

# 速習！ 第一不完全性定理

いことんど

2024 年 10 月 18 日

数学の分野の一つに数理論理学という分野があり、その中に算術という分野がある。算術は「我々の自然数論の中での議論」を数学的対象とする分野である。例えば群論が群を対象として議論するために群の公理を定めるように、算術でも「我々の自然数論の中での議論」を公理化する。その一つが PA (Peano arithmetic) である。PA は簡単に言うと高校までの自然数論 (足し算, 掛け算, 数の大小, 数学的帰納法) を形式化した公理系で、自然数論の形式化のうちで最も有名な公理系の一つである。

本講演では、算術における大きな成果である、Gödel-Rosser の第一不完全性定理の証明を概説する。入門枠での講演の予定で、特に[募集要項#入門枠について](#)にあるところの「有名な定理を少ない前提知識から解説する講演」であることを目指す。本講演で扱う定理は

## 定理: 第一不完全性定理

任意の無矛盾な PA の r.e. 拡大理論  $T$  に対して、ある論理式  $G$  が取れて、 $G$  は  $T$  で証明も反証もできない。

である。また不完全性定理は、数理論理学以外の文脈で誤解、誤用をされることが多い定理である [2]。そこで、時間に余裕があれば、第一不完全性定理が述べていることを [3] を参考に、より詳しく説明する。<sup>\*1</sup> この講演を通じて、不完全性定理の正しい理解に近づいて頂ければ幸いである。

大学数学の推論、特に「すべての  $\bigcirc\bigcirc$  に対して...

## 参考文献

- [1] 田中一之 他, 『ゲーデルと 20 世紀の論理学 3 不完全性定理と算術の体系』, 東京大学出版会, 2007
- [2] Wikipedia, [ゲーデルの不完全性定理 #誤解 \(哲学等による誤解・誤用\)](#)
- [3] トルケル・フランセーン 著, 田中一之 訳, 『ゲーデルの定理 利用と誤用の不完全ガイド』, みすず書房, 2011

<sup>\*1</sup> 2024 年 10 月 18 日追記.