無理数度の周辺知識と関連する未解決問題

佐久間雄大

【目次】

【目次】

定義(無理数度)

α を実数とする．定数 $C > 0$ が存在して，α と異なる全ての有理数 $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ に対し

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{\mu}}$$

が成り立つとき，μ を α の 1 つの**無理数度**と呼ぶ．特に，μ の下限を**最良無理数度**と呼ぶ.

α を実数とする．定数 $C > 0$ が存在して，α と異なる全ての有理数 $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ に対し

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{\mu}}$$

が成り立つとき，μ を α の 1 つの**無理数度**と呼ぶ．特に，μ の下限を**最良無理数度**と呼ぶ．

【イメージ】

μ **小**→ $\frac{C}{q^{\mu}}$ が大きくなるので範囲が狭くなる(厳しくなる)

μ **大**→ $\frac{C}{q^{\mu}}$ が小さくなるので範囲が広くなる(緩くなる)

最良無理数度の意味は

『どこまで範囲を厳しくできる？』

【具体例】

・ $\sqrt{2}$ の最良無理数度は 2

・ π の最良無理数度は未だに不明

例）$\sqrt{2}$ の最良無理数度は 2 →全ての有理数 $\frac{p}{q}$ に対し $\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^2}$ が成り立つ

最良無理数度(下限)が 2 なら，もっと小さくしたらどうなる？

例えば $\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{1.9}}$ だとダメなの？

$C=\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}$ とすると，全ての有理数 $\frac{p}{q}$ に対し $\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^2}$ が成り立つ.

$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{1.9}}$ だと $\frac{p}{q}=\frac{8119}{5741}$ のときに右辺の方が大きいからダメ.

左辺 $=\left|\sqrt{2}-\frac{8119}{5741}\right| = 1.0727 \ldots \times 10^{-8}$　　右辺 $=\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)} \times \frac{1}{5741^{1.9}} = 1.4932 \ldots \times 10^{-8}$

【目次】

定理(リウヴィルの定理)

α を次数 $d \geq 2$ の代数的数とする．また，k を $P(x) = kP_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$ を満たす正整数とする．このとき全ての有理数 $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ に対して

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^d}$$

が成り立つ．ただし，

$$C = \min\left(1, \frac{1}{C'}\right), \quad C' = \max_{\alpha-1 \leq x \leq \alpha+1} |P'(x)|$$

定理(リウヴィルの定理)

α を次数 $d \geq 2$ の代数的数とする．また，k を $P(x) = kP_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$ を満たす正整数とする．このとき全ての有理数 $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ に対して

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^d}$$

が成り立つ．ただし，

$$C = \min\left(1, \frac{1}{C'}\right), \quad C' = \max_{\alpha-1\leq x\leq\alpha+1} |P'(x)|$$

代数的数

0 でない $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在して

$P(\alpha) = 0$ となるとき α を**代数的数**と呼ぶ．

最小多項式

$P(\alpha) = 0$ を満たす $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ のうち

最高次の係数が 1 で次数が最小のものを

最小多項式と呼ぶ．さらに**最小多項式**の次

数を **α の次数**と呼ぶ．

【具体例】

$\sqrt{2}$ は $x^2 - 2$, $4x^3 - 8x$, $3x^2 + x^2 - 6x - 2$ などに代入すると 0 になるので**代数的数**である．

$x^2 - 2$	$4x^3 - 8x$	$3x^2 + x^2 - 6x - 2$
○	×	×

定理(リウヴィルの定理)

α を次数 $d \geq 2$ の代数的数とする．また，k を $P(x) = kP_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$ を満たす正整数とする．このとき全ての有理数 $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ に対して

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^d}$$

が成り立つ．ただし，

$$C = \min\left(1, \frac{1}{C'}\right), \quad C' = \max_{\alpha-1 \leq x \leq \alpha+1} |P'(x)|$$

【最良無理数度】

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} 1\ (\text{有理数}) \\ 2\ (\text{無理数}) \\ \infty\ (\text{リウヴィル数など}) \end{cases}$$

定義(リウヴィル数)

α を実数とする．十分大きい n に対して

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ $(q \geq 2)$ が存在するとき，

α を**リウヴィル数**と呼ぶ.

【イメージ】

リウヴィル数だと

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^n}$$

が全ての有理数 $\frac{p}{q}$ に対して成り立たない.

【目次】

Flint Hills series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 (\sin n)^2}$$

収束するの？？

2011(Alekseyev)　収束するならば $\mu(\pi) \leq 2.5$

2022(Meiburg)　$\mu(\pi) < 2.5$ ならば収束する

2023(Zapata)　**Flint Hills seriesは収束**し，値は $30.3144\ldots$ である

現在　$2 \leq \mu(\pi) \leq 2.5$ だが，具体的な値は不明

定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^u|\sin n|^v}\right)$$

が収束するならば， $\mu(\pi) \leq 1 + \frac{u}{v}$ である.

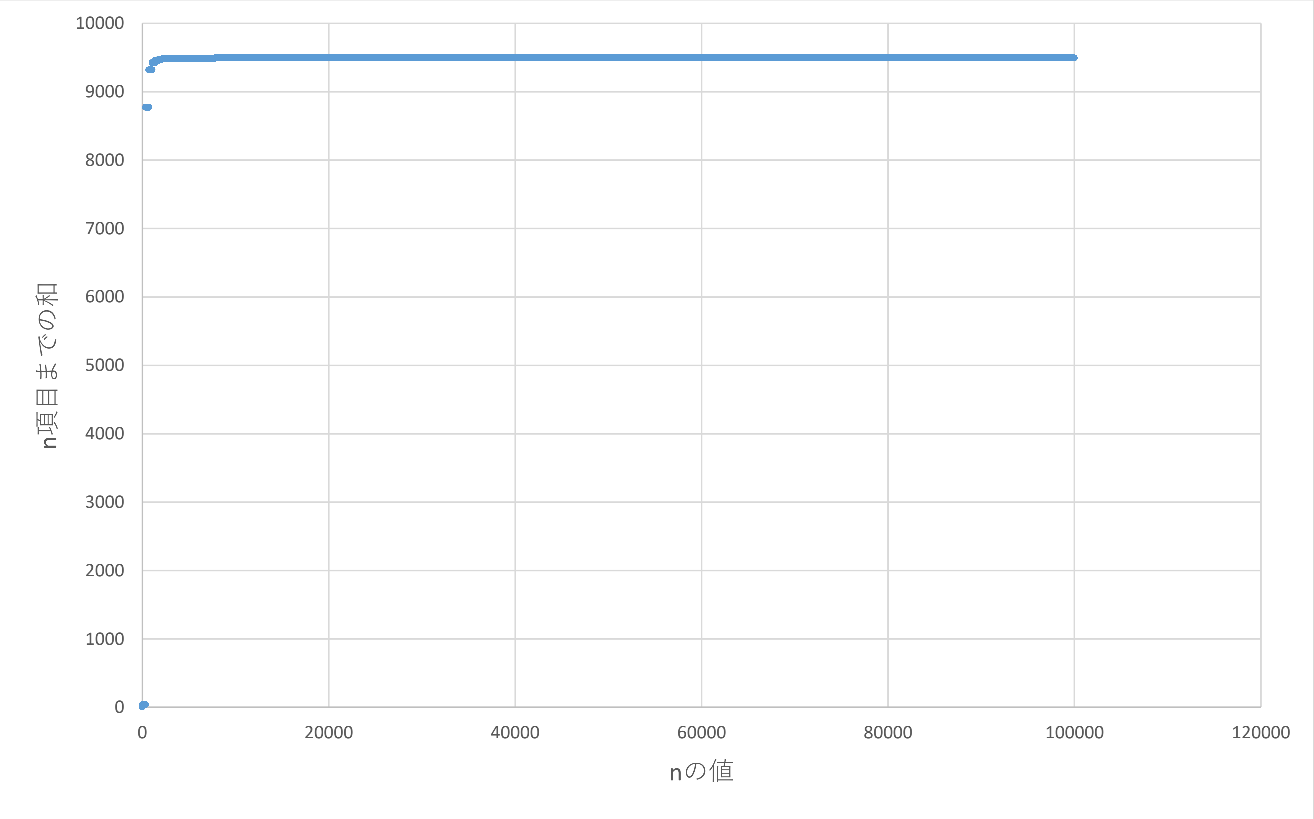
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\boldsymbol{u}}(\sin n)^{\boldsymbol{u}}}$$

収束が分かれば $\boldsymbol{\mu(\pi) = 2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\sin n)^2}$ 調べてみた！

9488.9133 … くらいになりそう．

先行研究では，$\mu(\pi) = 2$ になると予想されているので収束するのでは？



$n = 100000$ までの総和を調べた図

興味を持ってくれた人に向けて

・Daniel Duverney著，塩川 宇賢訳，数論，森北出版，2020年.

数論の話題を広く扱っており，学習する順番を最初に提案してくれるページがある．演習問題も解答付きのため，自学しやすい内容となっている.

・塩川 宇賢著，無理数と超越数，森北出版，1999年.

前半が無理数，後半が超越数の話題になっている．無理数や超越数の具体例と証明が豊富でとても面白いが，行間を自分で埋めないといけないので読むのは大変と言われている.

・木村 俊一著，連分数のふしぎ，講談社，2012年.

連分数の基礎と応用が詰まっており，通常の数学書では見ないような連分数の話題を知ることが出来る.

ブルーバックスのシリーズであるため，読みやすさは抜群.