

# 双曲幾何の世界の三角比の公式たち

山中 正和

2024年3月31日

# 双曲幾何のモデル I

双曲幾何のモデルを3つ紹介する.

## 定義 (双曲平面モデル)

3次元ベクトル空間  $\mathbb{R}^3$  に次のように内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を入れたものをミンコフスキー空間  $\mathbb{E}^{2,1}$  とよぶ.

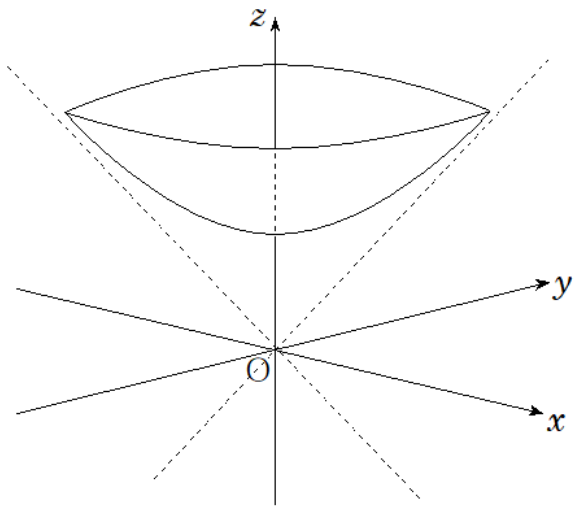
$$\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3$$

なお、双曲幾何のモデルとしては

$$\mathbb{M} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^{2,1} \mid \langle (x, y, z), (x, y, z) \rangle = -1, z > 0 \}$$

を考え、これを双曲平面モデルとよぶ.

## 双曲幾何のモデル II



## 定義 (双曲三角関数)

ネイピア数を  $e$  とする. このとき, 双曲三角関数を以下のように定める.

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

この定義より, 例えば以下のような三角関数に類似したさまざまな公式が導かれる.

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $\sinh 2x = 2 \cosh x \sinh x$

## 双曲幾何のモデル IV

- $\mathbb{M}$  でベクトル  $x$  を出発して  $t = 0$  における速度ベクトルが長さ 1 の接ベクトル  $v$  であるような測地線は

$$\gamma(t) = x \cosh t + v \sinh t$$

で与えられる.

これは,  $\gamma''(t) = \gamma(t)$  などから確認できる.

また,  $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = -1$  の両辺を微分することにより,

$\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$  が成り立つので,  $\gamma(t)$  と接ベクトルは直交する. よって,  $\langle x, v \rangle = 0$  がなりたつ.

- 測地線は, 原点を通る平面と  $\mathbb{M}$  の共通部分となっている (証明は省略).

## 双曲幾何のモデル V

- $M$  上の 2 点  $P, Q$  に対して, これらの点を通る測地線  $\gamma(t)$  をとり  $P, Q$  の位置ベクトルが, それぞれ,  $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$  となるとき, 2 点  $P, Q$  の距離を  $d(P, Q)$  とすると, 上の測地線の長さを計算することによって,  
$$d(P, Q) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\cosh^2 t - \sinh^2 t} dt$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1 \text{ となる. よって,}$$

$$d(P, Q) = |t_1 - t_2|$$

と定義することができる.

- $P$  と  $Q$  を通る測地線で,  $PQ$  の長さが  $c$  であるとき,  $P$  の位置ベクトルを  $x$ ,  $Q$  の位置ベクトルを  $y$  とすると,

$$y = x \cosh c + v \sinh c$$

と表すことができる.

## 定義 (ポアンカレ円板モデル)

$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  に計量

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

を入れたものをポアンカレ円板モデルとよぶ。

- 双曲平面モデル  $\mathbb{M}$  の各点と点  $(0, 0, -1)$  を結んだ直線と  $xy$  平面の交点を考えることにより，双曲面上の点を  $\mathbb{D}$  に写すことができ，この写像により，計量が誘導される。
- $\mathbb{D}$  において“直線”とは，円  $x^2 + y^2 = 1$  に直交する円または原点を通る直線と  $\mathbb{D}$  の共通部分となる。

### 定義 (上半平面モデル)

$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  に計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

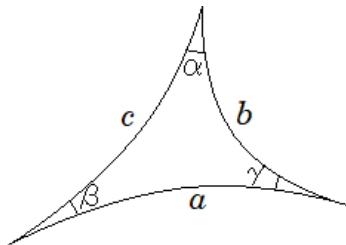
を入れたものを上半平面モデルとよぶ.

- $\mathbb{H}$  において“直線”とは,  $x$  軸に直交する円または直線と  $\mathbb{H}$  の共通部分となる.
- $xy$  平面を複素数平面と同一視して考えると,  $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$  (ケーリー変換) は  $\mathbb{H}$  から  $\mathbb{D}$  への写像を定め, 等長写像となっている.
- 一次分数変換は等角写像なので, ケーリー変換は  $\mathbb{H}$  の“直線”を  $\mathbb{D}$  の“直線”に写す.



# 双曲三角法の公式 I

以下、双曲三角形において次のように辺の長さや角度を考えるものとする。



定理 (正弦定理)

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

### 定理 (余弦定理)

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

### 定理 (第2余弦定理)

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

### 系 (双曲三角形の合同条件)

双曲三角形の合同条件には、次のようなものがある。

- ① 3辺相等
- ② 2辺夾角相等
- ③ 2角夾辺相等
- ④ 3角相等

## 系 (直角双曲三角形の場合)

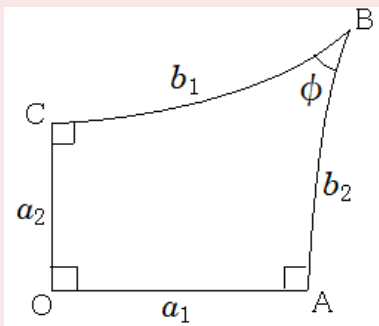
$\gamma = \frac{\pi}{2}$  としたとき,

- $\sinh a = \sinh c \sin \alpha$
- $\cos \alpha = \cosh a \sin \beta$
- $\cosh c = \cosh a \cosh b$  (双曲ピタゴラスの定理)

が成り立つ.

## 双曲三角法の公式 IV

### 定理 (ランバートの四角形)

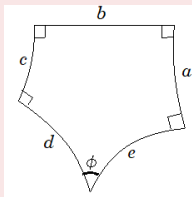


- $\cos \phi = \sinh a_1 \sinh a_2$
- $\cosh a_1 = \cosh b_1 \sin \phi$

## 双曲三角法の公式 V

定理 (4つの内角が直角である双曲5角形の場合)

図のように定めると次の式が成り立つ。



$$\cosh a \cosh c + \cos \phi = \sinh a \cosh b \sinh c$$

また,  $\phi = \frac{\pi}{2}$  ならば,

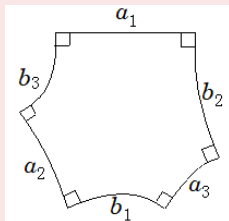
- $\tanh a \cosh b \tanh c = 1$
- $\sinh a \sinh b = \cosh d$

が成り立つ。

## 双曲三角法の公式 VI

### 定理 (直角双曲 6 角形)

次のように直角双曲 6 角形を考える.



- 直角双曲 6 角形の正弦定理  $\frac{\sinh a_1}{\sinh b_1} = \frac{\sinh a_2}{\sinh b_2} = \frac{\sinh a_3}{\sinh b_3}$
- 直角双曲 6 角形の余弦定理  $\cosh b_1 = \frac{\cosh a_1 + \cosh a_2 \cosh a_3}{\sinh a_2 \sinh a_3}$

が成り立つ.

# ポアンカレ円板モデルによる証明 I

以下、複素数平面の中で考える. ポアンカレ円板モデルの双曲計量は

$$d\lambda_z = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$$

となる。

$\mathbb{D}$  内の区分的に滑らかな曲線  $C$  が  $z = z(t), 0 \leq t \leq 1$  とパラメータ表示されているとすると、双曲計量に関する曲線の長さは

$$L_\lambda(C) = \int_0^1 d\lambda_{z(t)} = \int_0^1 \frac{2|z'(t)| dt}{1 - |z(t)|^2}$$

で定義される。

2点  $z, w \in \mathbb{D}$  双曲距離  $\lambda(z, w)$  は、 $z, w$  を結ぶ区分的に滑らかな曲線の双曲計量に関する長さの下限で定義する. すなわち、

$$\lambda(z, w) = \inf_C L_\lambda(C)$$

### 定義 (双曲計量に関する等長写像)

$z, w \in \mathbb{D}$  に対して, 双曲計量で計った距離を  $\lambda(z, w)$  とする.

双曲計量に関する (向きを保つ) 等長写像とは,  $\mathbb{D}$  からそれ自身への (向きを保つ) 同相写像  $F$  で

$$\lambda(F(z), F(w)) = \lambda(z, w)$$

が,  $\mathbb{D}$  の任意の 2 点に対し成り立つものをいう.

このような双曲距離に関する向きを保つ等長写像全体は群をなし,  $\text{Isom}^+(\mathbb{D}, \lambda)$  で表す.



## 命題 (等距離写像の具体的表現)

$\text{Isom}^+(\mathbb{D}, \lambda)$  の任意の元は次の形で表される.

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

ただし,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha| < 1$

(証明)  $T(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$  が双曲計量を保つことだけ示す.

$T'(z) = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \bar{\alpha}z)^2}$  より,  $\frac{|T'(z)|}{1 - |T(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2}$  であるから,

$$d\lambda_{T(z)} = \frac{2|dT(z)|}{1 - |T(z)|^2} = \frac{2|T'(z)|}{1 - |T(z)|^2} |dz| = d\lambda_z \quad \square$$

## 命題

$\mathbb{D}$  の原点  $0$  と  $z$  を結ぶ線分を考えると, そのユークリッド距離  $r(> 0)$  と双曲距離  $a(> 0)$  には次のような関係がある.

$$r = \tanh \frac{a}{2}$$

(証明) 原点を中心に回転することにより,  $z$  を実軸上の  $x(> 0)$  に移動させて考えてよい. すると,  $0$  と  $x$  を結ぶ線分は,  $z(t) = t, 0 \leq t \leq r$  であるから,

## ポアンカレ円板モデルによる証明 V

$$\begin{aligned} a &= \int_0^r \frac{2|z'(z)|dt}{1-|z(t)|^2} = \int_0^r \frac{2}{1-t^2} dt \\ &= \int_0^r \left( \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = [\log|1+t| - \log|1-t|]_0^r \\ &= \log(1+r) - \log(1-r) = \log \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} e^a &= \frac{1+r}{1-r} \\ r &= \frac{e^a - 1}{e^a + 1} = \frac{e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}}{e^{\frac{a}{2}} + e^{-\frac{a}{2}}} = \tanh \frac{a}{2} \quad \square \end{aligned}$$

## 命題

等距離写像  $T$  は任意の  $z, w \in \mathbb{D}$  に対して

$$\frac{|T(z) - T(w)|^2}{(1 - |T(z)|^2)(1 - |T(w)|^2)} = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$$

が成り立つ.

(証明)  $T(\zeta) = e^{i\theta} \frac{\zeta - \zeta_0}{1 - \zeta_0 \zeta}$  として

$$|T(z) - T(w)| = \left| \frac{z - \zeta_0}{1 - \zeta_0 z} - \frac{w - \zeta_0}{1 - \zeta_0 w} \right| = \frac{|z - w|}{|1 - \zeta_0 z| |1 - \zeta_0 w|} (1 - |\zeta_0|^2),$$

$$1 - |T(z)|^2 = \frac{1 - |\zeta_0|^2}{|1 - \zeta_0 z|^2} (1 - |z|^2)$$

後者は  $w$  でも成り立つから, 与式を得る. □

ここから定理の証明に入る.

# ポアンカレ円板モデルによる証明 VII

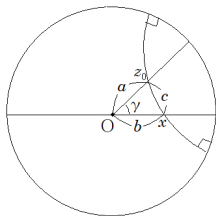
## 定理 (正弦定理)

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

## 定理 (余弦定理)

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

(証明) 次のような図で考える.



# ポアンカレ円板モデルによる証明 VIII

$T(z) = \frac{z-x}{1-xz}$  とする. このとき,

$c = \lambda(x, z_0) = \lambda(0, T(z_0))$  であるから,

$|T(z_0)| = \tanh \frac{c}{2}$  がいえる.

$$\cosh c = 2 \sinh^2 \frac{c}{2} + 1 = 2 \left( \cosh^2 \frac{c}{2} - 1 \right) + 1 = 2 \left( \frac{1}{1 - \tanh^2 \frac{c}{2}} - 1 \right) + 1$$

$$= \frac{2 \tanh^2 \frac{c}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{c}{2}} + 1 = \frac{2|T(z_0)|^2}{1 - |T(z_0)|^2} + 1$$

$$= \frac{2|T(z_0) - T(x)|^2}{(1 - |T(z_0)|^2)(1 - |T(x)|^2)} + 1 = \frac{2|z_0 - x|^2}{(1 - |z_0|^2)(1 - |x|^2)} + 1 = \frac{2|z_0 - x|^2 + (1 - |z_0|^2)(1 - |x|^2)}{(1 - |z_0|^2)(1 - |x|^2)}$$

$$= \frac{(1 + |z_0|^2)(1 + |x|^2) - 2xz_0 - 2x\bar{z}_0}{(1 - |z_0|^2)(1 - |x|^2)} = \frac{(1 + |z_0|^2)(1 + |x|^2) - 4 \operatorname{Re} xz_0}{(1 - |z_0|^2)(1 - |x|^2)}$$

この分母・分子に  $\cosh^2 \frac{b}{2} \cosh^2 \frac{a}{2}$  をかければ,  $x = \tanh \frac{b}{2}$ ,  $|z_0| = \tanh \frac{a}{2}$  より, これは,

$$\frac{(1 + \tanh^2 \frac{a}{2})(1 + \tanh^2 \frac{b}{2}) - 4 \tanh \frac{b}{2} \tanh \frac{a}{2} \cos \gamma}{(1 - \tanh^2 \frac{a}{2})(1 - \tanh^2 \frac{b}{2})} \times \frac{\cosh^2 \frac{b}{2} \cosh^2 \frac{a}{2}}{\cosh^2 \frac{b}{2} \cosh^2 \frac{a}{2}}$$

# ポアンカレ円板モデルによる証明 IX

$$= \frac{(\cosh^2 \frac{a}{2} + \sinh^2 \frac{a}{2})(\cosh^2 \frac{b}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2}) - 4 \tanh \frac{b}{2} \tanh \frac{a}{2} \cosh^2 \frac{b}{2} \cosh^2 \frac{a}{2} \cos \gamma}{(\cosh^2 \frac{a}{2} - \sinh^2 \frac{a}{2})(\cosh^2 \frac{b}{2} - \sinh^2 \frac{b}{2})}$$

$$= \cosh a \cosh b - 4 \sinh \frac{b}{2} \sinh \frac{a}{2} \cosh \frac{b}{2} \cosh \frac{a}{2} \cos \gamma$$

$$= \cosh a \cosh b - \sinh b \sinh a \cos \gamma$$

これより，余弦定理が証明された。

正弦定理については，

$$\left( \frac{\sinh c}{\sin \gamma} \right)^2 = \frac{\sinh^2 c}{1 - \left( \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b} \right)^2}$$

$$= \frac{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}{\sinh^2 a \sinh^2 b - (\cosh^2 \cosh^2 b - 2 \cosh a \cosh b \cosh c + \cosh^2 c)}$$

$$= \frac{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}{(\cosh^2 a - 1)(\cosh^2 b - 1) - \cosh^2 \cosh^2 b + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - \cosh^2 c}$$

$$= \frac{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}{1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c) + 2 \cosh a \cosh b \cosh c}$$

## ポアンカレ円板モデルによる証明 X

であり、この右辺が対称式であることから、成り立つことが確認される。

### 定理 (第2余弦定理)

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

(証明) 定理の式の右辺に次のものを代入する。

$$\begin{aligned} \text{余弦定理より, } \cos \gamma &= \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b}, \quad \cos \alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}, \\ \cos \beta &= \frac{\cosh c \cosh a - \cosh b}{\sinh c \sinh a} \end{aligned}$$

正弦定理の公式の証明中の式より,

$$\sin^2 \gamma = \frac{1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c) + 2 \cosh a \cosh b \cosh c}{\sinh^2 a \sinh^2 b}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c) + 2 \cosh a \cosh b \cosh c}{\sinh^2 b \sinh^2 c}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c) + 2 \cosh a \cosh b \cosh c}{\sinh^2 c \sinh^2 a}$$



# ポアンカレ円板モデルによる証明 XI

$$\begin{aligned} \text{右辺は, } & \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \\ = & \frac{(\cosh b \cosh c - \cosh a)(\cosh c \cosh a - \cosh b)}{1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c) + 2 \cosh a \cosh b \cosh c} \\ & + \frac{(\cosh^2 c - 1)(\cosh a \cosh b - \cosh c)}{1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c) + 2 \cosh a \cosh b \cosh c} \\ = & \cosh c \end{aligned}$$

であるから定理を得る.

## 系 (双曲三角形の合同条件)

双曲三角形の合同条件には, 次のようなものがある.

- ① 3 辺相等
- ② 2 辺夾角相等
- ③ 2 角夾辺相等
- ④ 3 角相等

## ポアンカレ円板モデルによる証明 XII

(証明) 余弦定理から、3辺相等から3角相等が示され、2辺夾角相等から3辺相等が示される。2角夾辺相等から作図の一意性で3辺3角相等が示される。また、第2余弦定理から3角相等は示される。□

### 系 (直角双曲三角形の場合)

$\gamma = \frac{\pi}{2}$  としたとき、

- $\sinh a = \sinh c \sin \alpha$
- $\cos \alpha = \cosh a \sin \beta$
- $\cosh c = \cosh a \cosh b$  (双曲ピタゴラスの定理)

が成り立つ。

(証明) 余弦定理の式に  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  を代入すれば、容易に  $\cosh c = \cosh a \cosh b$  が得られる。

また、第2余弦定理より、 $\cosh a = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \beta}$  が成り立ち、これに  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  を代入すれば、 $\cos \alpha = \cosh a \sin \beta$  が得られる。

## ポアンカレ円板モデルによる証明 XIII

また、余弦定理より、 $\cos \alpha = \frac{\cosh c \cosh b - \cosh a}{\sinh c \sinh b}$  が成り立ち、この右辺に

$\cosh c = \cosh a \cosh b$  を代入すると

$$\frac{\cosh a \cosh^2 b - \cosh a}{\sinh c \sinh b} = \frac{\cosh a \sinh b}{\sinh c}$$

さらに  $\cos \alpha = \cosh a \sin \beta$  を用いて変形すると、

$$\frac{\cos \alpha \sinh b}{\sinh c \sin \beta}$$

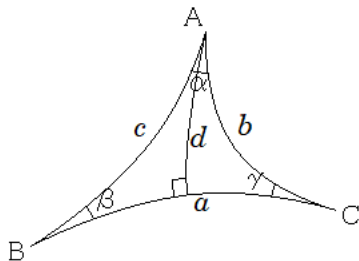
よって、 $\sin \beta = \frac{\sinh b}{\sinh c}$  が成り立ち、 $a$  と  $b$ 、 $\alpha$  と  $\beta$  を入れ換えれば、

$\sinh a = \sinh c \sin \alpha$  が得られる。

(双曲三角形の正弦定理の別証明)

直角双曲三角形の公式を用いれば、次のように双曲三角形の正弦定理を証明することができる。

## ポアンカレ円板モデルによる証明 XIV



A から BC に下ろした垂線の長さを  $d$  とすると、直角双曲三角形の公式より、

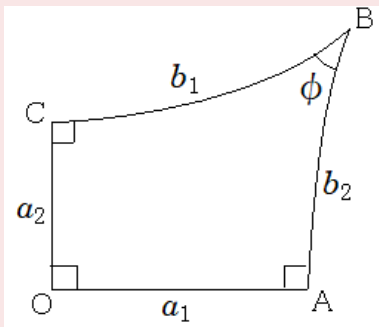
$$\sin \beta = \frac{\sinh d}{\sinh c} \text{ より } \sinh d = \sinh c \sin \beta$$

同様にして、 $\sinh d = \sinh b \sin \gamma$

$$\text{これらより、} \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

これが  $\frac{\sinh a}{\sin \alpha}$  に等しいことも同様に示される。  $\square$

## 定理 (ランバートの四角形)

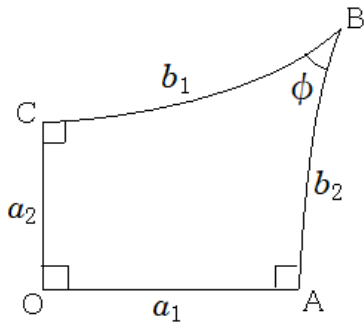


- ①  $\cos \phi = \sinh a_1 \sinh a_2$
- ②  $\cosh a_1 = \cosh b_1 \sin \phi$

(証明) まず, ① から示す.

## ポアンカレ円板モデルによる証明 XVI

点  $O$  を  $\mathbb{D}$  の原点にとり, 長さ  $a_1, a_2$  の辺のもう一方の端点を  $x(> 0), iy(y > 0)$  とする. また, 長さ  $b_1, b_2$  の辺の乗る円周を  $B_1 = \{z \mid |z - iv| = R\}$  ( $v > 0$ ),  $B_2 = \{z \mid |z - u| = r\}$  ( $u > 0$ ) とおく.



## ポアンカレ円板モデルによる証明 XVII

$$x = \tanh \frac{a_1}{2} = \frac{e^{\frac{a_1}{2}} - e^{-\frac{a_1}{2}}}{e^{\frac{a_1}{2}} + e^{-\frac{a_1}{2}}} = \frac{e^{a_1} - 1}{e^{a_1} + 1} \text{ より,}$$

$$(e^{a_1} + 1)x = e^{a_1} - 1$$

$$e^{a_1}(x - 1) = -x - 1$$

$$\text{よって, } e^{a_1} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{これより, } \sinh a_1 = \frac{1}{2}(e^{a_1} - e^{-a_1}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{2x}{1-x^2}$$

ここで,  $u^2 = r^2 + 1$ ,  $x = u - r$  であるから,

$$u^2 = x^2 + 2xr + r^2 = r^2 + 1$$

$1 - x^2 = 2xr$  であるから,

$$\sinh a_1 = \frac{2x}{2xr} = \frac{1}{r}$$

$$\text{同様に, } \sinh a_2 = \frac{1}{R}$$

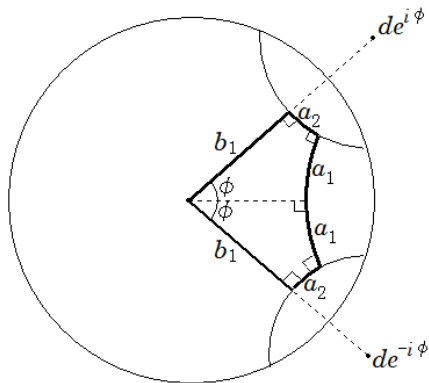
一方,  $B_1, B_2$  との交点が両方の円の中心を見込む角は  $\pi - \phi$  であるから, 普通の余弦定理より

$$\cos \phi = -\cos(\pi - \phi) = -\frac{R^2 + r^2 - |u - iv|^2}{2Rr} = \frac{1}{Rr}$$

となり, ① が示された.

次に ② を示す. 次の図を用いる。

# ポアンカレ円板モデルによる証明 XVIII





## ポアンカレ円板モデルによる証明 XIX

長さ  $a_2$  の 2 辺の乗る円周を

$B_1^+ = \{z \mid |z - de^{i\phi}| = r\}$  ( $d > 0$ ),  $B_1^- = \{z \mid |z - de^{-i\phi}| = r\}$  とすると, 証明は省略するが次が成り立つ.

$$\cosh 2a_1 = \frac{|de^{i\phi} - de^{-i\phi}|^2 - 2r^2}{2r^2} = \frac{2d^2 \sin^2 \phi - r^2}{r^2}$$

ここで,  $d - r = \tanh \frac{b_1}{2}$  より,

$$(d - r)^2 = \tanh^2 \frac{b_1}{2}$$

$d - r = y$  とおくと,

$$y^2 = \frac{\cosh b_1 - 1}{\cosh b_1 + 1}$$

$$(\cosh b_1 + 1)y^2 = \cosh b_1 - 1$$

$$(y^2 - 1) \cosh b_1 = -y^2 - 1$$

$$\cosh b_1 = \frac{1+y^2}{1-y^2}$$

$y = d - r, d^2 = r^2 + 1$  より

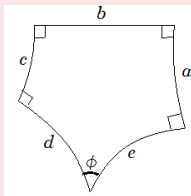
$$\begin{aligned} \frac{1+y^2}{1-y^2} &= \frac{1+(d-r)^2}{1-(d-r)^2} = \frac{1+d^2-2dr+r^2}{1-d^2+2dr-r^2} \\ &= \frac{2d(d-r)}{-r^2+2dr-r^2} = \frac{2d(d-r)}{2r(d-r)} = \frac{d}{r} \end{aligned}$$

これより,  $\cosh 2a_1 = 2 \cosh^2 a_1 - 1 = 2 \cosh^2 b_1 \sin^2 \phi - 1$

となり, 証明された.  $\square$

## 定理 (4つの内角が直角である双曲5角形の場合)

図のように定めると次の式が成り立つ。



$$\cosh a \cosh c + \cos \phi = \sinh a \cosh b \sinh c$$

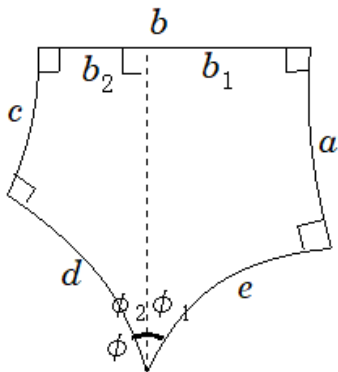
また、 $\phi = \frac{\pi}{2}$  ならば、

- $\tanh a \cosh b \tanh c = 1$
- $\sinh a \sinh b = \cosh d$

が成り立つ。

## ポアンカレ円板モデルによる証明 XXII

(証明) 次の図で考える.



1 つめの式を示す.

加法定理と、図の2つのランバートの四角形より

$$\cos \phi_1 = \sinh a \sinh b_1, \cos \phi_2 = \sinh c \sinh b_2$$

が成り立つことから,

$$\sinh a \cosh b \sinh c$$

$$= \sinh a \sinh c (\cosh b_1 \cosh b_2 + \sinh b_1 \sinh b_2)$$

$$= \sinh a \sinh c \cosh b_1 \cosh b_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2$$

さらに、双曲三角関数やランバートの四角形から得られる公式より,

$$(\sinh a \sinh c \cosh b_1 \cosh b_2)^2$$

$$= \sinh^2 a (1 + \sinh^2 b_1) \sinh^2 c (1 + \sinh^2 b_2)$$

$$= (\sinh^2 a + \cos^2 \phi_1) (\sinh^2 c + \cos^2 \phi_2)$$

$$= (\cosh^2 a - \sin^2 \phi_1) (\cosh^2 c - \sin^2 \phi_2)$$

となり、さらに,

$$\cosh a \sin \phi_2 = \cosh c \sin \phi_1 (= \cosh h \sin \phi_1 \sin \phi_2)$$

## ポアンカレ円板モデルによる証明 XXIV

であるから,

$$\begin{aligned} & (\cosh^2 a - \sin^2 \phi_1)(\cosh^2 c - \sin^2 \phi_2) \\ &= (\cosh a \cosh c - \sin \phi_1 \sin \phi_2)^2 - (\cosh a \sin \phi_2 - \cosh c \sin \phi_1)^2 \\ &= (\cosh a \cosh c - \sin \phi_1 \sin \phi_2)^2 \end{aligned}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} \sinh a \cosh b \sinh c &= \cosh a \cosh c - \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2 \\ &= \cosh a \cosh c + \cos \phi \end{aligned}$$

となり, 示された.  $\phi = \frac{\pi}{2}$  のとき,

$$1 \text{ つめの式に代入して, } \tanh a \cosh b \tanh c = 1$$

が成り立ち, 同様にして  $\tanh b \cosh c \tanh d = 1$  が成り立ち, この2つの式から  $c$  を消去して,

$$\frac{1}{\tanh^2 a \cosh^2 b} = \tanh^2 c = 1 - \frac{1}{\cosh^2 c} = 1 - \tanh^2 b \tanh^2 d$$

となり, これより,

$$1 = \tanh^2 a \cosh^2 b - \sinh^2 b \tanh^2 a \tanh^2 d$$

よって,

$$\begin{aligned} \tanh^2 a \sinh^2 b \tanh^2 d &= \tanh^2 a \cosh^2 b - 1 = \tanh^2 a (1 + \sinh^2 b) - 1 \\ &= \tanh^2 a \sinh^2 b + \tanh^2 a - 1 = \tanh^2 a \sinh^2 b - \frac{1}{\cosh^2 a} \end{aligned}$$

$$\tanh^2 a \sinh^2 b (1 - \tanh^2 d) = \frac{1}{\cosh^2 a}$$

$$\sinh^2 a \sinh^2 b (1 - \tanh^2 d) = 1$$

となるから, 残りも示された.  $\square$

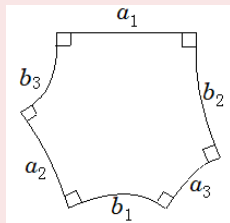
この定理から次のことが言える。

## 系 (直角双曲 5 角形の決定)

直角双曲 5 角形が, 隣り合う 2 辺の長さにより決定される.  $\square$

## 定理 (直角双曲 6 角形)

次のように直角双曲 6 角形を考える.

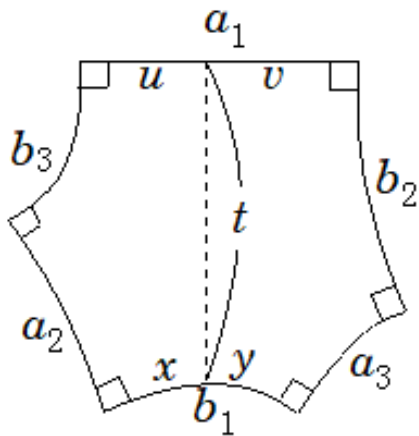


- 直角双曲 6 角形の正弦定理  $\frac{\sinh a_1}{\sinh b_1} = \frac{\sinh a_2}{\sinh b_2} = \frac{\sinh a_3}{\sinh b_3}$
- 直角双曲 6 角形の余弦定理  $\cosh b_1 = \frac{\cosh a_1 + \cosh a_2 \cosh a_3}{\sinh a_2 \sinh a_3}$

が成り立つ.

(証明) 次のような図で考える。





## ポアンカレ円板モデルによる証明 XXVIII

直角5角形の定理の3つめの式と、双曲線関数の公式より、

$$\begin{aligned}\cosh b_1 \sinh a_2 \sinh a_3 &= (\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y) \sinh a_2 \sinh a_3 \\ &= \cosh x \cosh y \sinh a_2 \sinh a_3 + \cosh u \cosh v\end{aligned}$$

再び直角5角形の定理の3つめの式と、双曲線関数の公式より、

$$\begin{aligned}\cosh^2 x \sinh^2 a_2 &= (1 + \sinh^2 x) \sinh^2 a_2 = \sinh^2 a_2 + \cosh^2 u, \\ \cosh^2 y \sinh^2 a_3 &= (1 + \sinh^2 y) \sinh^2 a_3 = \sinh^2 a_3 + \cosh^2 v\end{aligned}$$

がわかるから、

$$\begin{aligned}\cosh^2 x \cosh^2 y \sinh^2 a_2 \sinh^2 a_3 &= (\sinh^2 a_2 + \cosh^2 u)(\sinh^2 a_3 + \cosh^2 v) \\ &= (\cosh^2 a_2 + \sinh^2 u)(\cosh^2 a_3 + \sinh^2 v)\end{aligned}$$

となる。再び直角5角形の定理の3つめの式を使えば、

$$\frac{\cosh a_2}{\sinh u} = \sinh t = \frac{\cosh a_3}{\sinh v}$$

であるから、

$$\begin{aligned}(\cosh^2 a_2 + \sinh^2 u)(\cosh^2 a_3 + \sinh^2 v) &= (\cosh a_2 \cosh a_3 + \sinh u \sinh v)^2 + (\cosh a_2 \sinh v - \cosh a_3 \sinh u)^2 \\ &= (\cosh a_2 \cosh a_3 + \sinh u \sinh v)^2\end{aligned}$$

# ポアンカレ円板モデルによる証明 XXIX

以上より,

$$\begin{aligned} \cosh b_1 \sinh a_2 \sinh a_3 &= \cos a_2 \cosh a_3 + \sinh u \sinh v + \cosh u \cosh v \\ &= \cosh a_2 \cosh a_3 + \cosh a_1 \end{aligned}$$

となり, 直角双曲6角形の余弦定理が示された.

直角双曲6角形の正弦定理については, 直角双曲6角形の余弦定理より,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sinh a_1}{\sinh b_1}\right)^2 &= \frac{\sinh^2 a_1}{\cosh^2 b_1 - 1} = \frac{\sinh^2 a_1}{\left(\frac{\cosh a_1 + \cosh a_2 \cosh a_3}{\sinh a_2 \sinh a_3}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{\sinh^2 a_1 \sinh^2 a_2 \sinh^2 a_3}{(\cosh a_1 + \cosh a_2 \cosh a_3)^2 - \sinh^2 a_2 \sinh^2 a_3} \\ &= \frac{\sinh^2 a_1 \sinh^2 a_2 \sinh^2 a_3}{\cosh^2 a_1 + 2 \cosh a_1 \cosh a_2 \cosh a_3 + \cosh^2 a_2 \cosh^2 a_3 - \sinh^2 a_2 \sinh^2 a_3} \\ &= \frac{\sinh^2 a_1 \sinh^2 a_2 \sinh^2 a_3}{\cosh^2 a_1 + 2 \cosh a_1 \cosh a_2 \cosh a_3 + \cosh^2 a_2 \cosh^2 a_3 - (\cosh^2 a_2 - 1)(\cosh^2 a_3 - 1)} \\ &= \frac{\sinh^2 a_1 \sinh^2 a_2 \sinh^2 a_3}{2 \cosh a_1 \cosh a_2 \cosh a_3 + \cosh^2 a_1 + \cosh^2 a_2 + \cosh^2 a_3 - 1} \end{aligned}$$

となり, 最後の式は対称式であるから, 直角双曲6角形の正弦定理が示された.  $\square$

# 双曲平面モデルによる証明 I

ここからは双曲平面モデルを用いて考える. 点  $P$  と点  $Q$  の距離は  $d(P, Q)$  と表した.

以下, 等長変換について説明する.  $GL(3, \mathbb{R})$  は実数を成分とする 3 行 3 列の行列で可逆なもの全体を表す.

## 定義 ( $O(2, 1)$ )

$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  とする. このとき,

$$O(2, 1) = \{g \in GL(3, \mathbb{R}) \mid {}^t g J g = J\}$$

と定義する.

- $O(2, 1)$  は  $GL(3, \mathbb{R})$  の部分群である.

## 双曲平面モデルによる証明 II

- $g \in O(2, 1)$  ならば,  $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$  が成り立つ.  
これは, 定義より,  $\langle v, w \rangle = {}^t v J w$   
よって,  $\langle gv, gw \rangle = {}^t (gv) J gw = {}^t v {}^t g J gw = {}^t v J w = \langle v, w \rangle$  から分かる.
- $P \in \mathbb{M}, g \in O(2, 1)$  ならば,  $gP \in \mathbb{M}$  または  $-gP \in \mathbb{M}$  である.

### 定義

$$SO(2, 1) = \{g \in O(2, 1) \mid \det g = 1\},$$

$$O^+(2, 1) = \{g \in O(2, 1) \mid g\mathbb{M} = \mathbb{M}\},$$

$$SO^+(2, 1) = \{g \in O(2, 1) \mid g\mathbb{M} = \mathbb{M}, \det g = 1\}$$

## 定理

$g \in O^+(2, 1)$ ,  $P, Q \in \mathbb{M}$  とすると,

$$d(P, Q) = d(gP, gQ)$$

(証明)  $g$  が内積を保ことから自明なので省略する.

- $SO^+(2, 1)$  の  $\mathbb{M}$  への作用は推移的である.
- $O^+(2, 1) = \text{Isom}(\mathbb{M}, d)$  がいえる.

## 定理

$P, Q \in \mathbb{M}$  に対して,

$$\cosh d(P, Q) = -\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle$$

## 双曲平面モデルによる証明 IV

(証明)  $g \in SO^+(2, 1)$  は  $\mathbb{M}$  に推移的に作用し,  
 $d(gP, gQ) = d(P, Q)$ ,  $\langle g\overrightarrow{OP}, g\overrightarrow{OQ} \rangle = \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle$  が成り立つから,  
 $P = (0, 0, 1)$  としてよい. さらに,  $z$  軸のまわりの回転を考えることにより,  
 $Q(x, 0, z)$  としてよい. このとき  $P, Q$  を通る測地線は  
 $l(t) = (\sinh t, 0, \cosh t)$  である. また,  $\cosh \theta = z$  とおくと,  $l$  の定義域は  
 $[0, \theta]$  で  $l$  の長さは  $\theta$  となるから,  $d(P, Q) = \theta$  である. 一方,  
 $\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle = -z$  なので,  $\cosh d(P, Q) = -\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle$  が成り立つ.  $\square$

### 定義

$\mathbb{E}^{2,1}$  の 1 次元線形空間  $L$  を考える.  $e \in L$  が 0 でないとする,  $\langle e, e \rangle$  は  
正, 0, 負のどれかとなる.

- $\langle e, e \rangle > 0$  のとき  $e$  あるいは  $L$  を空間的という.
- $\langle e, e \rangle < 0$  のとき  $e$  あるいは  $L$  を時間的という.
- $\langle e, e \rangle = 0$  のとき  $e$  全体のことを光円錐という.

## 双曲平面モデルによる証明 V

- $L$  が時間的であるとすると,  $L$  は  $\mathbb{M}$  とただ 1 点で交わる.
- $L^\perp = \{V \in \mathbb{E}^{2,1} \mid \langle V, e \rangle = 0\}$  とおく.  
 $L^\perp \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$  であるのは,  $L$  が空間的なときで, そのときに限る.
- $\mathbb{M}$  の測地線と,  $\mathbb{E}^{2,1}$  の空間的な 1 次元線形部分空間は, 1 対 1 に対応する.  
これにより, 任意の測地線はある  $\langle e, e \rangle = 1$  となる  $e$  を考えることにより  $e^\perp$  と表すことができる.

2つの測地線  $e_1^\perp$  と  $e_2^\perp$  が交わる時, その間の角度  $\angle e_1^\perp e_2^\perp$  を計算する.  
角度は次の定義により定めることにする.



## 定義 (測地線のなす角)

$e_1^\perp \cap e_2^\perp = P$  とする.  $P$  での  $e_i^\perp$  の接ベクトルを  $v_i$  とすると

$$\cos \angle e_1^\perp e_2^\perp = \pm \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} \sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle}}$$

$P$  での  $M$  の接平面上  $\langle \rangle$  は正定値であるから, この右辺は  $-1$  から  $1$  までの値をとるので  $\angle e_1^\perp e_2^\perp$  が定まる.

右辺の正負はユークリッド幾何学と同様にベクトルが鋭角をなすか鈍角をなすかによるものである.

### なす角について

双曲面における測地線のなす角の定義をしたが、これは一般的にユークリッド空間におけるなす角とは異なっていて、あくまでミンコフスキー空間の内積により定義されたものである。ただし、 $SO^+(2, 1)$  の元により、測地線の交点を  $(0, 0, 1)$  に写して考えると、そこではユークリッド空間のなす角と一致する。さらにそこからポアンカレ円板に写してもなす角は保たれる。一次分数変換は等角写像なので、ポアンカレ円板上ではどこでもユークリッド空間と角は一致する。そのため、図はポアンカレ円板上で書くと正確に表現することができる。

ユークリッド空間における外積をミンコフスキー空間で定義する。

## 定義 (ミンコフスキー空間における“外積”)

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^{2,1}$  を  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  とおく. このとき次のように定義する.

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, -(a_1 b_2 - a_2 b_1))$$

ユークリッド幾何の外積と同様に次のような式が成り立つ.

- 

$$\langle \mathbf{a} * \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (1)$$

- $\mathbf{a} * \mathbf{b} = -\mathbf{b} * \mathbf{a}$

- $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  とおくと,  
 $\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 * \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 * \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$

- 

$$\mathbf{a} * (\mathbf{b} * \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} \quad (2)$$

## 双曲平面モデルによる証明 IX

•

$$\langle \mathbf{a} * \mathbf{b}, \mathbf{c} * \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle \quad (3)$$

- 測地線  $\gamma(t) = \mathbf{x} \cosh t + \mathbf{v} \sinh t$  を考えると、法線ベクトル

$$\mathbf{n} = \gamma(t) * \gamma'(t)$$

を考えることができる.

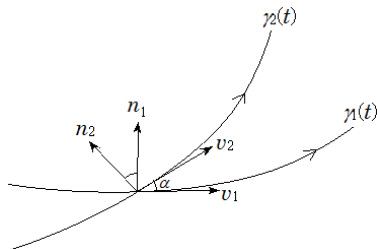
$\gamma'(t) = \mathbf{x} \sinh t + \mathbf{v} \cosh t$  より,  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$  を用いて

$$\gamma(t) * \gamma'(t) = \mathbf{x} * \mathbf{v}$$

となるので、法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は3次元ミンコフスキー空間で見ると  $t$  によらず一定である.

- $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$
- 次のように定める. ポアンカレ円板上の図であるが、交点は双曲面上に対応するものを  $\mathbf{x}$  とする.

## 双曲平面モデルによる証明 X



法線ベクトルはそれぞれ,  $n_1 = x * v_1$ ,  $n_2 = x * v_2$  と表される.

- $v_2 = v_1 \cos \alpha + n_1 \sin \alpha$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \cos \alpha$
- $v_1 * v_2 = -x \sin \alpha$
- 

$$\langle n_1, n_2 \rangle = \cos \alpha \quad (4)$$



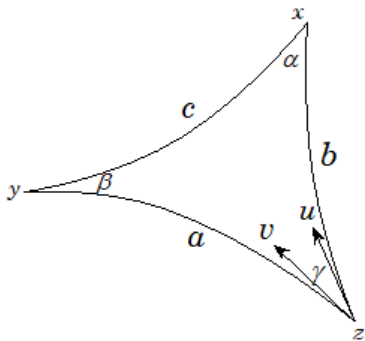
$$\mathbf{n}_1 * \mathbf{n}_2 = -x \sin \alpha \quad (5)$$

## 定理 (余弦定理)

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

(証明) 次のように設定する.

# 双曲平面モデルによる証明 XII



すると、 $\mathbf{x} = \mathbf{z} \cosh b + \mathbf{u} \sinh b$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{z} \cosh a + \mathbf{v} \sinh a$   
が得られ、 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \cosh a \cosh b + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \sinh a \sinh b$   
より、 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -\cosh c$ ,  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = -1$ ,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \cos \gamma$  とあわせて、定理の式  
が成り立つ。  $\square$

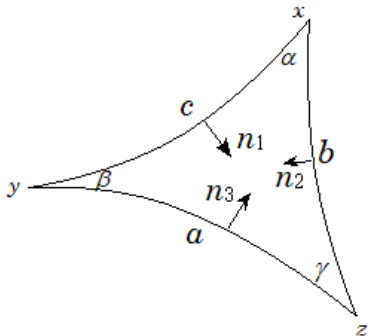
### 定理 (第2余弦定理)

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

(証明) 次のように設定する.



# 双曲平面モデルによる証明 XIV



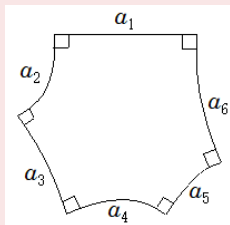
すると, (5) より,  $\mathbf{n}_2 * \mathbf{n}_1 = -\mathbf{x} \sin \alpha$ ,  $\mathbf{n}_1 * \mathbf{n}_3 = -\mathbf{y} \sin \beta$   
 であり, (3), (4) より,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_2 * \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1 * \mathbf{n}_3 \rangle &= \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1 \rangle - \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1 \rangle \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle \\ &= -\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

が得られる. したがって,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \sin \alpha \sin \beta = -\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta$   
 となり,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -\cosh c$  とあわせて定理の式が成り立つ.  $\square$

## 定理 (直角双曲6角形)

次のように直角双曲6角形を考える。(便宜上長さの文字を変更した)

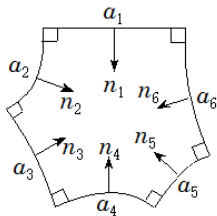


- 直角双曲6角形の正弦定理  $\frac{\sinh a_2}{\sinh a_5} = \frac{\sinh a_6}{\sinh a_3} = \frac{\sinh a_4}{\sinh a_1}$
- 直角双曲6角形の余弦定理  $\cosh a_3 = \frac{\cosh a_6 + \cosh a_2 \cosh a_4}{\sinh a_2 \sinh a_4}$

が成り立つ.

(証明) 次のように設定する.

# 双曲平面モデルによる証明 XVII



行列式に関する公式を用いる.  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  を3次元ミンコフスキー空間のベクトルとする. これらを列ベクトルとする行列について,

$$\det(a_1, a_2, a_3) \det(b_1, b_2, b_3) = -\det(\langle a_i, b_j \rangle)_{ij} \quad (6)$$

が成立する.

これに図の  $n_1 \sim n_6$  を当てはめることにより,

$$\det(n_4, n_5, n_6) \det(n_5, n_6, n_1) = -\langle n_4, n_1 \rangle$$

## 双曲平面モデルによる証明 XVIII

$$\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)\det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) = -\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_4 \rangle$$

よって,

$$\det(\mathbf{n}_4, \mathbf{n}_5, \mathbf{n}_6)\det(\mathbf{n}_5, \mathbf{n}_6, \mathbf{n}_1) = \det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)\det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) \quad (7)$$

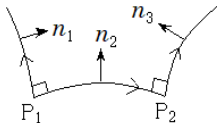
が成り立つ.

ここで, 次のような図を考えると,

$$\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle = -\cosh d(P_1, P_2) \quad (8)$$

$$\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = -\sinh d(P_1, P_2) \quad (9)$$

が成り立つ. これを示す.



## 双曲平面モデルによる証明 XIX

双曲平面モデルで考えて、 $\mathbf{x}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \overrightarrow{OP_2}$  とする。

$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{x}_1 * \mathbf{n}_2$ ,  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{x}_2 * \mathbf{n}_2$  となる。

公式 (3) を用いると

$\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = -\cosh d(P_1, P_2)$  となり, (8) が示された。

公式 (5) より

$\mathbf{n}_1 * \mathbf{n}_2 = -\mathbf{x}_1$  となるので, 公式 (1) を用いて,

$\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \langle \mathbf{n}_1 * \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle = -\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{n}_3 \rangle$  が成り立ち,

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \cosh d(P_1, P_2) + \mathbf{n}_3 \sinh d(P_1, P_2)$$

とあわせると, (9) が示された。□

定理の証明に戻る。(9) から得られる  $\det(\mathbf{n}_4, \mathbf{n}_5, \mathbf{n}_6) = -\sinh a_5$  などの式を (7) に代入すると,

$\sinh a_5 \sinh a_6 = \sinh a_2 \sinh a_3$  が成り立つ。他の辺についても同様の式を導けば正弦定理が示される。

次に余弦定理を証明する。まず公式 (6) から,

## 双曲平面モデルによる証明 XX

$$\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4)\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_5) = -\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_5 \rangle + \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle \langle \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_5 \rangle \quad (10)$$

また、任意のベクトル  $\mathbf{x}$  に対して、

$$\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3, \mathbf{x}) = -\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{x} \rangle$$

が成り立つ。これはこの式の両辺が、 $\mathbf{x}$  について線形であること、および  $\mathbf{x} = \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  とおいたときに成立することから証明される。

よって、 $\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) = -\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_4 \rangle$  が成り立つ。これと、(10) とあわせて、(8), (9) を用いると、

$$\sinh a_2 \sinh a_4 \cosh a_3 = -\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_5 \rangle + \cosh a_2 \cosh a_4 \quad (11)$$

さらに、(8) より、 $\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_5 \rangle = -\cosh a_6$  であるから定理の式が証明された。□

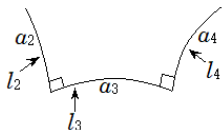
## 双曲平面モデルによる証明 XXI

さて、この定理により、次のことが証明できる。

### 命題

正の数  $a_2, a_4, a_6$  に対して、これらを隣り合わない3辺の長さとするような、双曲直角6角形が存在する。さらに、このような直角6角形の合同類はただひとつに定まる。

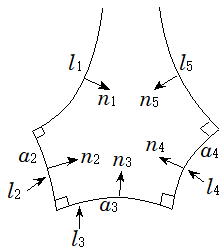
(証明) 与えられた  $a_2, a_4, a_6$  に対して、直角6角形の余弦公式により  $a_3$  を定める。そこでまず長さ  $a_2, a_3, a_4$  の測地線  $l_2, l_3, l_4$  を次のように定める。



さらに、測地線  $l_1, l_5$  などを次のように定める。



## 双曲平面モデルによる証明 XXII



ここで、 $l_1$  と  $l_5$  が交わらないことを示す.

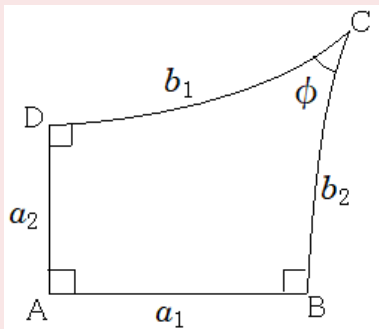
まず、測地線  $l_i$  の内向きの法線ベクトルを  $n_i$  とすると、(11) は図の状況で成り立つことに注意する. そして、 $a_2, a_3, a_4, a_6$  は直角双曲六角形の余弦定理を満たすので、 $\langle n_1, n_5 \rangle = -\cosh a_6$  が成り立つことになる. 測地線  $l_1$  と  $l_5$  が交わっていると仮定すると、(4) より  $-1 \leq \langle n_1, n_5 \rangle \leq 1$  より矛盾する. よって  $l_1$  と  $l_5$  は交わらない.

よって、測地線  $l_1, l_5$  にともに直交する測地線がとれ、直角双曲六角形の余弦公式より、この測地線が  $l_1, l_5$  によって切り取られる部分の長さは  $a_6$  と

なる. 他の辺の長さも直角双曲6角形の余弦公式から一意に求めることができるので, 求める直角双曲6角形が構成された.  $\square$

## 定理 (ランバートの四角形)

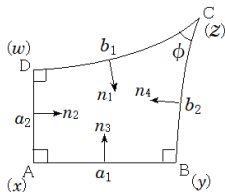
※便宜上設定を変更した



- $\cos \phi = \sinh a_1 \sinh a_2$
- $\cosh a_2 = \cosh b_2 \sin \phi$

# 双曲平面モデルによる証明 XXV

(証明) 次のように設定する.



公式 (4) より,  $\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_4 \rangle = -\cos \phi$  である. この式に

$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{w} * \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_4 = \mathbf{y} * \mathbf{n}_3$  を代入して,

$$\langle -\mathbf{w} * \mathbf{n}_2, \mathbf{y} * \mathbf{n}_3 \rangle = -\cos \phi$$

この式に公式 (3) を適用して,

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{n}_3 \rangle \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle = \cos \phi$$

この式に  $\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle = 0$  と, (5), (9) から得られる

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{n}_3 \rangle = \langle -\mathbf{n}_1 * \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle = -\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \sinh a_2,$$

$$\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{n}_2, -\mathbf{n}_3 * \mathbf{n}_4 \rangle = -\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_2) = \sinh a_1$$

を代入しすることにより、一つ目の式が成り立つ。

また、(5) より、 $\mathbf{n}_4 * \mathbf{n}_1 = -z \sin \phi$  が成り立つ。

よって、 $\mathbf{n}_1 * \mathbf{n}_4 = z \sin \phi$  これを変形して

$$\mathbf{n}_1 * (\mathbf{y} * \mathbf{n}_3) = (\mathbf{y} \cosh b_2 + \mathbf{n}_3 \sinh b_2) \sin \phi$$

この左辺を (2) を用いて変形して

$$\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{y} \rangle \mathbf{n}_3 - \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle \mathbf{y} = (\mathbf{y} \cosh b_2 + \mathbf{n}_3 \sinh b_2) \sin \phi$$

この両辺に  $\mathbf{y}$  とのミンコフスキー内積を考えて、

$$\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{n}_3, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \cosh b_2 \sin \phi$$

ここで、 $\langle \mathbf{n}_3, \mathbf{y} \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = -1$ , (8) より  $\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle = -\cosh a_2$ ,

より、二つ目の式が成り立つ。  $\square$

# 複比を使った距離の定義 I

ここでは上半平面モデルを用いて考える。  
 $xy$  平面を複素数平面とみなす。

## 定義 (複比)

$z_1, z_2, z_3, z_4$  を複素数とする。

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}$$

で  $[z_1, z_2, z_3, z_4]$  を定義し、これを複比 (非調和比) という。

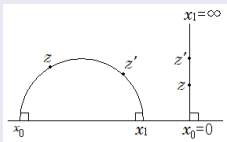
- 無限遠点も考えることにし、たとえば、 $[\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$  などと定義することにする。  
また、 $[z_1, z_2, z_3, z_4]$  の値が 0 や  $\infty$  となることもある。

- 複比は1次分数変換で不変である. すなわち  
 $w_j = \frac{az_j+b}{cz_j+d}$  (文字はすべて複素数) としたとき,  
 $[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$

## 複比を使った距離の定義 III

### 定義 (複比を用いた距離の定義)

上半平面内の“直線”を次のように設定する.



このとき,  $z$  から  $z'$  までの長さを

$$d(z, z') = |\log[z, z', x_0, x_1]|$$

と定義する.



## 複比を使った距離の定義 IV

- 一次分数変換を用いることにより、定義の図の左の“直線”から長さを変えることなく図の右の“直線”に移すことができる。  
ここで、 $x_0 = 0, x_1 = \infty$  とする。そして、 $z = iy, z' = iy'$  とおくと、

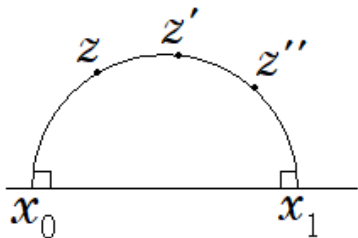
$$[z, z', 0, \infty] = \frac{z}{z'} = \frac{y}{y'}$$

であるから、 $[z, z', x_0, x_1]$  は正の実数である。

また、 $d(z, z') = 0$  となるのは  $z = z'$  のときに限ることもわかる。

- $[z, z', x_0, x_1] = \frac{1}{[z', z, x_0, x_1]}$  より、 $d(z, z') = d(z', z)$  が成り立つ。
- 次のように設定する。

## 複比を使った距離の定義 V



このとき、 $\frac{(z-x_0)(z'-x_1)}{(z'-x_0)(z-x_1)} \frac{(z'-x_0)(z''-x_1)}{(z''-x_0)(z'-x_1)} = \frac{(z-x_0)(z''-x_1)}{(z''-x_0)(z-x_1)}$   
であるから、 $[z, z', x_0, x_1][z', z'', x_0, x_1] = [z, z'', x_0, x_1]$   
これより

$$d(z, z') + d(z', z'') = d(z, z'')$$

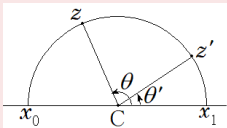
がなりたつ。

## 複比を使った距離の定義 VI

定義式を変形することを考える.

### 命題

下の図で  $d(z, z') = \left| \log \frac{\tan \frac{\theta'}{2}}{\tan \frac{\theta}{2}} \right|$   
が成り立つ. ただし,  $C$  は半円の中心である.



(証明) 図において,

$\angle x_1 x_0 z = \frac{1}{2} \angle x_1 C z = \frac{1}{2} \theta$ ,  $\angle x_1 x_0 z' = \frac{1}{2} \angle x_1 C z' = \frac{1}{2} \theta'$ ,  
 $\angle x_0 z x_1 = \angle x_0 z' x_1 = \text{直角}$  であるから

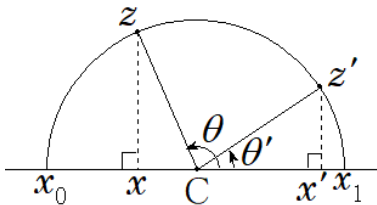
$$[z, z', x_0, x_1] = \frac{(z-x_0)(z'-x_1)}{(z'-x_0)(z-x_1)} = \frac{2r \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot 2r \sin \frac{\theta'}{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta'}{2}\right)}}{2r \cos \frac{\theta'}{2} \cdot e^{i\frac{\theta'}{2}} \cdot 2r \sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}}$$

## 複比を使った距離の定義 VII

$$= \frac{2r \cos \frac{\theta}{2} \cdot 2r \sin \frac{\theta'}{2}}{2r \cos \frac{\theta'}{2} \cdot 2r \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\tan \frac{\theta'}{2}}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

したがって、 $d(z, z') = \left| \log \frac{\tan \frac{\theta'}{2}}{\tan \frac{\theta}{2}} \right|$  が成り立つ。  $\square$

次に、下の図のように  $x, x'$  をとる。



## 複比を使った距離の定義 VIII

すると、 $\triangle zx_0x_1$  と  $\triangle xx_0z$  が相似であることから、  
 $\frac{|x_0-z|}{2r} = \frac{|x_0-x|}{|x_0-z|}$  すなわち  $|x_0-z|^2 = 2r|x_0-x|$  がなりたつ。

同様に、

$|z'-x_1|^2 = 2r|x'-x_1|$ ,  $|x_0-z'|^2 = 2r|x_0-x'|$ ,  $|z-x_1|^2 = 2r|x-x_1|$   
が成り立つ。これと、先ほどの命題の証明と同様の計算を用いることにより、

$$[z, z', x_0, x_1]^2 = \left( \frac{(z-x_0)(z'-x_1)}{(z'-x_0)(z-x_1)} \right)^2 = \frac{(x-x_0)(x'-x_1)}{(x'-x_0)(x-x_1)} = [x, x', x_0, x_1]$$

と計算できるので、次に命題が示された。

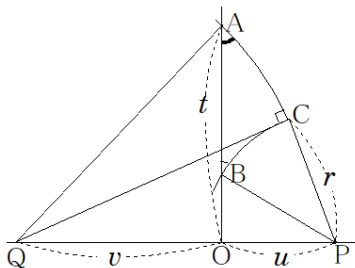
### 命題

$$d(z, z') = \frac{1}{2} \log [x, x', x_0, x_1] \quad (12)$$

さて、ここから証明に入る。まず直角双曲三角形の場合に成り立つ式を証明していく。

## 複比を使った距離の定義 IX

双曲三角形  $ABC$  において角  $C$  が直角であるとする. このとき一次分数変換で動かすことにより, 辺  $AB$  が虚軸にあるとしてよい. 辺  $BC, CA$  はそれぞれ実軸上の点  $P, Q$  を中心とする円弧とする. さらに一次分数変換で動かすことにより点  $B$  は  $(0, 1)$  であるとしてよい. すなわち次のようなを考える.



## 複比を使った距離の定義 ×

点 A, P, Q の座標をそれぞれ  $(0, t), (u, 0), (-v, 0)$  とする.  
まず,

$$c = d(A, B) = |\log[i, ti, 0, \infty]| = \log t \quad (13)$$

であるから,

$$\cosh c = \frac{e^c + e^{-c}}{2} = \frac{t^2 + 1}{2t} \quad (14)$$

また,  $\angle A = \angle AQO, \angle B = \angle BPO$  であるから,

$$\cot A = \frac{v}{t}, \quad \cot B = \frac{u}{1} = u \quad (15)$$

$\triangle PCQ$  は直角三角形であるから

$$(u + v)^2 = PC^2 + QC^2 = PB^2 + QA^2 = 1 + u^2 + v^2 + t^2$$

両辺の  $u^2 + v^2$  を消去して

$$2uv = 1 + t^2 \quad (16)$$

## 複比を使った距離の定義 XI

これと, (14), (15) から次の式を得る.

$$\cosh c = \cot A \cdot \cot B \quad (17)$$

また, (13), (16) から, 次の式を得る.

$$\tanh c = \frac{e^{2c} - 1}{e^{2c} + 1} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = \frac{uv - 1}{uv} \quad (18)$$

次に  $a = d(B, C)$  を求めるために円弧 BC を延長した半円が実軸と交わる 2 点を考える. 半径 PB を  $r$  と書けば, 2 点の  $x$  座標はそれぞれ  $u - r, u + r$  である. 点 B の  $x$  座標は 0, また点 C の  $x$  座標は,  $\theta = \angle OPC$



## 複比を使った距離の定義 XII

とするとき,  $u - r \cos \theta$  で与えられる. また  $\angle OPB = \angle B$  であるから,  $u = r \cos B$  と書ける. したがって (12) を用いて

$$\begin{aligned} a &= d(B, C) \\ &= \frac{1}{2} \log [u - r \cos \theta, 0, u - r, u + r] \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(1 + \cos B)(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos B)(1 + \cos \theta)} \end{aligned} \quad (19)$$

そして

$$\tanh a = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} = \frac{\cos B - \cos \theta}{1 - \cos B \cos \theta} \quad (20)$$

これに

$$\cos B = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u + v} \quad (21)$$

## 複比を使った距離の定義 XIII

を代入して  $\tanh a = \frac{uv-1}{v\sqrt{1+u^2}}$  さらに, (18), (21) を使えば, 次の式を得る.

$$\tanh a = \tanh c \cdot \cos B \quad (22)$$

ここで A と B を入れ換えれば, 同様に次式を得る.

$$\tanh b = \tanh c \cdot \cos A \quad (23)$$

ここで, 以上で証明した式と計算により導かれる式をまとめておく.

$$\cosh c = \cot A \cdot \cot B \quad (24)$$

$$\tanh a = \tanh c \cdot \cos B \quad (25)$$

$$\tanh b = \tanh c \cdot \cos A \quad (26)$$

$$\sinh a = \sinh c \cdot \sin A \quad (27)$$

$$\sinh b = \sinh c \cdot \cos B \quad (28)$$

## 複比を使った距離の定義 XIV

$$\cos A = \sin B \cdot \cosh a \quad (29)$$

$$\cos B = \sin A \cdot \cosh b \quad (30)$$

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b \quad (31)$$

$$\tanh a = \sinh b \cdot \tan A \quad (32)$$

$$\tanh b = \sinh a \cdot \tan B \quad (33)$$

ここで、(24) は (17), (25), (26) はそれぞれ (22), (23) である。  
(27) を証明する。

(24), (25) の両辺を 2 乗し、

$$\cosh^2 c = \cot^2 A \cdot \cot^2 B, \quad \tanh^2 a = \tanh^2 c \cdot \cos^2 B$$

ここで、関係式  $1 + \tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B}$  を使えば上の二式から

$$1 + \frac{1}{\cosh^2 c \cdot \tan^2 A} = \frac{\tanh^2 c}{\tanh^2 a}$$

両辺に  $\cosh^2 c$  をかけて

$$\cosh^2 c + \cot^2 A = \frac{\sinh^2 c}{\sinh^2 a} (1 + \sinh^2 a) = \frac{\sinh^2 c}{\sinh^2 a} + \sinh^2 c$$

## 複比を使った距離の定義 XV

したがって  $1 + \cot^2 A = \frac{\sinh^2 c}{\sinh^2 a}$  が成り立ち、左辺は  $\frac{1}{\sin^2 A}$  であるから両辺の平方根をとることにより示される。

(28) は (27) で  $A$  と  $B$ , そして  $a$  と  $b$  を入れ換えれば得られる. (29) は (25) と (27) から, 同様に (30) は (26) と (28) から得られる. (31) は (24), (27) と (30) から得られる. (32) は (27), (28) と (29) から, 同様に (33) は (27), (28) と (30) から得られる.

以上を用いれば双曲三角形における公式が証明できる.

### 定理 (正弦定理)

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C}$$

(証明) ポアンカレ円板モデルの別証明と同じなので省略する.

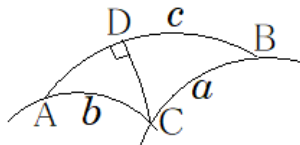
## 複比を使った距離の定義 XVI

### 定理 (余弦定理)

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos A$$

※便宜上これまでのものと文字を変更した.

(証明) 次の図で考える.



## 複比を使った距離の定義 XVII

公式 (31) を直角三角形 ADC と BDC に適用する. 辺 AD の長さを  $c'$  とすると

$$\begin{aligned}\cosh b &= \cosh d \cdot \cosh c' \\ \cosh a &= \cosh d \cdot \cosh(c - c') \\ &= \cosh d(\cosh c \cdot \cosh c' - \sinh c \cdot \sinh c')\end{aligned}$$

2 番目の式を 1 番目の式で割れば

$$\frac{\cosh a}{\cosh b} = \cosh c - \sinh c \cdot \tanh c'$$

となり, ここで (26) を直角三角形 ADC に適用し,

$\tanh c' = \tanh b \cdot \cos A$  を代入すると

$$\frac{\cosh a}{\cosh b} = \cosh c - \sinh c \cdot \tanh b \cdot \cos A$$

より定理の式が得られる.  $\square$

ここからポアンカレ円板の証明の時と同様に第 2 余弦定理が得られる.

## 定理 (第2余弦定理)

$$\cosh a = \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C}$$

※便宜上これまでのものと文字を変更した.