Bott 周期性と K 理論

扇はじめ（@Esquisse1102）

1957 年，Bott は無限ユニタリー群のホモトピー群が周期的に振る舞うという，現在 Bott 周期性と呼ばれる現象を発見した．一般にホモロジー群と比べてホモトピー群の計算は難しく，現在に至るまで球面のホモトピー群ですら完全に決定できていない状況を鑑みれば，Bott の結果が当時の数学界に与えた衝撃は相当なものであったと思われる．

一方，1959 年に Atiyah と Hirzebruch は Grothendieck による Hirzebruch-Riemann-Roch の定理の一般化に触発される形で，可微分多様体に対する Grothendieck-Riemann-Roch の定理の類似を証明した．その定式化において現在位相的 K 群と呼ばれるベクトル束を用いた位相不変量が導入されたが，Atiyah と Hirzebruch は続く 1961 年の論文において，上述の Bott 周期性を用いることで，この K 群を（一般）コホモロジー理論へと発展させた．これが位相的 K 理論の始まりである．

最初期において，Bott 周期性は位相的 K 理論を定義するための基礎であったが，逆に位相的 K 理論の言葉で Bott 周期性を言い換えることができるということも認識されていた．そのような背景の中で，1964 年に Atiyah と Bott は K 理論の枠組みにおける Bott 周期性の“初等的”証明を与えた．さらに 1967 年，Atiyah は当時研究していた楕円型作用素に対する洞察から Fredholm 作用素の族の指数を用いた Bott 周期性の証明を与え，位相的 K 理論と Bott 周期性が関数解析と深く結びついていることを明らかにした．

以上は謂わばトポロジーの側から見た関数解析との繋がりであるが，一方で位相的 K 理論の発展や Bott 周期性に対する理解の深化は別の形でも関数解析と深く結びついている．位相的 K 群はベクトル束を用いて定義されるが，Serre-Swan 双対性から位相的 K 群を関数環上の有限生成射影加群を用いて定義することもできる．そしてこの有限生成射影加群を用いた定義を使うことで，行列環や Hilbert 空間上の有界線形作用素全体といった非可換な環に対しても K 群を定義することができる．特に C^* 環と呼ばれるクラスの（非可換）環に対しては，位相空間の場合における“初等的”証明を援用することで，Bott 周期性が成り立つことが証明でき，位相空間のときと同様にして C^* 環に対するホモロジー理論を構築することができる．

関数環は C^* 環であるので，この C^* 環に対する K 理論はある意味で位相的 K 理論の一般化ともみなせるが，1986 年，Cuntz はこの C^* 環の枠組みにおいて新たな Bott 周期性定理の証明を与えた．その証明は Toeplitz 環という本質的に非可換かつ無限次元の対象を用いており，さらに K 理論の具体的構成に依らないというものであった．これは Bott 周期性が C^* 環上のある関手の持つ性質として捉えられることを意味し，Bott 周期性と関数解析の結びつきの別の側面を表している．

本講演では，Bott 周期性と K 理論を軸として，上記のようなトポロジーと関数解析の繋がりの一端を紹介したい．