Banach-Tarski の定理はどこで直観から外れるのか？

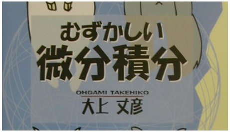
梵天ゆとり

メダカカレッジ

March 31, 2024

誰？

- 梵天ゆとり（ぼんてん・ゆとり）
- Twitter ID：@y_bonten（ぼんてんぴょん） 
- 数学書・医学書などの入門書を扱う「メダカカレッジ」の校閲係。
- 結城浩『数学ガール』シリーズの常連レビューア。
- 10 年前に「関西すうがく徒のつどい」で講演。



（2023.7.7、SOU 数学ラボにて）

バナッハ・タルスキの定理とは

「1 個の球体を 2 個に増やせる」？

定理

球体 K を有限個に分割し、それぞれを合同変換することで、K と合同な球体を 2 個作れる。

- 直観に反する結果を与えるということで、定理の名前と主張自体は有名。
- きちんと証明を追って、どの段階で直観から外れるのかを特定したい。
- 群論の知識があれば、厳密な証明を正面から理解することは難しくない。
- 群論が分からなくても、本質を損なわずに上の疑問に迫ることは可能。

合同変換について

$$\text{合同変換} = \left\{ \begin{array}{c} \text{平行移動} \\ \text{回転} \\ \text{鏡映} \end{array} \right\} \text{を合成したもの}$$

……だが、バナッハ・タルスキの定理においては

・鏡映は不要。

・平行移動は、倍増したときに同じ場所に重なるのを避けるために使う。

・本質的に必要なのは、中心まわりの回転（球の中心を通る直線を軸とした回転）のみ。

Remark

中心まわりの回転をつぎつぎに施しても（合成しても）球の中心の位置は変わらず、1 つの回転で同じ結果に到達することが必ずできる。

分割合同

図形 A, B に対し、以下を同時に満たすような自然数 n および図形 A_i, B_i $(i = 1, \ldots, n)$ が存在するとき、A と B は分割合同であるといい、$A \cong B$ で表す。

$$A = \bigsqcup_i A_i = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n,$$

$$B = \bigsqcup_i B_i = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n,$$

各 $i = 1, \ldots, n$ について A_i と B_i は合同.

分割合同の概念を用いてバナッハ・タルスキの定理を書き直すと

定理

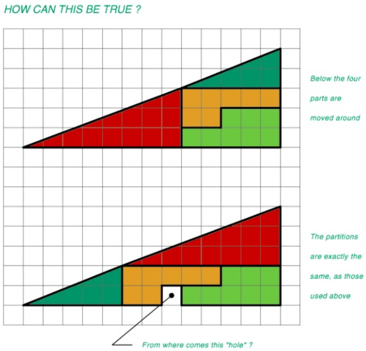
球体 K について、以下を同時に満たす A, B が存在する：

$$A \sqcup B \subseteq K, A \cong K \cong B.$$

分割合同の例

・「有限個に分けること」以外、分割の方法に何の制限もないため、けっこうおかしなことが起こる。

例 1 ：



分割合同の例

$\boxed{\text{例 2}}$: $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
$\mathbb{R} = \mathbb{N} \sqcup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{N})$

$$f : x \mapsto \begin{cases} x + 1 & (x \in \mathbb{N}) \\ x & (x \notin \mathbb{N}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{例 3}}$: $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.
$\bar{\mathbb{Q}} = \{q + n\sqrt{2} \mid q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ とおく。
$\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}} \sqcup (\mathbb{R} \backslash \bar{\mathbb{Q}})$

$$f : \begin{cases} x = q + n\sqrt{2} & \mapsto & q + (n+1)\sqrt{2} & (x \in \bar{\mathbb{Q}}) \\ x & \mapsto & x & (x \notin \bar{\mathbb{Q}}) \end{cases}$$

分割合同の例

$\boxed{\text{例 4}}$：長さの異なる 2 線分 AB, CD。
直線 AC と BD の交点を E とする。点 $P \in AB$ を、直線 EP, BD の交点に移せば、AB を分割合同変換によって CD に移したことになる（？）

$\boxed{\text{例 5}}$：点 A_0 を通る円周 $C \cong C \backslash \{A_0\}$
θ を 360°（2π ラジアン）の無理数倍の角とする。A_{n+1} を

$$A_n \text{ を } C \text{ の中心のまわりに } \theta \text{ 回転した点}$$

とすると、A_i（$i \in \mathbb{N}$）はすべて異なる点となる。$\sqcup_i \{A_i\}$ を A とおく。
$C = A \sqcup (C \backslash A)$.

$$f : \begin{cases} x = A_n & \mapsto & A_{n+1} & (x \in A) \\ x & \mapsto & x & (x \in C \backslash A) \end{cases}$$

球体倍増レシピの概要

Recipe

球体 K の中心 O を消滅させる

$\downarrow$

$K\backslash\{O\}$ の各点を、「中心から見て同じ向きにある」という基準で類別する

（半径が中心から放射しているイメージ）

$\downarrow$

<u>もしも球面を倍増できれば、</u>$K\backslash\{O\}$ も倍増できる！

$\downarrow$

２つの「中心なし球体」の中心を生成する（復活させる）

$\downarrow$

球体が２個になった！

というわけで、以降は球面の倍増に全力を挙げます。

球面倍増レシピの概要

Recipe

球面を 5 パーツに分割する：

$$S^2 = A \sqcup (B \sqcup C) \sqcup (D \sqcup E).$$

$$\downarrow$$

B, D を回転して B', D' とすると

$$B' = A \sqcup B \sqcup (D \sqcup E) = S^2 \backslash C \text{ つまり } B' \sqcup C = S^2$$

$$D' = A \sqcup (B \sqcup C) \sqcup D = S^2 \backslash E \text{ つまり } D' \sqcup E = S^2$$

したがって

$$B \sqcup C \cong S^2 \cong D \sqcup E$$

となるようにできる！

$$\downarrow$$

B, C だけでひとつ、D, E だけでひとつ球面が作れる（A は余る）。

直観に反する主因はここにありそう：
1 パーツを回転するだけで、4 パーツ分（しかも自身を含む）になる！？
⇒どんな奇妙な分割をすればそんなことが起こせるのか？

カチ回し手順

カチ回し手順

θ を正四面体の 2 面角（$\cos\theta = 1/3$）とする。
※中途半端な角度なら何でもよい。
x 軸のまわりの $\pm\theta$ 回転をそれぞれ「↑」「↓」で、
y 軸のまわりの $\pm\theta$ 回転をそれぞれ「←」「→」で表す。

カチ回し手順

↑・↓・←・→のみを有限個並べたものを「カチ回し手順」と呼ぶことにする（空の手順を含む）。

手順の簡約：「←↑←→↓↓」は簡約すれば「←↓」と同じ手順。簡約し尽くした手順を<u>既約手順</u>と呼ぶ。

Fact

既約手順として異なるカチ回し手順は、必ず異なる回転をもたらす。

※もとの状態に戻したければ、手順を逆再生するしかない。

頂上点の軌道

原点に半径 r の球の中心を置き、この後しばらく、頂上の点 $T(0, 0, r)$ に着目する。

軌道

T からスタートして、カチ回し手順で到達できる点の全体を「T の軌道」と呼び、$\mathrm{Orb}(T)$ で表す。

$\mathrm{Orb}(T)$ は球面のごく一部であるが、それでも球面に隙間なく分布した無限個の点からなる。

Fact

異なる既約手順は T を異なる点に移す。

つまり、既約手順と $\mathrm{Orb}(T)$ の点は一対一に対応する。

Orb(T) の倍増

いきなり球面を倍増するのではなく、まずはこの Orb(T) を倍増する方法を考える。Orb(T) に属す点たちを、最後の一手で分類する。

$$\mathrm{Orb}(T) = \underline{\{T\} \sqcup [\uparrow \cdots_T] \sqcup [\downarrow \cdots_T] \sqcup \underline{[\leftarrow \cdots_T]}} \sqcup [\rightarrow \cdots_T]$$

「最後が $\leftarrow$」に属す点たちを、さらにその前の一手で分類する。

$$[\leftarrow \cdots_T] = \{\leftarrow_T\} \sqcup [\leftarrow\uparrow \cdots_T] \sqcup [\leftarrow\downarrow \cdots_T] \sqcup [\leftarrow\leftarrow \cdots_T]$$

この図形 $[\leftarrow \cdots_T]$ に「$\rightarrow$」を施すと、どうなるか？

$$\rightarrow [\leftarrow \cdots_T] = \{T\} \sqcup [\uparrow \cdots_T] \sqcup [\downarrow \cdots_T] \sqcup [\leftarrow \cdots_T]$$

以上により

$$\mathrm{Orb}(T) \cong [\leftarrow \cdots_T] \sqcup [\rightarrow \cdots_T]$$

同様にして

$$\mathrm{Orb}(T) \cong [\uparrow \cdots_T] \sqcup [\downarrow \cdots_T]$$

球面の倍増

・$\mathrm{Orb}(T)$ は「T からカチ回し手順で到達できる点」と定義したが、「$\mathrm{Orb}(T)$ の点どうしが『互いにカチ回し手順で渡れる』というコミュニティを形成しており、T はその代表点にすぎない」と見ることもできる。

・そこで、球面を「カチ回し手順で互いに渡れる点どうし」という基準で分類し、T のように、各集合の代表として 1 点ずつを選んでおく。

・たとえるならば、地球の表面を無限個の国に分け、各国の首都を定める。このとき、国はその首都の軌道である。

・「首都全体の集合」というものが当然考えられるので、これを C とすると、球面は

$$S^2 = C \sqcup [\uparrow \cdots c] \sqcup [\downarrow \cdots c] \sqcup [\leftarrow \cdots c] \sqcup [\rightarrow \cdots c]$$

と分割される。$\mathrm{Orb}(T)$ のときと全く同様に考えれば球面を倍増できる。

ごまかした箇所についての注意

・個々の（空でない）カチ回し手順は何らかの単一の「中心まわりの回転」をもたらすが、その回転軸上にある点（球面上に 2 つある）は不動点となる。

・したがって、球面上のすべての点が T のように「異なる既約手順で異なる点に移る」というわけではない。

・実際の証明においては、球面からこのような「不動点となりうる点」をすべて除去したうえで倍増し、しかるのち復元している。

まとめ