遍 C^* 環を Cuntz 環といい，$\mathcal{O}_n$ と記す：

$$S_i^* S_j = \delta_{ij} 1, \quad \sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = 1.$$

上の関係式を充たす各 S_i を Cuntz 等長作用素という．

Fact (Cuntz 環の単純性)

Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ は単純，つまりその閉両側イデアルは自明である．

[1] (ネタバレだが，)Cuntz 環は対称モノイダル C^* 圏の構成にて用いられる．

von Neumann 環

Definition (W^* 環・von Neumann 環)

$B(\mathcal{H})$ の部分 * 環 $\mathcal{M}$ が W^* 環であるとは, $\mathcal{M}$ が作用素の弱位相について閉じているときをいう．そして, W^* 環 $\mathcal{M}$ が恒等作用素 1 を含むとき, $\mathcal{M}$ を von Neumann 環という.

von Neumann 環は, $\mathrm{I_n}$ 型 $(1 \leq n \leq \infty)$, $\mathrm{II_n}$ 型 $(n = 1, \infty)$, III_λ 型 $(0 \leq \lambda \leq 1)$ に分類される.

Definition ((二重) 可換子環)

$\mathcal{M}$ を $B(\mathcal{H})$ の部分集合とする．$\mathcal{M}$ と可換な $B(\mathcal{H})$ の元全体の集合を $\mathcal{M}$ の可換子環といい, $\mathcal{M}'$ と記す．$\mathcal{M}'$ の可換子環 $(\mathcal{M}')'$ を $\mathcal{M}$ の二重可換子環といい, $\mathcal{M}''$ と記す.

次の事実は, 作用素環の弱閉包をとるという解析的操作が作用素の積の交換という代数的操作により記述できることを意味する.

Fact (von Neumann の稠密性定理)

$B(\mathcal{H})$ の部分 * 多元環 $\mathcal{M}$ に対して, 次の三条件は同値である.

1. $\mathcal{M}$ は *von Neumann* 環である.
2. $\mathcal{M}$ は非退化 : $\overline{\mathcal{M}\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ で, かつ σ 強位相で閉じている.
3. $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.

Example ((二重) 可換子環)

$B(\mathcal{H})$ の部分集合の (二重) 可換子環は von Neumann 環である.

Example (von Neumann 環の中心)

von Neumann 環 $\mathcal{M}$ の中心 $Z(\mathcal{M}) := \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ は可換 von Neumann 環である.

- 物理量は可分 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線型作用素で記述される. その全体には和・積なる代数的操作が定義されていて, 結合法則・分配法則が成立する[2](⇒ 物理量全体は多元環).
- 測定値に複素数は登場しないため, 可観測量は自己随伴作用素であることを課す (⇒ 可観測量全体は * 多元環).
- 可観測量の測定値は必ず有限精度で有限値であるため, 可観測量全体を有界作用素の集合に限定して考えるべきである.
- 非有界作用素を考えるのは面倒であるから, 簡単のため, 可観測量とは限らない物理量についても有界作用素であることを要求する[3](⇒ 物理量全体に作用素ノルム位相を入れておく).

⇒ 物理量代数として単位的 C^* 環を想定することから始める (von Neumann 環を考えると便利な場合もある).

[2] cf. J.S.Schwinger, *Quantum Mechanics*, Springer, (2001).

[3] 非有界作用素の扱いを視野に入れた暫定的仮定と捉えるべきである.

表現

Definition (準同型・表現)

Banach 環の間の写像で和・積を保つもの (Banach* 環ならば対合も保存) を**準同型写像**という．Banach 環 $\mathcal{A}$ から $B(\mathcal{H})$ への写像 π が準同型写像であるとき，組 $(\mathcal{H}, \pi)$ を $\mathcal{A}$ の**表現**と呼ぶ．

Definition (既約表現・可約表現)

Banach 環 $\mathcal{A}$ の表現 $(\mathcal{H}, \pi)$ が**既約**であるとは，π の自明でない閉部分空間 $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{H}$ $(\pi(\mathcal{A})\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K})$ が存在しないときをいう．
他方で，表現が既約でないときを**可約**であるという．
Banach* 環 $\mathcal{A}$ の表現 π が既約であることは $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}1$ が成り立つことと同値である．

指標空間と可換 C^* 環

Definition (指標 (空間))

可換 Banach 環 $\mathcal{A}$ の**指標**とは, $\mathcal{A}$ から $\mathbb{C}$ への 0 でない準同型写像のことを指す. 指標全体の成す集合 $\Gamma_{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ の**指標空間**, 或いは**スペクトル**という.

Fact (可換 C^* 環に関する Gel'fand-Naimark の定理)

単位的可換 C^* 環 $\mathcal{A}$ は, あるコンパクト *Hausdorff* 空間 Ω 上の連続関数環 $C(\Omega)$ と等長同型である.

Fact (Gel'fand 同型)

1. $\mathcal{A}$ は $\Gamma_{\mathcal{A}}$ 上の連続関数環 $C(\Gamma_{\mathcal{A}})$ と等長同型である.
2. $\mathcal{A}$ が, あるコンパクト空間 Ω 上の連続関数環 $C(\Omega)$ と同型ならば, Ω は $\Gamma_{\mathcal{A}}$ と同相である.

トレース・状態

Definition (正線型汎関数・トレース)

Banach* 環 $\mathcal{A}$ について, 線型汎関数 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が正であるとは, $\varphi(A^*A) \geq 0$ $(\forall A \in \mathcal{A})$ を充たすときをいう.
特に, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ $(\forall A, B \in \mathcal{A})$ を充たす φ をトレースという.

Definition (状態)

正線型汎関数 $\omega\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が状態であるとは, そのノルムが 1 であるときをいう : $||\omega|| = 1$. $\mathcal{A}$ 上の状態全体を $E_{\mathcal{A}}$ と記す.
特に, Hilbert 空間上の内積により与えられる状態をベクトル状態と呼ぶ.
なお, $\mathcal{A}$ が単位的 C^* 環の場合, ω が状態であることは $||\omega|| = \omega(1_{\mathcal{A}}) = 1$ を充たすことと同値である.

正規状態

ベクトル状態を $\mathcal{H}$ 上の射影作用素：$E = E^2 = E^*$ 全体 $P(\mathcal{H})$ に制限したもの ω について，完全加法性：$\omega(\sum_\lambda E_\lambda) = \sum_\lambda \omega(E_\lambda)$ が成立する（$(E_\lambda) \subseteq P(\mathcal{H})$: 互いに直交する射影作用素の集合）．
$\mathcal{H}$ が可分ならば，非零な直交射影作用素は常に可算個である．

Definition (正規状態)

$B(\mathcal{H})$ 上の状態 ω が正規であるとは，$B(\mathcal{H})$ の正作用素の任意の有界増大ネット (A_λ) が $\omega(\sup A_\lambda) = \sup \omega(A_\lambda)$ を充たすときをいう．

Theorem (Gleason の定理)

$P(\mathcal{H})$ 上の状態 ω が完全加法的ならば，その $B(\mathcal{H})$ への拡張 ϖ は正規である．他方で，$B(\mathcal{H})$ 上の状態が正規ならば，その $P(\mathcal{H})$ への制限は完全加法的である．

Example (密度作用素)

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の正規直交基底を $(\boldsymbol{e}_\lambda)$ とおく．いま，トレース 1 の正作用素 ρ を考える：$\operatorname{tr}\rho := \sum_\lambda \langle \boldsymbol{e}_\lambda | \rho \boldsymbol{e}_\lambda \rangle = 1$．このとき，任意の $A \in B(\mathcal{H})$ に対し $\operatorname{tr}(\rho A) := \sum_\lambda \langle \boldsymbol{e}_\lambda | \rho A \boldsymbol{e}_\lambda \rangle = \sum_\lambda \langle \rho \boldsymbol{e}_\lambda | A \boldsymbol{e}_\lambda \rangle$ は絶対収束し，その値は $(\boldsymbol{e}_\lambda)$ に依存しない．
トレース 1 の正作用素 ρ により定まる $B(\mathcal{H})$ 上の汎関数 $\varphi(A) = \operatorname{tr}(\rho A)$ は $B(\mathcal{H})$ 上の正規状態である．逆に $B(\mathcal{H})$ の任意の正規状態 φ は $\operatorname{tr}(\rho A)$ の形であり，ρ は φ により一意的に定まる．
この ρ を**密度作用素**と呼ぶ．

一般に，**正規状態は密度作用素により与えられる**．
これは，正規状態は von Neumann 環の σ 弱位相について連続な状態としても与えられることを意味する．

純粋状態と混合状態

$\mathcal{A}$ が単位的 C^* 環のとき, $E_\mathcal{A}$ は双対空間 $\mathcal{A}^*$ の単位球の閉部分集合となり, 弱 * 位相についてコンパクトである.
ゆえに Krein-Mil'man の定理より $E_\mathcal{A}$ には端点が必ず存在する.

Definition (純粋状態・混合状態)

単位的 C^* 環 $\mathcal{A}$ について, $\omega \in E_\mathcal{A}$ が $E_\mathcal{A}$ の端点であるとき, ω を純粋状態と呼ぶ. 他方で, 純粋状態でない状態を混合状態と呼ぶ.

次の定理は状態全体に於けるベクトル状態の特徴を述べている.

Theorem ($B(\mathcal{H})$ と純粋状態の関係)

$\mathcal{H}$ のベクトル $\Psi \in \mathcal{H}$ により $\omega(A) = \langle \Psi | A\Psi \rangle$ と与えられるベクトル状態 ω は $B(\mathcal{H})$ の純粋状態である. 逆に, $B(\mathcal{H})$ の正規な純粋状態はそのような状態に限られる.

- 物理の理論は，ある初期条件が与えられた系の実験結果を物理量の期待値により予言する．
$\Rightarrow$ 系に同一の初期条件を与えたうえで個々の物理量を反復測定した際に，その状況下で得られる期待値を対応させる機構 ($=$ 状態) が必要！
- 物理での正規状態は可算個のベクトル状態の混合状態である．
物理でよく使われる状態は正規で純粋なベクトル状態である．
- Gleason の定理の証明にて $\mathcal{H}$ が有限次元 (特に 3 次元) の場合が本質的であり，それに関する主張も Gleason の定理として知られている．

Gel'fand-Naimark-Segal 構成

状態は適当な表現のベクトル状態として記述できる[4].

Fact (GNS 表現構成定理)

C^* 環 $\mathcal{A}$ 上の任意の状態 $\omega \in E_{\mathcal{A}}$ に対し, *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}_\omega$, $\mathcal{H}_\omega$ 上の $\mathcal{A}$ の表現 π_ω, そして単位ベクトル $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ が存在して, 次の二条件を充たす.

1. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し, $\omega(A) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(A) \Omega_\omega \rangle$ と表せる.
2. $\pi_\omega(\mathcal{A})\Omega_\omega$ は $\mathcal{H}_\omega$ の中で稠密である.

上記の二条件を充たす *GNS* 三つ組 $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ はユニタリ同値を除いて一意的に定まる.
$\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega$ をそれぞれ状態 ω に付随する巡回表現空間, 巡回表現, 巡回ベクトルと呼ぶ.

[4] 物理では基底状態を選んで構成することが多い.

具体的な構成手順

1. $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A}$ の左作用 $\pi_l(A)B := AB$ を持つ左 $\mathcal{A}$-加群と捉える.
2. 状態 ω により $\mathcal{A}$ 上の Hermite 内積を $\langle A|B\rangle_\omega := \omega(A^*B)$ と与えると, これは半正定値内積である : $\langle A|A\rangle_\omega \geq 0$.
   $\Rightarrow$Cauchy-Schwarz 不等式より, 部分線型空間 $\mathcal{N}_\omega := \{A \in \mathcal{A} \mid \langle A|A\rangle_\omega = 0\}$ は $\mathcal{A}$ の左イデアルである (状態の Gel'fand イデアル).
3. 商空間 $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ は前 Hilbert 空間 (Hermite 内積はその上で正定値内積) であるから, $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ を完備化することにより Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\omega := \overline{\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega}$ を得る.
4. $\mathcal{A}$ から引き継いだ $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ 上の $\mathcal{A}$ の左作用 π_ω は, その連続性により $\mathcal{H}_\omega$ に拡張できる ($\mathcal{H}_\omega$ 上の巡回表現 π_ω).
5. $1_\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ に対応する $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ の元を Ω_ω と記すと, これが巡回ベクトルとして振る舞うことが証明できる.

GNS 構成の物理的な具体例

量子系：$|\uparrow\rangle := {}^t(1,0) \in \mathbb{C}^2, |\downarrow\rangle := {}^t(0,1) \in \mathbb{C}^2$ なる二準位系 (量子ビット) が n 個並んだ物理系.
a 番目の量子ビットに作用する Pauli 行列 $\sigma_{a,i} \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ を用いて, 物理量代数 $\mathcal{A}_0$ を $\sigma_{a,i}$ の多項式全体と与える $(i = 1,2,3)$.
$n \to \infty$ なる極限に於いて, $\mathcal{A}_0$ を表現する可分な可算無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を構成する[5][4].

量子系のハミルトニアン：$H = -\sum_{k=1}^{n} \sigma_{k,3}$.
H に対する基底状態：$\Omega = \bigotimes_k |\uparrow\rangle$.
前 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0 = \{a\Omega \mid a \in \mathcal{A}_0\}$ を完備化して Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を, 他方で $\mathcal{A}_0$ の弱閉包をとって von Neumann 環 $\mathcal{A}$ を構成する.
この $\mathcal{A}$ は $B(\mathcal{H})$ に一致するため, I_∞ 型 von Neumann 環である.

[5] $\mathcal{H}$ を包含する非可算無限次元 Hilbert 空間については既知であると仮定する.

二つの物理量代数 $\mathcal{A}_l, \mathcal{A}_r$ の互いの元は可換であり，かつそれぞれが作用する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_r$ により全体の Hilbert 空間が $\mathcal{H} = \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{H}_r$ と与えられている状況を考える.

可算無限個の量子ビットから成る量子系を考え，$1, \ldots, N$ までの量子系を記述する Hilbert 空間を $\mathcal{H}_N := \mathcal{H}_{r,N} \otimes \mathcal{H}_{l,N}$ と記す.
k 番目の量子ビットに作用するハミルトニアン H_k により量子系のハミルトニアンを $H = \sum_{k=1}^{\infty} H_k$ と，そして巡回ベクトルを

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{Z_N}} \bigotimes_{k=1}^{N} \sum_{i=1,2} \exp(-\beta E_i/2) \left|i\right\rangle_{k,r} \otimes \left|\bar{i}\right\rangle_{k,l} \in \mathcal{H}_N \ (Z_N := 2^N)$$

と与える (β: 逆温度).
ここで，$\left|i\right\rangle_{k,a}$ はエネルギー E_i の $\mathcal{A}_a$ が作用する k 番目の量子ビットの状態ベクトルである (バーが付されているものは転置した作用素が作用することを意味する).

- $H=0$ のとき
巡回ベクトルは $\Omega = Z_N^{-1/2} \bigotimes_{k=1}^N \mathrm{diag}(1,1)$ である[6].
GNS 構成により得られる $\mathcal{A}$ は II_1 型 von Neumann 環である.
- $H=\sum_{k=1}^\infty H_k$ $(H_k = \mathrm{diag}(0,E))$ のとき
巡回ベクトルは $\Omega = Z_N^{-1/2} \bigotimes_{k=1}^N \mathrm{diag}(1, \exp(-\beta E/2))$ である．ただし, $Z_N = (1+\exp(-\beta E))^N$ である.
GNS 構成により得られる $\mathcal{A}$ は III 型 von Neumann 環である.

上記の例は, 曲がった時空に於ける場の理論に関連している.
I_∞ 型は正規化トレースを持たない：$\mathrm{tr}\,1 = +\infty (\neq 1)$.
II_1 型は正規化トレースを持つ：$\mathrm{tr}\,1 = 1$.
III 型にはトレースがそもそも定義できない.
von Neumann エントロピー $S(\rho) = -\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$ (ρ: 密度作用素) の存在問題は von Neumann 環の種類に関係する[7].

[6] $\mathcal{A}_{r,0}$ は本来 $\mathcal{H}_{r,N}$ に作用する作用素全体を意味するが, これが $\mathcal{H}_N$ に作用していると捉えると約束する.

[7] III 型 von Neumann 環でも相対エントロピーは定義でき, これは冨田-竹崎理論を物理に応用する理由の一つを与えている.

状態と表現の関係

「ある状態が純粋状態か否か」は「状態が状態ベクトルで書けるか否か」と本来無関係！

Theorem (表現による純粋状態の特徴付け)

C^* 環 $\mathcal{A}$ 上の状態 ω と ω に付随する巡回表現 π_ω について，次の四条件は同値である.

1. ω は純粋状態である.
2. 表現 π_ω は既約である.
3. $\pi_\omega(\mathcal{A})' = \mathbb{C}1$.
4. $\mathcal{H}_\omega$ の二つのベクトル $\Psi, \Psi' \in \mathcal{H}_\omega$ が同じベクトル状態を与えるならば，Ψ' は Ψ に比例する：$\Psi' = \lambda\Psi$ $(\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1)$.

物理での「常識」は既約表現を考えるという仮定の下で成立する.

- C^* 環 $\mathcal{A}$ 上の状態 ω が純粋状態であるとき $\pi_\omega(\mathcal{A})'' = B(\mathcal{H}_\omega)$ となるが，これは von Neumann 環 $\overline{\pi_\omega(\mathcal{A})}^w$ に一致する．
$\Rightarrow$「状態が純粋状態であるか否か」は，「表現空間 $\mathcal{H}_\omega$ 上の任意の有界線型作用素が $\pi_\omega(A)$ $(A \in \mathcal{A})$ の "関数" として弱位相の意味で近似できるか否か」に帰着される．
- ω が混合状態のとき，全ての $\pi_\omega(A)$ と可換で非自明な作用素が存在する：$\pi_\omega(\mathcal{A})' \neq \mathbb{C}1$ ため，$\mathcal{H}_\omega$ の中の状態ベクトルを識別できない．
これは，$\pi_\omega(\mathcal{A})'$ の中のユニタリ作用素 $U \neq \lambda 1$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ が存在して，二つの相異なる状態ベクトル $\Omega_\omega, U\Omega_\omega$ が同一の状態 ω を与えることを意味する．
- von Neumann 環は，一つの表現に於ける物理量と状態の双対性を明示した記述形式を提供するため，物理的にも良い概念である．

繋絡作用素と準同値

Definition (繋絡作用素・ユニタリ同値)

Banach 環 $\mathcal{A}$ の二つの表現 $(\mathcal{H}_1, \pi_1), (\mathcal{H}_2, \pi_2)$ について，$U\pi_1(A) = \pi_2(A)U$ $(\forall A \in \mathcal{A})$ を充たす有界線型作用素 $U\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ を**繋絡作用素**と呼ぶ．特に，U がユニタリ作用素であるとき，表現 π_1, π_2 は**ユニタリ同値**であるといい，$\pi_1 \simeq \pi_2$ と記す．他方で，$U = 0$ のみならば，表現 π_1, π_2 は**無縁**であるという．

ユニタリ同値を多重度の違いを無視するように拡張する．

Definition (準同値)

C^* 環 $\mathcal{A}$ の表現 $(\mathcal{H}_1, \pi_1), (\mathcal{H}_2, \pi_2)$ を考える．π_1 と π_2 が**準同値** : $\pi_1 \approx \pi_2$ であるとは，テンソル積 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上に $\tilde{\pi}_1(A) = \pi_1(A) \otimes 1_{\mathcal{H}_2}, \tilde{\pi}_2(A) = 1_{\mathcal{H}_1} \otimes \pi_2(A)$ $(A \in \mathcal{A})$ のように与えられる表現 $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ がユニタリ同値であるときをいう．

既約表現間についてユニタリ同値と準同値は等価であり，同値でなければ無縁である．

Example (準同値だが，ユニタリ同値ではない例)

有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^n$ 上には $\mathrm{Mat}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ なる C^* 環の自然な表現 π_1 が存在する．その k 個の直和 $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_1 \simeq \mathcal{H}_1 \otimes \mathbb{C}^k$,$\pi_2(A) = \pi_1(A) \oplus \cdots \oplus \pi_1(A) \simeq \pi_1(A) \otimes 1_{\mathbb{C}^k}$ は π_1 と準同値だがユニタリ同値ではない．

既約表現を含む，準同値の立場での最小単位的な表現を与える．

Definition (準素表現)

C^* 環の表現 π が準素であるとは，その任意の部分表現が π と準同値であるときをいう．

- 現実の測定では誤差の存在が不可避であり，かつ測定回数は有限回である．
$\Rightarrow$ 測定によりある状態について得られる情報は，真の期待値を中心とし誤差により“幅”を持った領域として記述できる．
- 考えられる領域を全部集めて近傍系を構成する方針により状態全体の集合に位相を入れる (物理的位相)[2].
$\Rightarrow$ 物理的位相から表現の自然な包含関係が誘導される (物理的包含).
- 二つの表現について，一方が他方の物理的包含であり，かつその逆も成り立つとき，二つの表現は物理的同値であるという．これは同値関係を成す．
- 準同値は物理的同値よりも強い同値関係であることが知られている [2].

因子環と因子環分解

Definition (因子環・因子状態)

von Neumann 環 $\mathcal{M}$ が**因子環**であるとは, $\mathcal{M}$ の中心が自明 : $Z(\mathcal{M}) = \mathbb{C}1$ であるときをいう. 例えば, $B(\mathcal{H})$ は因子環である.
状態 $\omega \in E_{\mathcal{A}}$ が**因子状態**であるとは, その巡回表現 π_ω から生成される von Neumann 環 $\pi_\omega(\mathcal{A})''$ が因子環であるときをいう. その全体を $F_{\mathcal{A}}$ と記す.

Fact (因子環表現)

C^* 環 $\mathcal{A}$ の表現 π が準素であることは, 表現が生成する von Neumann 環 $\pi(\mathcal{A})''$ が因子環であることと同値である.
*この π を**因子環表現**と呼ぶ.*

次の事実は von Neumann 環に関する議論は因子環に関するそれに帰着できることを意味する.

Fact (von Neumann 環の直積分分解)

可分 *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の *von Neumann* 環 $\mathcal{M}$ について, 可換子環 $\mathcal{M}'$ の可換部分 *von Neumann* 環を $\mathcal{N}$ を与える.
このとき, 局所コンパクト空間 Ω により与えられる σ 有限測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, *Hilbert* 空間の可測場 $(\mathcal{H}(\omega))_{\omega\in\Omega}$, そして $\mathcal{H}(\omega)$ 上の *von Neumann* 環 $\mathcal{M}(\omega)$ から成る *von Neumann* 環の可測場 $(\mathcal{M}(\omega))_{\omega\in\Omega}$ が存在して, $\mathcal{M}$ は $(\mathcal{M}(\omega))_{\omega\in\Omega}$ の直積分 *(*直和の連続版*)* として表せ, かつ $\mathcal{N}$ は対角作用素の全体になっている :

$$\mathcal{M} = \int_{\Omega}^{\oplus} d\mu(\omega)\ \mathcal{M}(\omega).$$

特に, $\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の中心ならば, $\mathcal{M}$ は因子環の直積分として表せる.
この直積分分解を因子環分解という.

セクター

Definition (セクター)

C^* 環 $\mathcal{A}$ について, $F_{\mathcal{A}}/\approx$ の元を**セクター**という.

Theorem (無縁性とセクター)

$\mathcal{A}$ 上の二つの状態 ω_1, ω_2 が無縁であることは, $\omega = \omega_1 + \omega_2$ に対応する巡回表現 π_ω から生成される *von Neumann* 環の中心 $Z(\pi_\omega(\mathcal{A})'')$ に次の性質 *(*状態の直交性*)* を充たす射影作用素 E が属することと同値である：

$$\omega_1(A) = \langle E\Omega_\omega | \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle\,,\ \omega_2(A) = \langle (1-E)\Omega_\omega | \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle\,.$$

他方で, この ω が因子状態であるとは $\omega_1 \approx \omega_2$ であることと同値である. 以上より, 二つの因子状態が異なるセクターに属するならば, それらは無縁である.

次の定理はセクターの性質の中でも特に重要である[8].

Theorem (セクターによる状態の分解)

“任意の状態はセクターへ分解でき，かつその分解は一意的である.”

Definition (状態の重ね合わせ)

二つの状態 ω_1, ω_2 が**重ね合わせ不可能**であるとは，ω_1, ω_2 を表す状態ベクトル $\Omega_{\omega_1}, \Omega_{\omega_2}$ を含む任意の表現空間に於いて，$\Omega_{\omega_1}, \Omega_{\omega_2}$ の “確率的” な線型結合 $\Omega = \alpha_1 \Omega_{\omega_1} + \alpha_2 \Omega_{\omega_2}$ が単に混合状態 $\omega = |\alpha_1|^2 \omega_1 + |\alpha_2|^2 \omega_2$ を与えるときをいう.

Theorem (セクターの重ね合わせ不可能性)

二つの状態 ω_1, ω_2 が重ね合わせ不可能であることは，それぞれに付属する巡回表現 $\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}$ が無縁であることと同値である.
つまり，相異なるセクターは重ね合わせ可能でない.

[8]主張を正確に述べるには冨田分解定理の説明が必要である.

- 混合状態が常に物理的に意味のある仕方で純粋状態に分解できる保証は一切無い[9].
  ⇒(純粋状態を含むような) “物理的根源状態” を定義すべき！
- 純粋状態を与える既約表現を含む基礎的な表現は準素表現.
  ⇒ 因子状態に着目すればよいだろう.
- 物理的同値な表現を与える状態は同一視すべきである.
  ⇒$F_{\mathcal{A}}$ を準同値で割ればよい.

セクターは “相転移” を伴わないような状態の穏やかな状態変化に対して不変.
⇒ セクターは熱力学的純粋相の一般化！
Q. 非自明な中心は, 物理的には何を意味するか?
A. 環境系： 相異なる純粋相らを確率的に “混ぜる” .
⇒ 混合相 (量子・古典複合系) が得られる!(量子系と観測系の共存)

[9]数学的には, $\mathcal{A}$ の表現 π の既約分解は一般に非可換な可換子環 $\pi(\mathcal{A})'$ の対角化を要求するため, 一意分解性が保証されない.

秩序変数と超選択則

中心の指標 $\chi \in \Gamma_{Z(\pi(\mathcal{A})'')}$ は**秩序変数** (セクターを識別する，巨視的古典物理量) として機能する.
スペクトル $\Gamma_{Z(\pi(\mathcal{A})'')}$ は，秩序変数全体ゆえ**相図**に対応する.

超選択則： 秩序変数を伴う，重ね合わせ可能な超選択セクターへの状態の分解.

Example (陽子と電子の超選択則)

陽子と電子はバリオン数等により古典的に区別可能であるため重ね合わせ不可能である．これは陽子と電子の識別を可能にする適当な物理量 (**超選択電荷** $C \in Z(\pi(\mathcal{A})''))$ の同時対角化に基づく，両者の間の状態遷移を引き起こす可観測量の非存在が原因である.

有限自由度 CCR 系では Stone-von Neumann の一意性定理よりセクターは一つのみである ($\Rightarrow$ **非自明な超選択則は無い**).

代数的場の理論とは何か

- 時空の有界領域上に定義された物理量が充たすべき代数構造を原理として要求する公理論的場の理論の一種.
- 「場の量」全体の成す代数 $\mathfrak{F}$ と「可観測な場の量」全体の成す代数 $\mathfrak{A}$ を区別して議論する：$\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{F}$.
- 1960 年代に R.Haag, D.Kastler, 荒木不二洋らが創始し, 後に頂点作用素代数の誕生に繋がった.
- 長年, 数理物理学者により研究されてきたが, 近年, 一部の理論物理学者らはその知見を利用するようになった[10].

[10] cf. 例えば, [4].

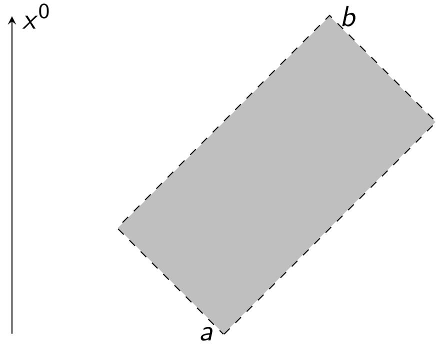
特殊相対論速習

- 時空点 $x = (x^\mu)_{\mu=0,1,2,3} = (x^0, \boldsymbol{x})$ 全体の成す 4 次元実空間 $\mathbb{R}^4$ を Minkowski 時空と呼び, $\mathcal{M}$ と記す.
- 光速度が 1 となる単位系の下で, 次の双一次形式を与える：

$$\eta(x, y) := -x^0 y^0 + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \equiv \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu. \ ((\eta_{\mu\nu}) := \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1))$$

$\eta \equiv (\eta_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ を計量テンソルと呼ぶ.
- 集合 $V_+ := \{x \in \mathcal{M} \mid \eta(x, x) < 0, x^0 > 0\}$ を開未来錐と呼ぶ.
- $\mathcal{M}$ 中の二重錐 $\mathcal{O} := (a + V_+) \cap (b - V_+)$ 全体を $\mathcal{K}$ と記す. ただし, $a \pm V_+ := \{a \pm x \mid x \in V_+\}$ である. $\mathcal{K}$ は, 包含関係 $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ を対象 $\mathcal{O}_1$ から対象 $\mathcal{O}_2$ への射と捉えることにより圏を成す.
- $\mathcal{O}$ と空間的 (：因果的に結ばれない) な時空点の集合を因果的余集合といい, $\mathcal{O}'$ と記す.

二重錐 $\mathcal{O} = (a + V_+) \cap (b - V_+)$ は, 物理的には, 観測者が時空点 $a \in \mathcal{M}$ で観測を開始し, 時空点 $b \in \mathcal{M}$ で観測を終了する際に観測できる領域を表している[11].



[11] Minkowski 時空の部分領域の閉包は, $\eta(\cdot,\cdot)$ により与えると約束する.

Theorem (相対論的因果関係の保存)

全単射 $\kappa\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ が条件：$x - y \in \overline{V}_+ \Leftrightarrow \kappa x - \kappa y \in \overline{V}_+$ を充たすためには，κ が一次変換 $\kappa x = \lambda(\Lambda x + a)$ の形をしていることが必要十分である．
ここで，$\lambda > 0, a \in \mathcal{M}$ であり，そして ${}^t\Lambda\eta\Lambda = \eta$ を充たす 4 次正方行列 $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ $(\Lambda^0{}_0 > 0)$ を用いて $(\Lambda x)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ と与えられる．

- 変換 $x \mapsto \Lambda x$ を Lorentz 変換と呼び，その全体は群を成す．
  物理では $\det\Lambda = +1$ を充たす Lorentz 変換全体 $\mathcal{L}_+^\uparrow$ の成す群 (順時的固有 Lorentz 群) が重要である．
- 変換 $x \mapsto \Lambda x + a$ を Poincaré 変換と呼び，その全体は群を成す．
  物理では $\mathcal{L}_+^\uparrow$ により与えられる Poincaré 変換全体 $\mathcal{P}_+^\uparrow := \mathbb{R}^4 \rtimes \mathcal{L}_+^\uparrow$ の成す群 (順時的固有 Poincaré 群) が重要である．

対称性

対称性 (の存在): 系のある性質に関する検知手段が無いこと.

Definition (対称性の群・不変状態)

群 $\mathcal{G}$ が**対称性の群**であるとは, $\mathcal{G}$ の $\mathfrak{A}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ による実現 $\alpha\colon \mathcal{G} \ni g \mapsto \alpha_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ が存在し, かつ α_g により有界領域上の代数が有界領域上の代数に写像されるときをいう.
状態 ω が対称性の群 $\mathcal{G}$ の下で**不変**であるとは, 任意の $g \in \mathcal{G}, A \in \mathfrak{A}$ について $\omega(\alpha_g A) = \omega(A)$ を充たすときをいう.

Theorem (不変状態と表現)

ω が対称性 $g \in \mathcal{G}$ の不変状態のとき, ω に付随する巡回表現空間 $\mathcal{H}_\omega$ 上のユニタリ作用素 U_g で次の条件を充たすものが存在し, かつ一意的である : $U_g\Omega_\omega = \Omega_\omega, \pi_\omega(\alpha_g A) = U_g \pi_\omega(A) U_g^*$.

局所物理量

可観測量の測定は, 時空の特定の有界領域 $\mathcal{O}$ について行われる.
$\Rightarrow$$\mathcal{O}$ に対する可観測量全体の集合 $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ の割り当て (可観測量の局所ネット $\mathcal{O} \mapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O})$) を考えるべきだろう.

Axiom (荒木-Haag-Kastler 公理系)

1. 単調性 : $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ ならば, $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$.
2. 相対論的共変性 : $g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ について, $\alpha_g \mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}(g\mathcal{O})$.
3. 局所可換性 : $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が空間的ならば, $[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1), \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)] = \{0\}$.
4. 生成条件 : $\bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ は $\mathfrak{A}$ を C^* 環として生成する.

C^* 環の全体を Alg と記す : $\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \in \mathrm{Alg}$ と, これは圏を成す.
量子場 (の測定可能部分) は前余層 $\mathfrak{A} \colon \mathcal{K} \to \mathrm{Alg}$ として了解できる.
相対論的共変性は変換亜群 $\mathcal{P}_+^\uparrow \times \mathcal{K}$ の成す圏 Γ から Alg への関手 $(\mathfrak{A}, \alpha)$ として理解される.

真空状態

真空： 局所摂動についてエネルギー的に安定な状態.

Definition (真空状態)

状態 ω が真空であるとは, 任意の座標系に於いて, その座標系で "エネルギー" を減少させる任意の作用素 $A \in \mathfrak{A}$ について $A \in \ker \omega$ であるときをいう.

Theorem (真空状態と表現)

真空状態 ω について, 次の三条件は同値である. ただし, ω の $\mathcal{P}_+^\uparrow$ 不変性は仮定しない.

1. *von Neumann* 環 $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ は因子環である.
2. $\pi_\omega(\mathfrak{A})$ は既約である.
3. 並進不変なベクトルは Ω_ω に比例する.

物理的状況の記述には, $\mathcal{M}$ 全体にわたる $\mathfrak{A}$ 上の状態を指定するという到底現実的でないことを本来考えなければならない.

Definition (弱加法性)

ω が**弱加法性**を充たすとは, その巡回表現 π_ω と任意の領域 $\mathcal{O}$ について, $\pi_\omega(\mathfrak{A})'' = \left(\bigcup_{x\in\mathcal{M}} \pi_\omega(\mathfrak{A}(x+\mathcal{O}))\right)''$ が成立するときをいう.

Theorem (Reeh-Schlieder の定理)

$\mathcal{P}_+^\uparrow$ 不変な真空状態 ω_0 で弱加法性を充たすものについて, 真空ベクトル Ω_{ω_0} は任意の領域 $\mathcal{O}$ について $\pi_{\omega_0}(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))$ の巡回ベクトルである : $\mathcal{H}_{\omega_0} = \overline{\pi_{\omega_0}(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))\Omega_{\omega_0}} = \overline{\pi_{\omega_0}(\mathfrak{A})\Omega_{\omega_0}}$.
そして, 任意の有界領域 $\mathcal{O}$ について, Ω_{ω_0} は $\pi_{\omega_0}(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))''$ の分離ベクトルである : $A\Omega_{\omega_0} = 0 \Rightarrow A = 0$ $(\forall A \in \pi_{\omega_0}(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))'')$.

Reeh-Schlieder の定理は, 有界領域 $\mathcal{O}$ の物理量を真空ベクトルに作用するだけで任意のベクトルが近似できることを意味している.

Doplicher-Haag-Roberts 解析とは何か

- S.Doplicher-Haag-J.E.Roberts(1969) により創始 [1] され, 1990 年前後に Doplicher-Roberts[3] により数学的に完成された "物理版 Galois 理論" (と言えなくもないもの) である.
- 内部対称性[12]の群 $\mathcal{G}$ について, $\mathcal{G}$ 不変な Bose 場のみから成る $\mathfrak{A}$ から出発した理論から Fermi 場や $\mathcal{G}$ 不変でない量子場を構成することに成功した (場の理論に於ける逆問題！).
  ⇒(自発的に破れないが) 内部対称性の起源を物理的に自然な描像で数学的に解明した.
- DHR 解析を基に, 電磁的電荷・位相的電荷を扱える Buchholtz-Fredenhagen 解析 (1982) や有限温度を扱える荒木-竹崎-Haag-Kastler 解析 (1977) が提唱された.

[12] 場の対称性は, 時空に関するもの (外部対称性) と時空とは無関係なもの (内部対称性・ゲージ対称性) の二種類に大別される : $\alpha_g\mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ $(g \in \mathcal{G}_{\mathrm{int}})$.

DHR 選択基準と DR 圏

場の理論での参照基準状態：真空状態 (が多い).
$\Rightarrow$ 物理的に非自明な事象・状態は真空状況からの励起として了解される (ことが多い).

Q. 真空状況に於いて, 領域 $\mathcal{O}$ に局在した, 物理的に意味のある励起状態[13]を扱うのに適した選択基準は何か？
A.DHR 選択基準.

Definition (DHR 選択基準)

状態 $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$ が DHR 選択基準を充たすとは, その巡回表現 π_ω が空間的遠方で ω_0 の巡回表現 $\pi_0 := \pi_{\omega_0}$ とユニタリ同値であるときをいう：$\pi_\omega \restriction_{\mathfrak{A}((x+\mathcal{O})')} \simeq \pi_0 \restriction_{\mathfrak{A}((x+\mathcal{O})')} \quad (\forall x \in \mathcal{M})$.
これは局在励起の移動可能性を同時に課した場合の定義である.

[13] e.g. 漸近的な意味で有限個の粒子が存在するような状態.

以降, 次の二性質を仮定する.

Definition (Haag の因果的双対性)

任意の $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ について, $\mathfrak{A}(\mathcal{O}')' = \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ が成り立つ.

Definition (性質 B)

$\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}'$ が包含関係 $\overline{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{O}_1$ を充たすとき, $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ の任意の非零の射影作用素 E に対し, $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ の等長作用素 W で, $WW^* = E$ を充たすものが存在する.

Haag の因果的双対性は, 局所ネットが因果的部分順序集合として因果的完備 ($: \mathcal{O}'' = \mathcal{O}$) であるという物理的要請である[14].
性質 B は Borchers(1967) にて提唱された技術的要請であり, III 型因子環ならば成立することが知られている.

[14]DHR 解析に於いて SSB が扱えないのは, これを要請しているためである (要請すると, コンパクト群 $\mathcal{G}$ とそのユニタリ表現の存在が保証される).

Theorem (局在と DHR 選択基準)

自己準同型 $\rho \in \mathrm{End}(\mathfrak{A})$ が $\mathcal{O}$ に台を持つ局在であるとは，任意の $A \in \pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{O}'))$ に対し $\rho(A) = A$ を充たすときをいう．
π_ω が *DHR* 選択基準を充たすことは，$\pi_\omega = \pi_0 \circ \rho$ の成立と同値．

$\mathrm{End}(\mathfrak{A})$ は，対象を $\mathfrak{A}$ の自己準同型写像，射を対象 σ_1 から対象 σ_2 への繋絡作用素 $T \in \mathfrak{A}$ と捉えるとモノイダル C^* 圏[15]を成す．

Definition (DR 圏)

モノイダル C^* 圏の充満部分圏 $\mathcal{T}_{\mathrm{DR}} := \{\rho \in \mathrm{End}(\mathfrak{A}) \mid \pi_0 \circ \rho$ は DHR 選択基準を充たす $\}$ を DR 圏という．

DHR 選択基準は，真空から励起された局在化可能な一般的電荷を持つ物理的状態は，一般的電荷の影響が及ばない空間的遠方では真空状態と同一視できるという自然な要請である．

[15]射の各集合が Banach 空間で，かつ C^* ノルム条件を充たすノルムを備えた圏を C^* 圏という．

淡中-Krein 双対性

Definition (指標 (群))

位相群 G から $\mathbb{T} := \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ への連続準同型 $\chi\colon G \to \mathbb{T}$ を G の**指標**といい，その全体を $\hat{G}$ と記す．$\hat{G}$ は，点毎の演算とコンパクト開位相により位相群を成すため，G の**指標群**と呼ばれる．

Fact (Pontryagin 双対性)

G として局所コンパクト *Hausdorff* 可換位相群を採る．このとき，G と $\hat{\hat{G}}$ は同相である．

Pontryagin 双対性は辰馬-Enock-Schwartz 双対性 (局所コンパクト非可換群) にまで拡張されている．

本講演では淡中-Krein 双対性 (コンパクト非可換群) に注目する．

Pontryagin 双対性での指標： 可換群の既約ユニタリ表現.
$\Rightarrow$ 非可換群についても既約ユニタリ表現を考えるべきだろう . . .
(これは上手くいかない)

コンパクト群 G のユニタリ表現全体 $\mathrm{Rep}(G)$ は圏を成す.
具体的には, 表現圏 $\mathrm{Rep}(G)$ は, 有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\gamma$ に作用するユニタリ作用素 $\gamma(g)$ $(g \in G)$ から成る G の表現 $\gamma \equiv (\mathcal{H}_\gamma, \gamma)$ を対象とし, ある表現 γ_1 から別の表現 γ_2 への繋絡作用素 $T\colon \gamma_1 \to \gamma_2$ を射に持つモノイダル圏 $\mathrm{finHilb}^G$ である[16].

Fact (淡中-Krein 双対性)

コンパクト位相群 G は, 有限次元 *Hilbert* 空間の成す圏 $\mathrm{finHilb}$ を用いた G の表現圏 $\mathrm{Rep}(G) = \mathrm{finHilb}^G$ と圏同値である.

[16] 可換群 G に於いて, $\mathrm{Rep}(G)$ の中の既約表現のみを考えると, モノイダル積が指標の通常の積に帰着するため $\mathrm{Rep}(G) = \hat{G}$ となる.

DR 再構成定理

Theorem (DR 再構成定理)

コンパクト位相群 $\mathcal{G}$ の表現圏 $\mathrm{Rep}(\mathcal{G}) = \mathrm{finHilb}^{\mathcal{G}}$ は，ある条件を充たす対称モノイダル C^* 圏と圏同値である．

[1, 2] に基づいて DR 再構成定理の証明を概観する[17]．

- $\rho \in \mathcal{T}_{\mathrm{DR}}$ に共役 $\bar{\rho}$ が常に存在すると仮定すると，各 ρ について有限値である統計次元なる量 $d(\rho) \equiv d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が定まる ($\Rightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{DR}}$ は有限生成的)．
- $d(\neq 1)$ の最小値を与える $\rho_0 \in \mathcal{T}_{\mathrm{DR}}$ について，その巾乗 ρ_0^n の間の繋絡作用素から生成される * 多元環 $\mathcal{O}_{\rho_0} \subseteq \mathfrak{A}$ を与えると，それは単純 C^* 環である．
- 局所可換性に基づいて $\mathcal{T}_{\mathrm{DR}}$ に於いて置換及び行列式写像を与える．

[17] cf. 詳細は [3].

- 置換・行列式写像より, Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ を用いた埋め込み $\mathcal{O}_d^{SU(d)} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\rho_0}$ が定義される ($\mathcal{A}^G$: $\mathcal{A}$ の G-固定部分環).
- 接合積 $\mathcal{O}_{\rho_0} \otimes_{\mathcal{O}_d^{SU(d)}} \mathcal{O}_d$ を構成する.
- 中心 $Z(\mathcal{O}_{\rho_0} \otimes_{\mathcal{O}_d^{SU(d)}} \mathcal{O}_d)$ のスペクトルを動かさない安定化部分群としてコンパクト Lie 群 $\mathcal{G} \subseteq SU(d)$ を与える.
- ρ_0 は $\mathcal{G}$ の基本表現に対応し, そして同型 $\mathcal{O}_{\rho_0} \simeq \mathcal{O}_d^{\mathcal{G}}$ が成立することが示される ($\Rightarrow$ 埋め込み $\mu\colon \mathcal{O}_d^{\mathcal{G}} \hookrightarrow \mathfrak{A}$ が定まる).
- Hilbert 空間と有界作用素の成す圏 Hilb の中に DR 圏 $\mathcal{T}_{\mathrm{DR}}$ を埋め込むモノイダル C^* 関手 $V\colon \mathcal{T}_{\mathrm{DR}} \hookrightarrow \mathrm{Hilb}$ が定まる.
- V から V 自身へのユニタリな自然変換でモノイダル積を保つもの $g = (g_\rho)_{\rho \in \mathcal{T}_{\mathrm{DR}}}\colon V \to V$ の成す群を $\mathrm{End}_\otimes(V)$ と記す.
- 実は $\mathcal{G} = \mathrm{End}_\otimes(V)$ であり, 淡中-Krein 双対性より圏同値 $\mathcal{T}_{\mathrm{DR}} \simeq \mathrm{Rep}(\mathcal{G})$ が言える.

この圏同値は, 物理的には, 局在励起 $\rho \in \mathrm{ob}(\mathcal{T}_{\mathrm{DR}})$ を識別する超選択電荷 (量子数) はある群 $\mathcal{G}$ の表現 $\gamma \in \mathrm{ob}(\mathrm{Rep}(\mathcal{G}))$ により与えられることを意味する.

統計因子

DR 再構成法：DHR 選択基準を充たす $\mathfrak{A}$ 上の物理的状態の集まりについて超選択セクターに分類することで $\mathfrak{F}$ の記述を構成.
⇒Lie 群の基本表現とそのテンソル積表現の既約分解を, 圏 $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$(或いはその部分圏である DR 圏 $\mathcal{T}_{\mathrm{DR}}$) を用いて実行することに対応すると解釈できる.

Q.Lie 群の既約表現の構成に於ける Weyl 群[18]に対応するものは何か？
A. 局所ネットの局所可換性に由来する統計因子 $\varepsilon(\rho_1, \rho_2)$.

統計因子の分析により, $\mathcal{G}$ の中には $k^2 = 1$ を充たし $\mathbb{Z}_2 = \{1, k\} \subseteq \mathcal{G}$ となる元 k が存在することが示される.

[18] コンパクト Lie 群の可約なテンソル積表現を既約分解する際, 表現の可換子環を Schur-Weyl 双対性に基づいて同定し, テンソル因子間に作用する Weyl 群の表現を既約分解することが肝要である.

場の代数の構成

- 統計因子により Weyl 群と Schur-Weyl 双対性の部分を用意し，その解析により基本表現の次元 $d(\rho_0)$ を与える．
- d 次元内積空間の代数化としての Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ により基本表現のテンソル積表現が与えられ，ρ_0 をテンソル代数化した環 $\mathcal{O}_{\rho_0}$ を $\mathcal{O}_d$ に埋め込む．
- 内部対称性の群を $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathcal{O}_d/\mathcal{O}_{\rho_0})$ と与える[19]．

このとき，埋め込みに関する図式からの "押し出し" として場の代数 $\mathfrak{F} = \mathfrak{A} \otimes_{\mathcal{O}_d^{\mathcal{G}}} \mathcal{O}_d$ を構成する：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\rho_0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_d \arrow[d] \\
\mathfrak{A} \arrow[r] & \mathfrak{F}
\end{tikzcd}.$$

[19] $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ について，$\mathrm{Gal}(\mathcal{A}/\mathcal{B}) := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \mid \alpha(B) = B\ (\forall B \in \mathcal{B})\}$．

Q.$\mathfrak{F} = \mathfrak{A} \otimes_{\mathcal{O}_d^{\mathcal{G}}} \mathcal{O}_d$ の物理的意味は何か？
A. 量子場 $\mathfrak{F}$ を，外部対称性に依存する部分 $\mathfrak{A}$ と内部対称性に依存する部分 $\mathcal{O}_d$ とに分離した表示である．

$A \in \mathfrak{A}$ について $\rho_0(A) := \sum_{i=1}^{d} S_i A S_i^*$ は $\mathcal{O}_d$ 或いは $\mathfrak{A}$ の自己準同型を与える．
$\mathrm{span}(S_i)_{i=1,\ldots,d}$ は

$$H_{\rho_0} := \{S \in \mathfrak{F} \mid SA = \rho_0(A)S \ (\forall A \in \mathfrak{A})\},$$

$$g(S_i) \equiv \alpha_g(S_i) = \sum_{j=1}^{d} S_j \gamma_0(g)_{ji}$$

により $\mathfrak{F}$ に埋め込まれる，$\mathcal{G}$ の基本表現 γ_0 を与える有限次元 Hilbert 空間である (Hilbert spaces in an algebra).

セクター構造

$\mathfrak{F}$ の既約表現 $(\mathcal{H}, \pi)$ の構造を検討する.
$\mathcal{H}$ に於ける $\mathfrak{F}$ の表現を $\mathfrak{A}$ に制限すると, $\mathfrak{A}$ の真空既約表現 $(\mathcal{H}_0, \pi_0)$ は $\mathcal{G}$ 不変で, かつ $\mathfrak{F}$ の作用で巡回的 : $\overline{\pi(\mathfrak{F})\mathcal{H}_0} = \mathcal{H}$ な部分空間として $\mathcal{H}$ に含まれている.
$\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^{\mathcal{G}}$ の表現 $(\mathcal{H}, \pi\restriction_{\mathfrak{A}})$ は次のように既約分解される[20]:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \hat{\mathcal{G}}} (\mathcal{H}_\gamma \otimes V_\gamma), \ \ \pi(\mathfrak{A}) = \bigoplus_{\gamma \in \hat{\mathcal{G}}} (\pi_\gamma(\mathfrak{A}) \otimes 1_{V_\gamma}),$$

$$U(\mathcal{G}) = \bigoplus_{\gamma \in \hat{\mathcal{G}}} (1_{\mathcal{H}_\gamma} \otimes \gamma(\mathcal{G})). \ \ (\mathcal{G}\text{の}\mathcal{H}\text{に於けるユニタリ表現})$$

全ての $(\mathcal{H}_\gamma, \pi_\gamma)$ は, $\mathfrak{A}$ の互いに無縁な因子表現として超選択セクターを与える.

[20] $(V_\gamma, \gamma) \in \hat{\mathcal{G}}$ は, $\mathcal{G}$ の既約ユニタリ表現の同値類である.

von Neumann 環 $\pi(\mathfrak{A})''$ とその中心 $Z(\pi(\mathfrak{A})'')$ は次のようになる：

$$\pi(\mathfrak{A})'' = \bigoplus_{\gamma\in\hat{G}} (\pi_\gamma(\mathfrak{A})'' \otimes 1_{V_\gamma}) = U(\mathcal{G})',$$

$$U(\mathcal{G})'' = \bigoplus_{\gamma\in\hat{\mathcal{G}}} (1_{\mathcal{H}_\gamma} \otimes \gamma(\mathcal{G})'') = \pi(\mathfrak{A})',$$

$$Z(\pi(\mathfrak{A})'') = Z(U(\mathcal{G})'') = \bigoplus_{\gamma\in\hat{\mathcal{G}}} \mathbb{C}(1_{\mathcal{H}_\gamma} \otimes 1_{V_\gamma}) \simeq l^\infty(\hat{\mathcal{G}}).$$

これは, 物理的には, セクターを指定する秩序変数が $\hat{\mathcal{G}} = \Gamma_{Z(\pi(\mathfrak{A})'')}$ 上の関数 $(f_\gamma)_{\gamma\in\hat{\mathcal{G}}}$ により与えられることを意味する. この古典物理量 $Z(\pi(\mathfrak{A})'')$ は $\mathcal{G}$-不変量として異なる $\mathcal{G}$-表現を担う各セクターを識別する[21].

[21] Lie 環論に於ける Casimir 不変量と同様の役割を担っていると了解できる.

Bose-Fermi 超選択則

超選択セクターの情報として $\hat{\mathbb{Z}}_2(\simeq \mathbb{Z}_2)$ に着目してみる.

$\mathfrak{F}$ のうち $k=+1$ により特徴付けられるものを $\mathfrak{F}_+ = \mathfrak{F}^{\mathbb{Z}_2}$ と, 他方で $k=-1$ により特徴付けられるものを $\mathfrak{F}_-$ と記す.
Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_+) = \mathbb{Z}_2$ を持つような $\mathfrak{F}_+$ の Galois 拡大 $\mathfrak{F}$ は, 接合積[22] $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_+ \rtimes \hat{\mathbb{Z}}_2$ により与えられる.
このとき, $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ は空間的として

$$F \in \mathfrak{F}_\pm \Rightarrow \zeta(F) = \pm F, \quad (\zeta\colon \mathfrak{F}\text{への}\mathbb{Z}_2\text{作用})$$
$$\mathfrak{F}_\pm \mathfrak{F}_\pm \subseteq \mathfrak{F}_+, \quad \mathfrak{F}_\pm \mathfrak{F}_\mp \subseteq \mathfrak{F}_-,$$
$$[\mathfrak{F}_+(\mathcal{O}_1), \mathfrak{F}_\pm(\mathcal{O}_2)] = \{0\}, \ \{\mathfrak{F}_-(\mathcal{O}_1), \mathfrak{F}_-(\mathcal{O}_2)\} = \{0\}$$

が示される！ ($\mathfrak{F}_+$: Bose 場, $\mathfrak{F}_-$: Fermi 場)

[22] $\hat{\mathbb{Z}}_2$ 上の $\mathfrak{F}_+$ 値写像に, 畳み込みにより積を与えたものを指す.

DHR 解析の構造

Galois 理論

- K: 代数方程式の係数体 (与えられた情報).
- L: K の拡大体 (係数体に解を添加して得た Galois 拡大).
- 代数方程式 : K と L とを結びつける情報.
- G: Galois 群 (K, L により定まる).

DHR 解析

- $\mathfrak{A}$: 可観測量の局所ネット (観測可能な情報).
- $\mathfrak{F}$: 場の代数 ($\mathfrak{A}$ の Galois 拡大).
- DHR 選択基準 : $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}$ とを結びつける情報 ($\mathfrak{A}$ 上の物理的状態を決める).
- $\mathcal{G}$: Galois 群 ($\mathfrak{A}, \mathfrak{F}$ により定まる内部対称性の群).

DR 再構成法 : $\mathcal{G}$ とそれが作用する $\mathfrak{F}$ を, $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^{\mathcal{G}}$ と $\mathfrak{A}$ 上の物理的状態のみから再構成する手法.

参考文献

- 小嶋泉,『量子場とミクロ・マクロ双対性』, 丸善出版, (2013);『セクター理論と Cuntz 環』, 数理解析研究所講究録 1333 (2003) pp.130-140.
- 小嶋泉-岡村和弥,『無限量子系の物理と数理』, サイエンス社, (2013).
- S.Doplicher-J.E.Roberts, *A new duality theory for compact groups*, Inventiones Math.**98**, 157-218, (1989);*Endomorphism of C^* algebras, cross products and duality for compact groups*, Ann.Math.**130**, 75-119, (1989);*Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics*, Comm.Math.Phys.**131**, 51-107, (1990).

- S.Doplicher-R.Haag-J.E.Roberts,*Fields, observables and gauge transformations*, I& II, Comm.Math.Phys.**13**,1-23(1969);**15**,173-200(1969);*Local observables and particle statistics*, I& II, **23**,199-230(1971)& **35**, 49-85(1974).
- 荒木不二洋,『量子場の数理』, 岩波書店, (1993).
- R.Haag,*Local Quantum Physics*(second revised and enlarged edition), Springer-Verlag, (1996).
- E.Witten, [arXiv:2112.11614[hep-th]].
- 生西明夫-中神祥臣,『作用素環入門 I』『作用素環入門 II』, 岩波書店, (2007).
- 野澤剛史,*A stability of the crossed product by Cuntz algebra*, 数理解析研究所講究録 1333(2003) pp.122-129.

補遺：接合積について

説明の都合上, 用いる例として $\mathfrak{F}$ を扱う.

[線型構造について]
次の埋め込みに関する図式を可換にするものとして $\mathfrak{F}$ を与える.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_d^{\mathcal{G}} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{O}_d \arrow[d] \\
\mathfrak{A} \arrow[r] & \mathfrak{F}
\end{tikzcd} .$$

[積構造について]
Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ の自然な自己準同型 $\sigma \in \mathrm{End}(\mathcal{O}_d)$ を
$\sigma(C) := \sum_{j=1}^{d} S_j C S_j^*$ $(C \in \mathcal{O}_d)$ と与える.
このとき, 埋め込み $\mu \colon \mathcal{O}_d^{\mathcal{G}} \hookrightarrow \mathfrak{A}$ が $\mu \circ \sigma = \rho \circ \mu$ を充たすことを利用して

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \otimes_{\mathcal{O}_d^{\mathcal{G}}} S_{i_1} \cdots S_{i_r} S_{j_1}^* \cdots S_{j_s}^*)(A_2 \otimes_{\mathcal{O}_d^{\mathcal{G}}} C) \\
&:= [(-1)^{d-1} d^{1/2}]^s A_1 \rho^r (\underbrace{R^* \rho^{d-1} (\cdots (R^* \rho^{d-1}}_{s} (A_2)) \cdots) \\
&\qquad \otimes_{\mathcal{O}_d^{\mathcal{G}}} S_{i_1} \cdots S_{i_r} \hat{S}_{j_1} \cdots \hat{S}_{j_s} C. \quad (A_i \in \mathfrak{A}, S_i \in \mathcal{O}_d)
\end{aligned}
$$

ただし, $\mathbb{P}_d(i)$ を $\{1, \ldots, d\}$ の置換 p のうち $p(1) = i$ となる部分集合として

$$\hat{S}_i := \frac{1}{\sqrt{(d-1)!}} \sum_{p \in \mathbb{P}_d(i)} \mathrm{sgn}(p) S_{p(2)} \cdots S_{p(d)},$$

$$R := d^{-1/2} \mu \left(\sum_{i=1}^{d} S_i \hat{S}_i \right) \in \mathcal{T}_{\mathrm{DR}}(\iota, \rho^d). \quad (\iota : \mathcal{G}\text{の自明表現})$$

以上の構成より, 全ての $\mathcal{G}$ 表現が $\mathfrak{F}$ に含まれることが保証される.