非線形シュレーディンガー方程式超入門、あと私の研究とか

雑魚 PDE マン

$\mathbb{X}$(旧 Twitter) の ID：`kuzu_zacho`

本講演の前半では、調和解析・関数解析の道具を用いた非線形シュレーディンガー方程式

$$i\partial_t u = -\Delta u + f(u), \quad u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \to \mathbb{C} \tag{NLS}$$

の研究がどんな雰囲気なのか伝えることを目指す。特に、ストリッカーツ評価

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L_t^p L_x^q} \leq C\|u_0\|_{L_x^2} \tag{Stri}$$

と、その応用に焦点を当てる。予備知識としては、$L^p(\mathbb{R}^d)$ 空間やフーリエ変換に馴染みがあることが望ましいが、なるべく講演中に知識を補うよう努めるつもりである。また、細かい計算や厳密な正当化の話はほとんどしないので、何も知らない学部生が聞いてもちんぷんかんぷんにはならないと思う（し、そうであるように努めるつもりである）。

後半では、前半で話したこととの繋がりを意識しながら、私が修士課程の後半から現在まで続けている研究（の一部）について解説する。予備知識として、ヒルベルト空間上の関数解析の基礎事項（スペクトル分解定理など）がある程度分かっている方が望ましいが、なるべく講演中に知識を補うよう努めるつもりである。私は、(NLS) の無限連立系への拡張

$$i\partial_t u_n = -\Delta u_n + f(u_n), \quad u_n : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \to \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{SNLS}$$

に興味をもって研究してきた。この問題を考えるには、ストリッカーツ評価 (Stri) の正規直交系への拡張

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n |e^{it\Delta}u_n|^2 \right\|_{L_t^{p/2} L_x^{q/2}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{SStri}$$

が重要な役割を果たすのだが、そのあたりの雰囲気を伝えることを目指す。

（注意）この講演は「非線形シュレーディンガー方程式超入門」を謳ってはいますが、講演者はただの学生であり、信頼できる数学者では全くありません。この分野に興味がある人は、次のような参考文献を読むのが良いと思います。

- Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations.*　行間が過度に広くはなく厳密だという意味では丁寧で分かりやすいですが、かなり一般的な設定で議論しているという意味では読みづらいです。

- Linares–Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations, 2nd ed.*　行間が広く誤植も多いという意味では読みづらいですが、一般的な設定での議論を避けて重要な具体例に焦点を当てているという意味では気持ちが伝わってきやすいです。演習問題も多くて勉強になります。

- Tao, *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis.*　テレンス・タオが非線形分散型方程式の「心」をとても饒舌に語っている本だなという印象です。この本の自主ゼミをしてくれる人を募集しています（興味がある方は Twitter で DM ください）。

- Koch–Tataru–Vişan, *Dispersive Equations and Nonlinear Waves: Generalized Korteweg–de Vries, Nonlinear Schroedinger, Wave and Schroedinger Maps*　ハイレベルな内容なので初手でこの本を読むのは難しいかもしれませんが、チャレンジするのも良いかもしれません。