既約ルート系の分類定理の証明

宇佐見 公輔

第 5 回 すうがく徒のつどい

自己紹介

- 宇佐見 公輔（うさみ こうすけ）
- 本業はプログラマー
- 大学院で数学専攻、修士卒業後は趣味としてやっている
- Lie 代数やその周辺を好む

今日の話

今回はタイトルにあるように既約ルート系の分類定理について話します。

予定では完全な証明を述べるつもりでしたが、準備と分量の都合上、証明のさわりを述べる程度になってしまいました。すみません・・・。

ルート系の定義から丁寧に説明できればと思います（以前のすうがく徒のつどい@オンラインで話したことがある内容に近くなります）。

ユークリッド空間

Definition (ユークリッド空間)

$\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間で、内積（正定値対称形式）が定義されているものをユークリッド空間と呼びます。

E をユークリッド空間とするとき、$\alpha \in E$ と $\beta \in E$ の内積を $\langle \alpha \mid \beta \rangle$ と書くことにします。

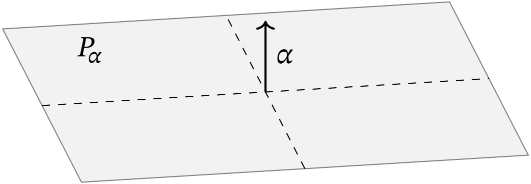
超平面

Definition (超平面)

E をユークリッド空間とします。$\alpha \in E$ に対して、超平面 P_α を

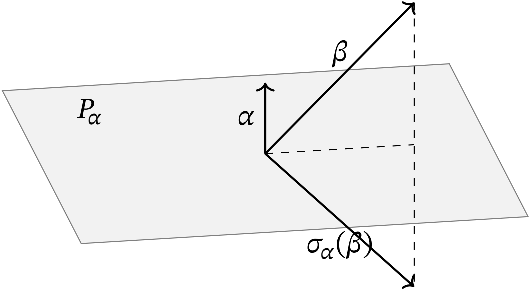
$$P_\alpha := \{ \beta \in E \mid \langle \alpha \mid \beta \rangle = 0 \}$$

と定義します。

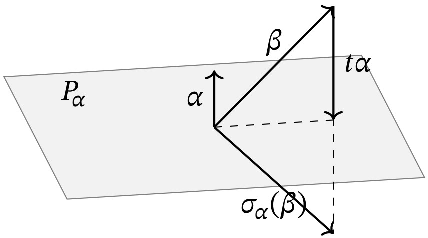


鏡映を考える

超平面 P_α に関する鏡映 σ_α を考えます。



鏡映の計算



$$\langle \beta + t\alpha \mid \alpha \rangle = 0 \iff \langle \beta \mid \alpha \rangle + t\langle \alpha \mid \alpha \rangle = 0 \iff t = -\frac{\langle \beta \mid \alpha \rangle}{\langle \alpha \mid \alpha \rangle}$$

したがって、

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \beta \mid \alpha \rangle}{\langle \alpha \mid \alpha \rangle}\alpha$$

鏡映の定義

定義として改めて述べると、次のようになります。

Definition (鏡映)

E をユークリッド空間とします。$\alpha \in E$ に対して、写像 σ_α を

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha : E &\to E \\ \beta &\mapsto \beta - c(\beta, \alpha)\alpha \end{aligned}$$

と定義し、超平面 P_α に関する鏡映と呼びます。ここで、$c(\beta, \alpha)$ は次のように定義します。

$$c(\beta, \alpha) := \frac{2\langle \beta \mid \alpha \rangle}{\langle \alpha \mid \alpha \rangle}$$

ルート系の定義

Definition (ルート系)

E をユークリッド空間とします。E の部分集合 Δ がルート系であるとは、次の条件を満たすことです。

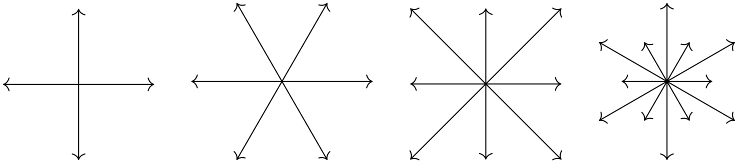
1. Δ は 0 を含まない有限集合で、E を張る。
2. $t \in \mathbb{R}$、$\alpha \in \Delta$、$t\alpha \in \Delta$ ならば、$t = \pm 1$。
3. $\alpha \in \Delta$ ならば、$\sigma_\alpha(\Delta) = \Delta$。
4. $\alpha, \beta \in \Delta$ ならば、$c(\beta, \alpha) \in \mathbb{Z}$。

定義の 2 では $\alpha \in \Delta$ に対して $-\alpha \in \Delta$ であることを含みません。

しかし、$\sigma_\alpha(\alpha) = \alpha - c(\alpha, \alpha)\alpha = \alpha - 2\alpha = -\alpha$ ですから、定義の 3 から、$\alpha \in \Delta$ ならば $-\alpha \in \Delta$ となります。

ルート系の例

2 次元ユークリッド空間のルート系の例を挙げます。



ルート系の同型

Definition (ルート系の同型)

Δ を E のルート系、Δ' を E' のルート系とします。Δ と Δ' が同型であるとは、次の条件を満たす線型同型写像 $\phi : E \to E'$ が存在することです。

$$c(\beta, \alpha) = c(\phi(\beta), \phi(\alpha))$$

なお、ルート系の同型写像では内積が保たれている必要はありません。

2 つのルートのなす角

ここから、2 つのルートの関係を考えていきます。

$\varDelta$ を E のルート系とし、$\alpha, \beta \in \varDelta$、$\alpha$ と β は線型独立とします。

α と β がなす角を θ とします（$0 \leq \theta \leq \pi$）。定義から
$\langle \alpha \mid \beta \rangle = |\alpha||\beta| \cos\theta$ です。したがって、

$$c(\beta, \alpha) = \frac{2\langle \beta \mid \alpha \rangle}{\langle \alpha \mid \alpha \rangle} = \frac{2|\beta||\alpha| \cos\theta}{|\alpha|^2} = \frac{2|\beta|}{|\alpha|} \cos\theta$$

となるので、

$$c(\alpha, \beta)c(\beta, \alpha) = \frac{2|\alpha|}{|\beta|} \cos\theta \frac{2|\beta|}{|\alpha|} \cos\theta = 4\cos^2\theta$$

となります。

2つのルートのなす角

$$c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha) = 4\cos^2\theta$$

ですが、ルート系の定義 4 から $c(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}$、$c(\beta,\alpha) \in \mathbb{Z}$ です。したがって、$c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha) \in \{0,1,2,3,4\}$ です。

$c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha) = 4$ の場合は $\cos^2\theta = 1$ より、$\theta = 0$ または $\theta = \pi$ です。どちらの場合も α と β が線型独立ではないので除外します。

$c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha) = 0,1,2,3$ の場合、それぞれなす角が求まります。

- $c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha) = 0$ のとき、$\theta = \frac{1}{2}\pi$。
- $c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha) = 1$ のとき、$\theta = \frac{1}{3}\pi$、$\theta = \frac{2}{3}\pi$。
- $c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha) = 2$ のとき、$\theta = \frac{1}{4}\pi$、$\theta = \frac{3}{4}\pi$。
- $c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha) = 3$ のとき、$\theta = \frac{1}{6}\pi$、$\theta = \frac{5}{6}\pi$。

2 つのルートの可能な組み合わせ

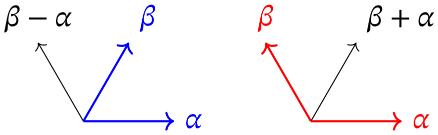
$c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha)$	$\cos^2\theta$	θ	$c(\alpha,\beta)$	$c(\beta,\alpha)$	$\frac{\lvert\beta\rvert}{\lvert\alpha\rvert}$
0	0	$\frac{1}{2}\pi$	0	0	任意
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}\pi$	1	1	1
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}\pi$	-1	-1	1
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\pi$	1	2	$\sqrt{2}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	-1	-2	$\sqrt{2}$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}\pi$	1	3	$\sqrt{3}$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}\pi$	-1	-3	$\sqrt{3}$

ルートの和と差

Theorem

Δ を E のルート系とします。$\alpha, \beta \in \Delta$、α と β は線型独立とします。このとき、次が成り立ちます。

1. $\langle \beta \mid \alpha \rangle > 0$ ならば、$\beta - \alpha \in \Delta$。
2. $\langle \beta \mid \alpha \rangle < 0$ ならば、$\beta + \alpha \in \Delta$。



ルートの和と差

Proof.

$\langle \beta \mid \alpha \rangle > 0$ の場合を示します。先ほどの表から、$c(\alpha, \beta) = 1$ または $c(\beta, \alpha) = 1$ です。$c(\beta, \alpha) = 1$ のとき

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - c(\beta, \alpha)\alpha = \beta - \alpha$$

となりますが、ルート系の定義 3 から $\sigma_\alpha(\beta) \in \Delta$ です。したがって、$\beta - \alpha \in \Delta$ です。
同様に $c(\alpha, \beta) = 1$ のとき、$\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta$ から $\alpha - \beta \in \Delta$ です。
よって、$\beta - \alpha = -(\alpha - \beta) \in \Delta$ です。
$\langle \beta \mid \alpha \rangle < 0$ の場合も同様です。$c(\alpha, \beta) = -1$ または $c(\beta, \alpha) = -1$ であることから示せます。 $\square$

ルート列

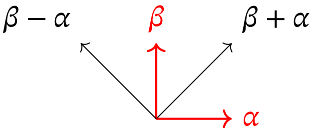
Theorem

Δ を E のルート系とします。$\alpha, \beta \in \Delta$、α と β は線型独立とします。

$$p := \max\{ k \in \mathbb{N} \mid \beta + k\alpha \in \Delta \} \quad q := \min\{ k \in \mathbb{N} \mid \beta + k\alpha \in \Delta \}$$

とするとき、次が成り立ちます。

1. $q \leq k \leq p$ ならば、$\beta + k\alpha \in \Delta$。
2. $\{ \beta + k\alpha \mid q \leq k \leq p \}$ は σ_α で不変。



ルート系の底

Theorem

Δ を E のルート系とします。Δ の部分集合 Π で、次の条件を満たすものが存在します。

1. Π は E の基底。
2. $\beta \in \Delta$ を $\beta = \sum_{\alpha\in\Pi} k_\alpha \alpha$ と表すとき、各 k_α は整数で、すべて 0 以上またはすべて 0 以下。

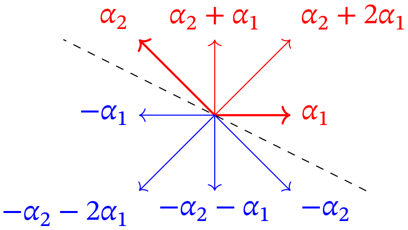
Definition

この Π を Δ の底と呼びます。

また、$\beta = \sum_{\alpha\in\Pi} k_\alpha \alpha$ の各 k_α が 0 以上のとき β を正のルート、0 以下のとき β を負のルートと呼びます。

ルート系の底

底の例を挙げます。



$\{\alpha_1,\alpha_2\}$がルート系の底になっており、図の中で赤いものが正のルート、青いものが負のルートです。

ルート系の同型と底

Theorem

Δ と Δ' を E のルート系とします。Δ の底を $\Pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$、$\Delta'$ の底を $\Pi' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ とします。また、$c_{ij} := c(\alpha_j, \alpha_i)$、$c'_{ij} := c(\alpha'_j, \alpha'_i)$ とします。このとき、次は同値です。

1. Δ と Δ' は同型。
2. 底の番号づけをうまく入れ替えると、任意の i, j に対して $c_{ij} = c'_{ij}$。

カルタン行列

Definition (カルタン行列)

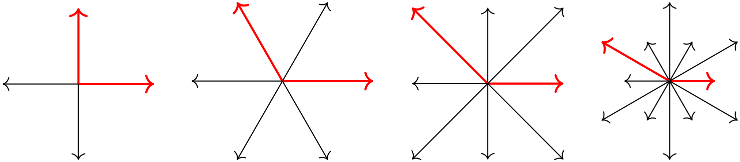
Δ を E のルート系とします。Δ の底を $\Pi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ とします。c_{ij} を次のように定義します。

$$c_{ij} := c(\alpha_j, \alpha_i)$$

このとき、n 次正方行列 $C = (c_{ij})$ を Δ のカルタン行列と呼びます。

先ほどの定理から、ルート系が同型であるとき、底の番号づけをうまく入れ替えるとカルタン行列が一致します。

カルタン行列の例



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

コクセターグラフ

Definition

Δ を E のルート系とします。Δ のカルタン行列を $C=(c_{ij})$ とします。Δ のコクセターグラフを次のように定義します。

1. 頂点は n 個とします。
2. 頂点 i と j を、$c_{ij}c_{ji}\in\{0,1,2,3\}$ 本の辺で結びます。

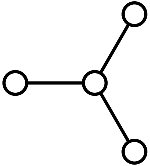
ディンキン図形

Definition

Δ を E のルート系とします。Δ のカルタン行列を $C = (c_{ij})$ とします。Δ のディンキン図形を次のように定義します。

1. 頂点は n 個とします。
2. 頂点 i と j を、$c_{ij}c_{ji} \in \{0, 1, 2, 3\}$ 本の辺で結びます。
3. $|c_{ij}| < |c_{ji}|$ のとき、頂点 i から頂点 j に向きをつけます。

ディンキン図形からカルタン行列を復元する



$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ディンキン図形を分類する

連結なディンキン図形のなかで可能なものを調べます。

そのために、次のような ϵ 系を考えます（一般的には呼び名がついていませんが、便宜上名前をつけておきます）。

ユークリッド空間 E の部分集合 A が ϵ 系であるとは、次の条件を満たすことです。

1. $A = \{e_1, \dots, e_n\}$ の元は単位ベクトルで、線型独立。
2. $\langle e_i \mid e_j \rangle \leq 0$（$i \neq j$）。
3. $4\langle e_i \mid e_j \rangle^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$。

ルート系の底のそれぞれを正規化して単位ベクトルにすると、ϵ 系になります。

ϵ 系のコクセターグラフ

ϵ 系のコクセターグラフを考えます。

$A = \{e_1, \ldots, e_n\}$ を ϵ 系とします。A のコクセターグラフを次のように定義します。

1. 頂点は n 個とします。
2. 頂点 i と j を、$4\langle e_i \mid e_j\rangle^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ 本の辺で結びます。

ϵ 系のコクセターグラフをすべて求めることができれば、ディンキン図形をすべて求めることができます。

ϵ 系の性質

ϵ 系は基底であるという条件がないため、次が言えます。

Lemma

ϵ 系から元を取り除いても ϵ 系になります。

Proof.

ϵ 系の定義の中には、元を取り除くことで満たさなくなる条件はありません。 □

コクセターグラフで言えば、頂点を取り除いても ϵ 系のコクセターグラフになります。

ϵ 系の性質

Lemma

$A = \{e_1, \ldots, e_n\}$ を ϵ 系とします。$\langle e_i \mid e_j \rangle \neq 0$（$i < j$）となる i と j の組の個数は n より小さいです。

コクセターグラフで言えば、辺でつながる頂点の組の数（＝重複度を除いた辺の数）は頂点の数より小さいです。

Proof.

$e := \sum_{i=1}^{n} e_i$ とします。ϵ 系の元の線型独立性から、$\langle e \mid e \rangle > 0$ です。$\langle e \mid e \rangle$ を考えると次のようになります。

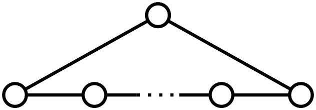
$$\langle e \mid e \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid e_i \rangle + \sum_{i \neq j} \langle e_i \mid e_j \rangle = n + \sum_{i<j} 2\langle e_i \mid e_j \rangle$$

ここで、$\langle e_i \mid e_j \rangle \neq 0$ となる組を考えます。このとき、$\langle e_i \mid e_j \rangle \leq 0$ と $4\langle e_i \mid e_j \rangle^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ より、$2\langle e_i \mid e_j \rangle \leq -1$ です。
$2\langle e_i \mid e_j \rangle \leq -1$ となる i と j の組が n 個以上あるとすると、
$\langle e \mid e \rangle > 0$ に反します。したがって、$\langle e_i \mid e_j \rangle \neq 0$ となる組の個数は n より小さいです。 □

ϵ 系の性質

Lemma

ϵ 系のコクセターグラフはサイクルを含みません。



Proof.

サイクルをなす k 個の頂点を考えます。これは辺が k 本必要です。このため、サイクルは ϵ 系になりません。
ϵ 系から元を取り除いても ϵ 系にならなくてはならないため、ϵ 系のコクセターグラフはサイクルを含むことができません。 $\square$

ϵ 系の性質

Lemma

ϵ 系のある頂点から出る辺の本数は、重複を含めて 3 本以下です。

これにより、頂点のまわりのパターンがかなり限定されます。

とくに次がわかります。これにより、以降は頂点を結ぶ辺の本数は 2 本以下のみ考えれば十分です。

Lemma

3 本の辺で結ばれた頂点の組を含む ϵ 系のコクセターグラフは、次のひとつしかありません。

ϵ 系の性質

Lemma

次のように *1* 本の辺で結ばれた頂点のグループを、ひとつの頂点に置き換えても ϵ 系になります。

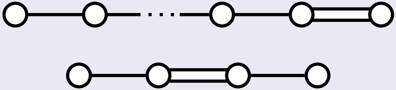
これと先ほどの補題から、2 本の辺で結ばれた頂点の組はひとつしかないこと、分岐はひとつしかないこと、その両方を含むものはないこと、がわかります。

ϵ 系の性質

2 本の辺で結ばれた頂点の組があるとき、グラフの長さが限定されます。

Lemma

2 本の辺で結ばれた頂点の組を含む ϵ 系のコクセターグラフは、次のふたつしかありません。

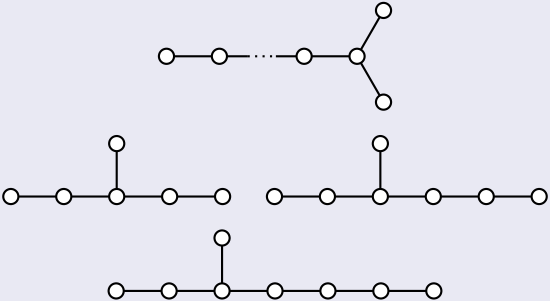


ϵ 系の性質

分岐があるとき、グラフの長さが限定されます。

Lemma

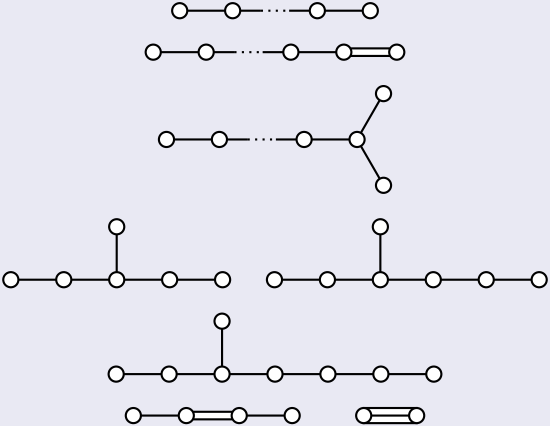
分岐を含む ϵ 系のコクセターグラフは、次のものしかありません。



ϵ 系のコクセターグラフの分類

Theorem

ϵ 系のコクセターグラフは次のものしかありません。



ディンキン図形の分類

ϵ 系のコクセターグラフそれぞれに対して、同じコクセターグラフを持つルート系が存在することは、別途確かめることができます。これは実際にカルタン行列を復元してみればわかります。

これにより、ディンキン図形の分類も導くことができます。

Theorem

ディンキン図形は次のものしかありません。

- A_n $(n \geq 1)$
- B_n $(n \geq 2)$
- C_n $(n \geq 3)$
- D_n $(n \geq 4)$
- E_6, E_7, E_8
- F_4
- G_2

参考文献

- Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, James E. Humphreys, 1972
- リー環の話, 佐武一郎, 1987
- はじめて学ぶリー環, 井ノ口順一, 2018

Humphreys の本や佐武の本には分類定理の証明が書いてあります。井ノ口の本は分類定理の証明はありませんが、ルート系の説明が丁寧です。