



アフィンスキームの幾何 から見る 可換環論

①

-1. 自己紹介

あ

0, Introduction

1, スペクトルスキームの幾何描写

2, 中国剰余定理

3, Noether 局所環の次元論

-



~1. 自己紹介

①

名前: 立腹屠 (Twitter : @rippukusou)
現X

身分: 京都大学大学院 理学研究科 数学-数理解析専攻

RIMS

数理解析系 D1

(もちろん D2!)

専門: ~~組合せ論的遠アール幾何学~~

∩
遠アール幾何学

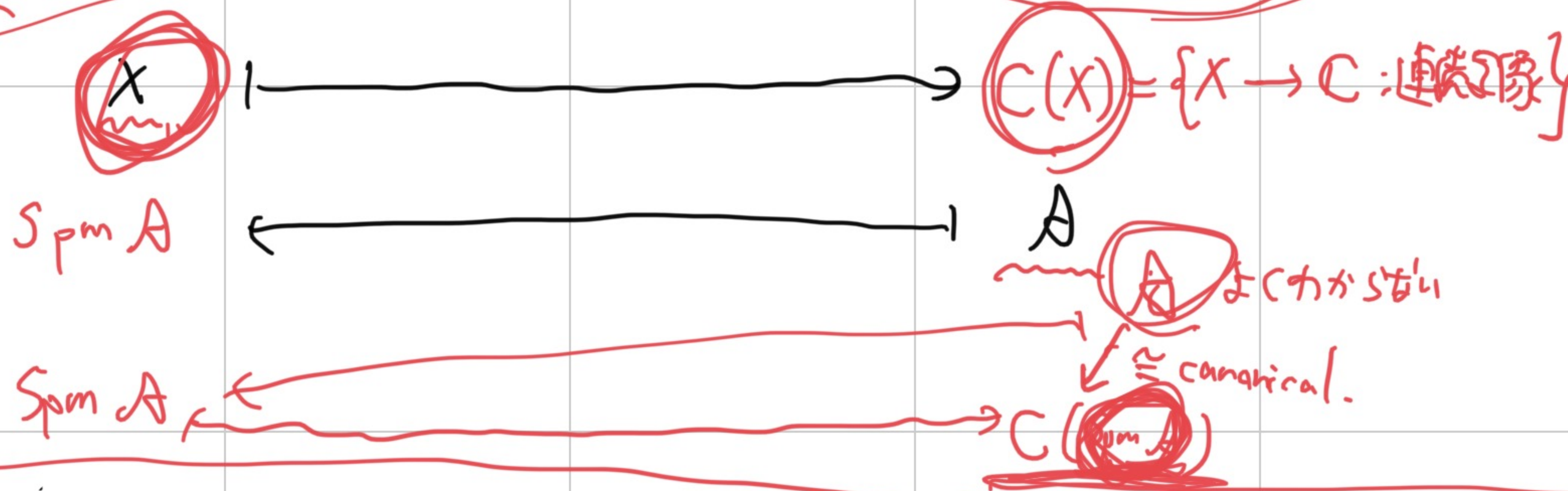
∩
数論幾何学



0. Introduction

環 = 関数環

(2)

Fact. (Gelfand-Naimark 双対性) "理論が等価" (言い換え)(コンパクト Hausdorff 空間
連続写像)反変圏同値 $\xrightarrow{\sim}$ (単位的可換 C^* 環,
*-準同型)

言える

$$X \xrightarrow{F} Y$$

$$C(X) \xrightarrow{C(F)} C(Y)$$

$$\tilde{C(F)}(f)$$

$$X \xrightarrow{F} Y$$

$$Y$$

$$C(F)(f)$$

$$C(F)(f)$$

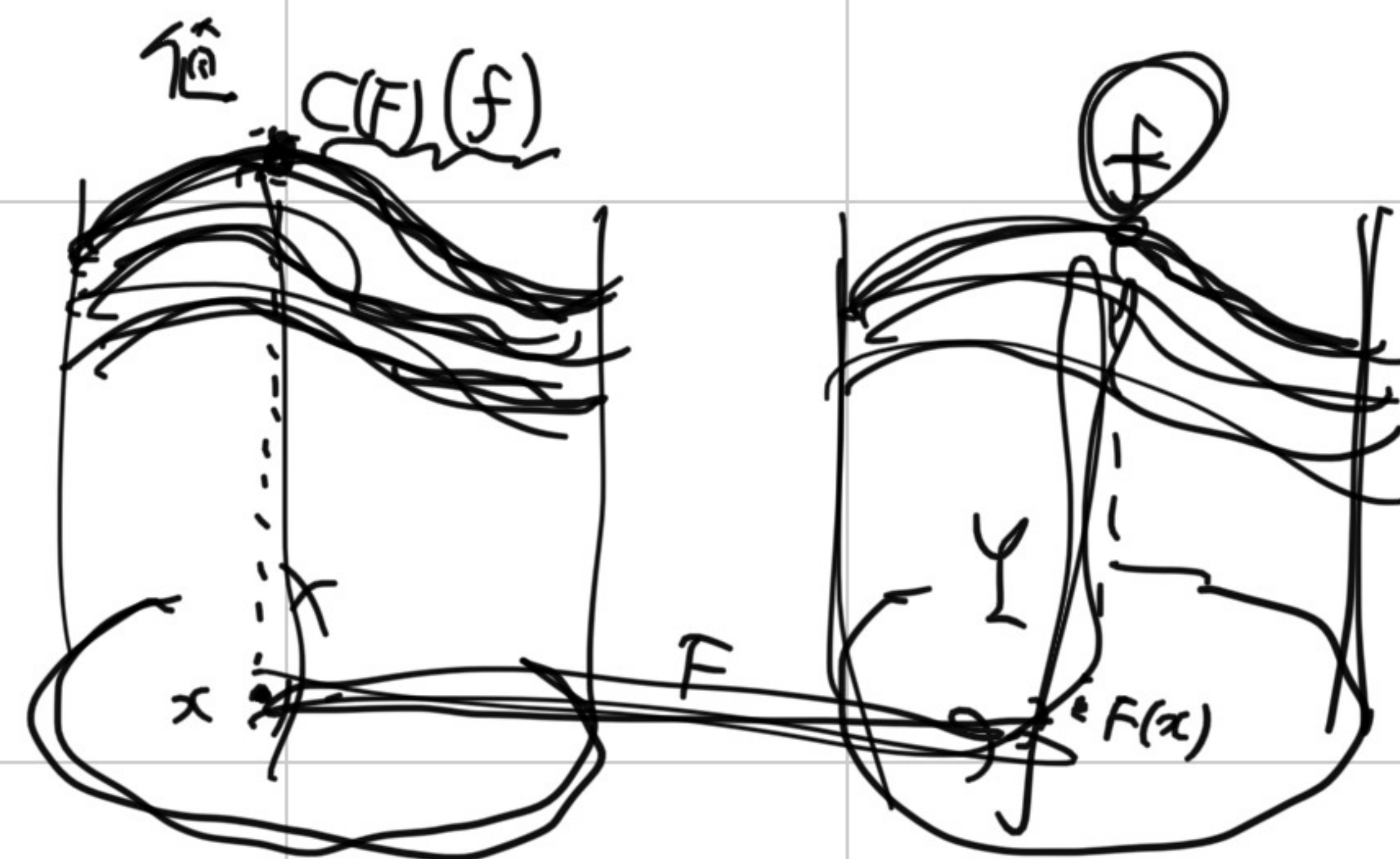

 $\text{Spm } A$

A は C が S たい
 $\cong$ canonical.
 $C(\text{Spm } A)$

話される

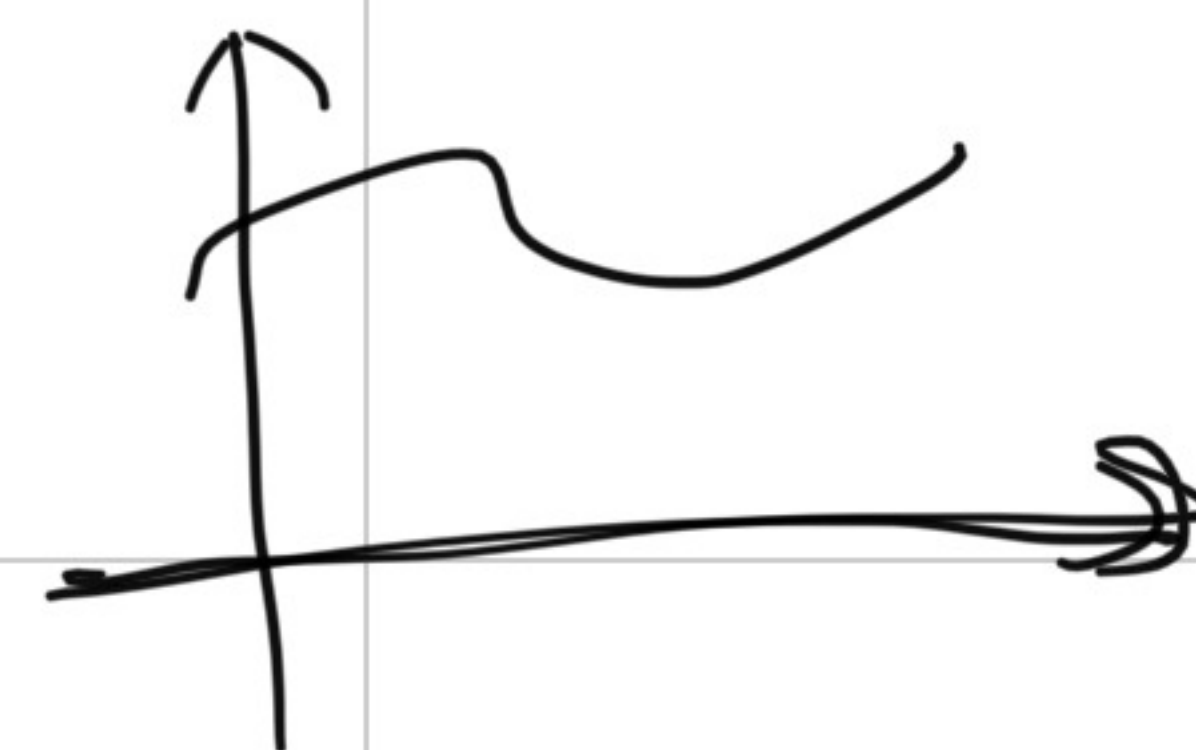
$$X \xrightarrow{F} Y$$

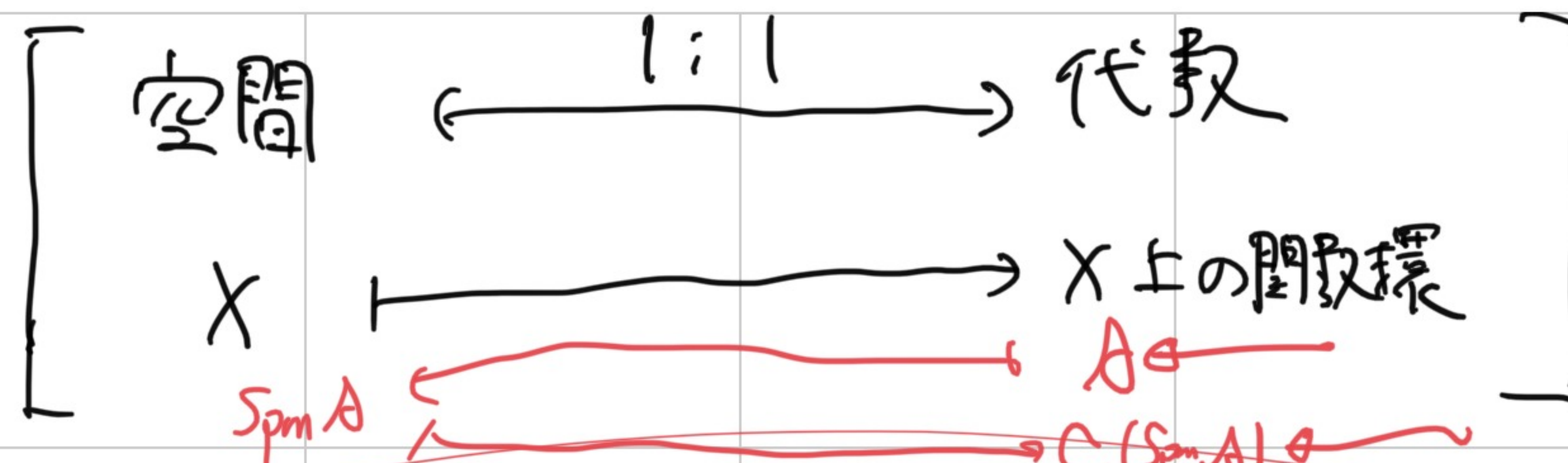
$$C(X) \xrightarrow{C(F)} C(Y)$$



関数の引き戻し

$$(C(F)(f))(x) = f(F(x))$$





③

単位的可換 C^* 環の、関数環としての理解

では、Q. 一般の単位的可換環 についてはどうか？

$\mathbb{Z}$, $K[x]$ (以下, “環”)

A.

アフィンスキーム

上の“関数環”として

理解する, という立場を
採用,



(アフィン)スキーム... 位相空間 + "構造層"

④

可換環

ASpec A

+

 $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ 

ここに「位相空間 Spec A 上の「関数環」は A だと考えますよ」というデータも入っている

A に対応する
アフィンスキーム

(理念) 的には

(実質) 的には

代数的対象

A

に 対応する 空間的対象

A + (A の隠れた構造)



A

||

A 上の
関数環

「アフィンスキーム $\xrightarrow{||}$ 可換環
 $X \xrightarrow{\quad} X$ 上の関数環」

ほぼ 同義反復



1. 素スペクトラムの幾何描像

 A : ^{単位的}可換環
環

⑤

$$\text{Spec } A \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ は } A \text{ の素イデアル} \}$$

例 $\circ \text{Spec}(\text{零環}) = \emptyset$

$$(\text{Spec } A = \emptyset \Leftrightarrow A: \text{零環})$$

$$\circ \text{Spec } \mathbb{F} = \{ (0) \}$$

$$\circ \text{Spec } \mathbb{Z} = \{ (0), (2), (3), (5), (7), (11), (13), \dots \}$$

$$\circ \text{Spec}(\text{PID}) = \{ (0) \} \sqcup \{ \text{素元} \}$$

$\cong \{ (0) \} \sqcup \{ \text{素元} \}$
 $\text{K}[x]$ 同構



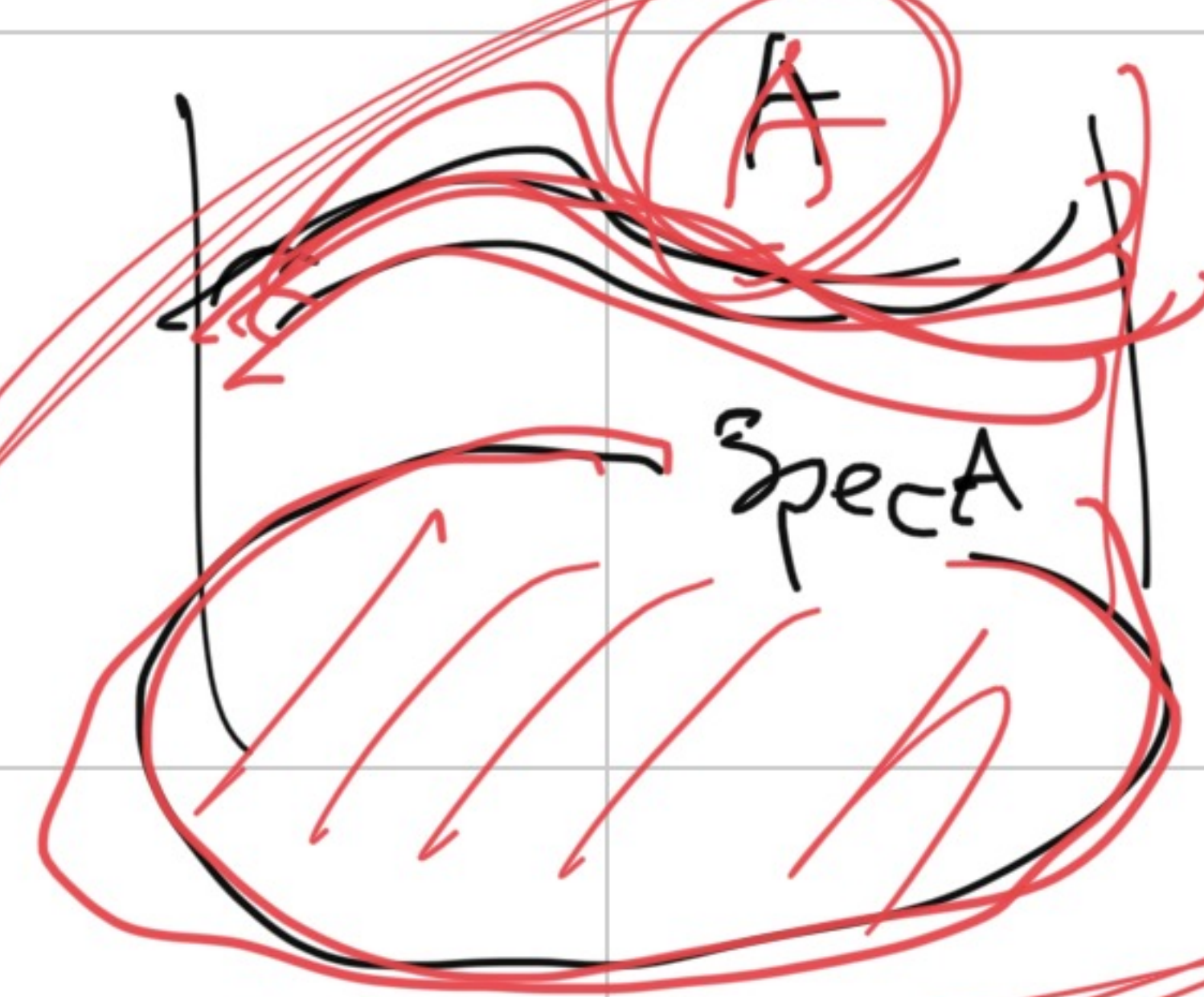
$\text{Spec} A$ は, 定義としては A の部分集合の集合だが,

⑥

あくまでも 空間的なものとして想像したい (ノブキ?)



$$\text{Spec} A = \{P, Q, \dots\}$$



重要なのが 次の原理

原理

$$f \in A$$

A の元

A の素イデアル

$$f \in P \iff$$

数値

"関数" f は "点" $P \in \text{Spec} A$ へ

値 0 をとる

比・商

" $f(P) = 0$ "
" f は点 P で消える"



原理

$$f \in \mathcal{P}$$

数字

比喩

“関数” $f \in A$ は
点 $P \in \text{Spec } A$ で
消える
“ $f(P) = 0$ ”

注

最終的には
最も密な数学的
主張として
理解可能

帰結

素イデアル $\mathcal{P} \subset A$

$\text{Spec } A$ の点 P で消える,
 $\text{Spec } A$ 上の関数全体 $\subset A$

$$\left[\begin{array}{l} \forall f, g \in A, \\ fg \in \mathcal{P} \Rightarrow f \in \mathcal{P} \vee g \in \mathcal{P} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$\text{Spec } A$ 上の関数 f, g の積 fg
が P で消えないうち、 f か g が
消える

$$f \in \sqrt{0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\forall P \subset A: \text{prime},}{f \in \mathcal{P}}$$

$\text{Spec } A$ 上の関数 f は,
 $\text{Spec } A$ の全ての点で消える。

$$f = 0$$



この原理に基づく、次がわかる

⑧

$\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subset A : \text{prime}$ ($\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec } A$)

$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$

(2.3)

$\Leftrightarrow$

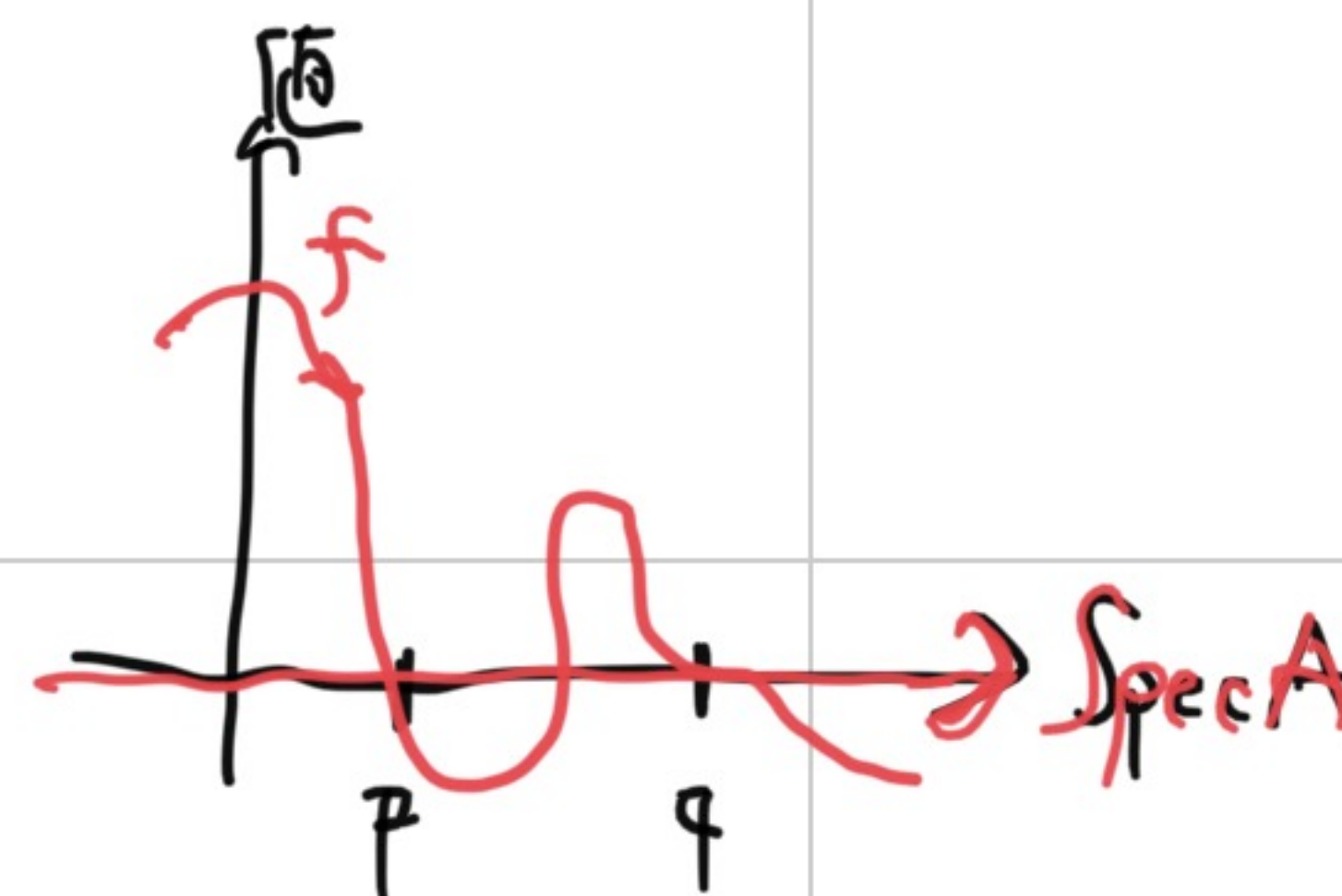
$\forall f \in A,$

$f \in \mathfrak{p} \Rightarrow f \in \mathfrak{q}$

$\Leftrightarrow$

$\forall f \in A,$

f が点 $\mathfrak{p}$ で消える $\Rightarrow f$ が点 $\mathfrak{q}$ で消える





$P \subset Q$ $\Leftrightarrow$ 「^点 P で値 0 の 関数は,
点 Q でも 値 0 となる」

⑨

整合的な

一つの解釈

点 P は点 Q を「含む」

极大イデアル

極小点

極小素イデアル

极大点

Q
— P

注

大きい素イデアル $P \subset A$

ほど

小さい点 $P \in \text{Spec } A$

となる

Q
— P



134 @ $\text{Spec } \mathbb{Z}$

$(0) \subset (p)$

$\text{Spec } \mathbb{Z}$

$10 \in \mathbb{Z}$

$10 \in \mathbb{Z}$



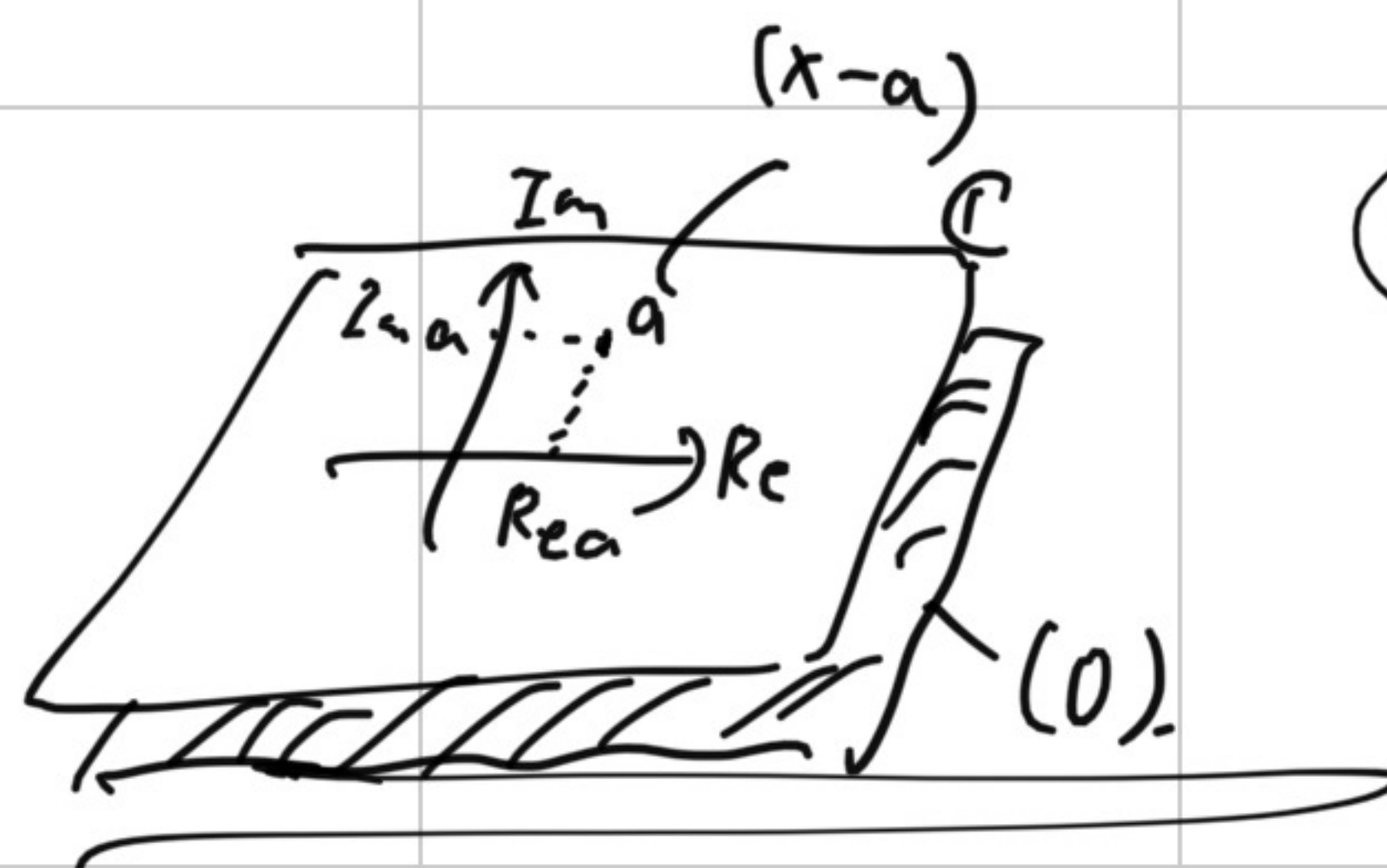
(10)

$\text{Spec}(\mathbb{Z})$ とも同様,
↑ 10 ∈ Z

@ $\text{Spec } \mathbb{C}[X]$

($\text{Spec}(\mathbb{Z})$ とは)

$$\text{Spec } \mathbb{C}[X] = \underbrace{\{(0)\}}_{(x-a)} \cup \{(x-a) \mid a \in \mathbb{C}\}$$





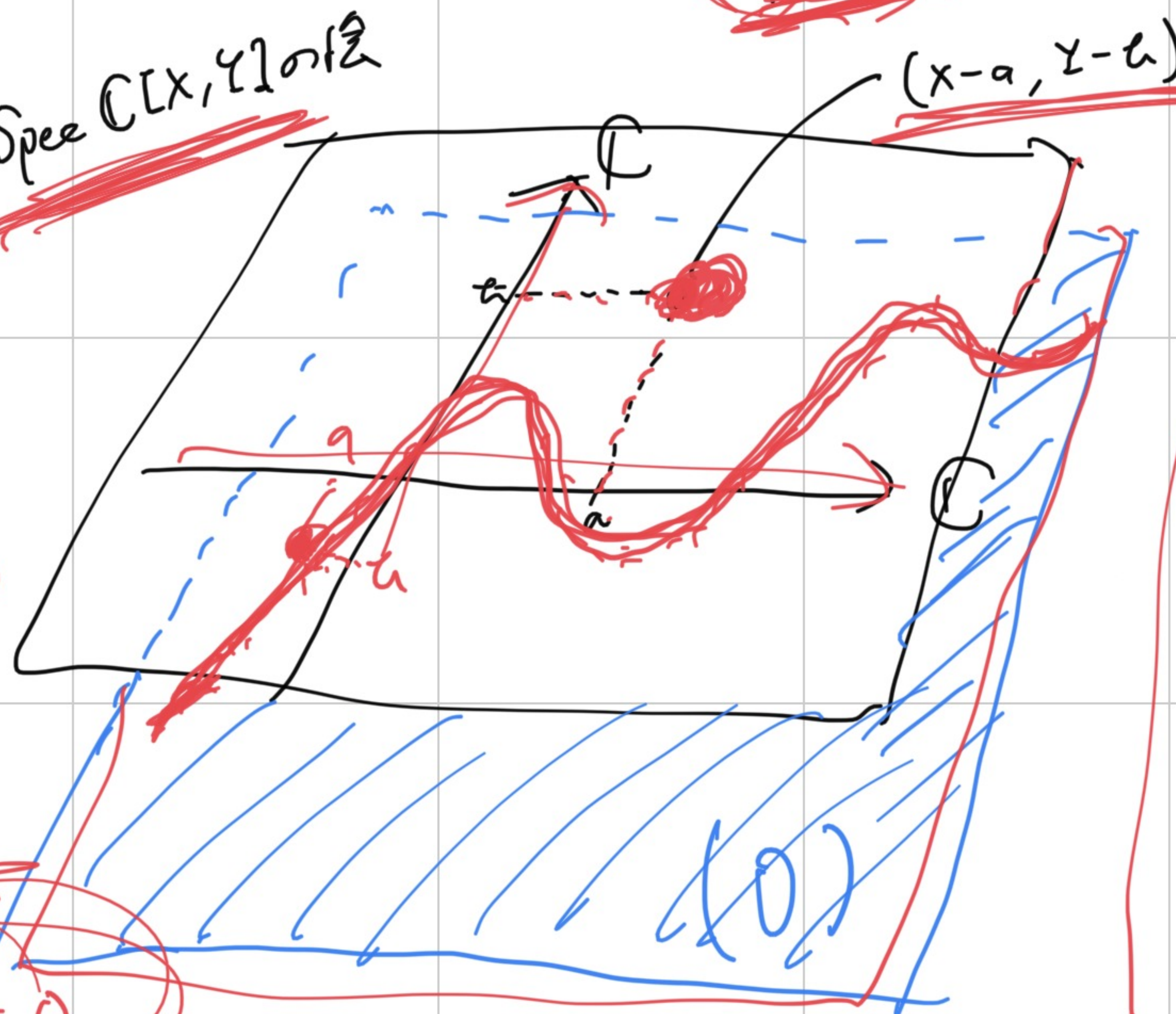
$$\text{Spec } \mathbb{C}[x, y] \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{極大} \\ (x-a, y-b) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} (a, b) \in \mathbb{C}^2 \quad (11)$$

の要素

$(f(x, y))$ ($f(x, y)$: 既約多項式)

(0)

Spec $\mathbb{C}[x, y]$ の図



(a, b) ("含む")

exer

$$(f(x, y)) = (x-a, y-b)$$

$$\Leftrightarrow f(a, b) = 0$$

$$f(x, y) \in (x-a, y-b)$$

比較

既約 $f(x, y)$ は,
 $\not\in (x-a, y-b)$

$$\subseteq \text{Spec } \mathbb{C}[x, y] \text{ 中}$$

$$(f(x, y))$$

$$f(a, b) = 0$$

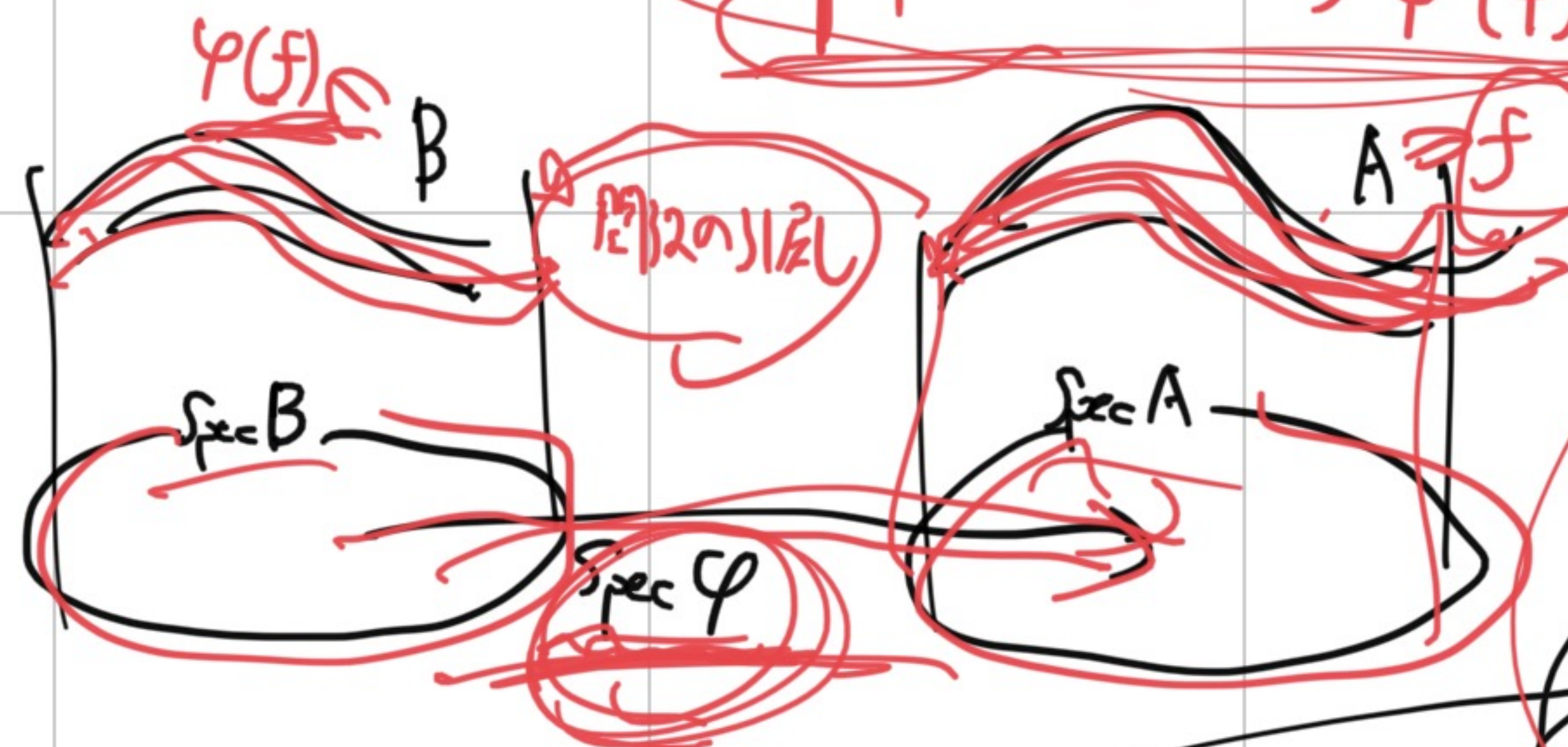


準同型の
対象物

$$A \xrightarrow{\varphi} B \rightsquigarrow \text{Spec } B \xrightarrow{\text{Spec } \varphi} \text{Spec } A$$

(12)

(解釈)



$$\text{Spec } \varphi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$$

(2)より, "問題の引戻し"

$$B \leftarrow A$$

が φ_1 -一致する.

問題

この解釈が十分に整合的であるような
 $\text{Spec } \varphi$ の定義の仕方は,

$$\text{Spec } B \rightsquigarrow \text{Spec } A$$

以外に存在しない

$$\varphi \mapsto \varphi'(\varphi)$$

(cf. 原理)

ヒント

$\varphi(f)$ が点 φ で消える



f が点 $(\text{Spec } \varphi)(\varphi)$ で消える.

剰余環 $I \subset A$: イデアル

(13)

$$A \xrightarrow{\pi} A/I$$

$$\text{Spec } A/I \xrightarrow{\text{Spec } \pi} \text{Spec } A$$

U

$$V(I) = \{P \in \text{Spec } A \mid I \subset P\}$$

注 $\text{Spec } A$ は, Zariski 位相

" $V(I)$ " を closed とする位相
を入れてやる.

原理

に基づくこと……

I の元の共通零点
集合 A/I $\text{Spec } A/I$

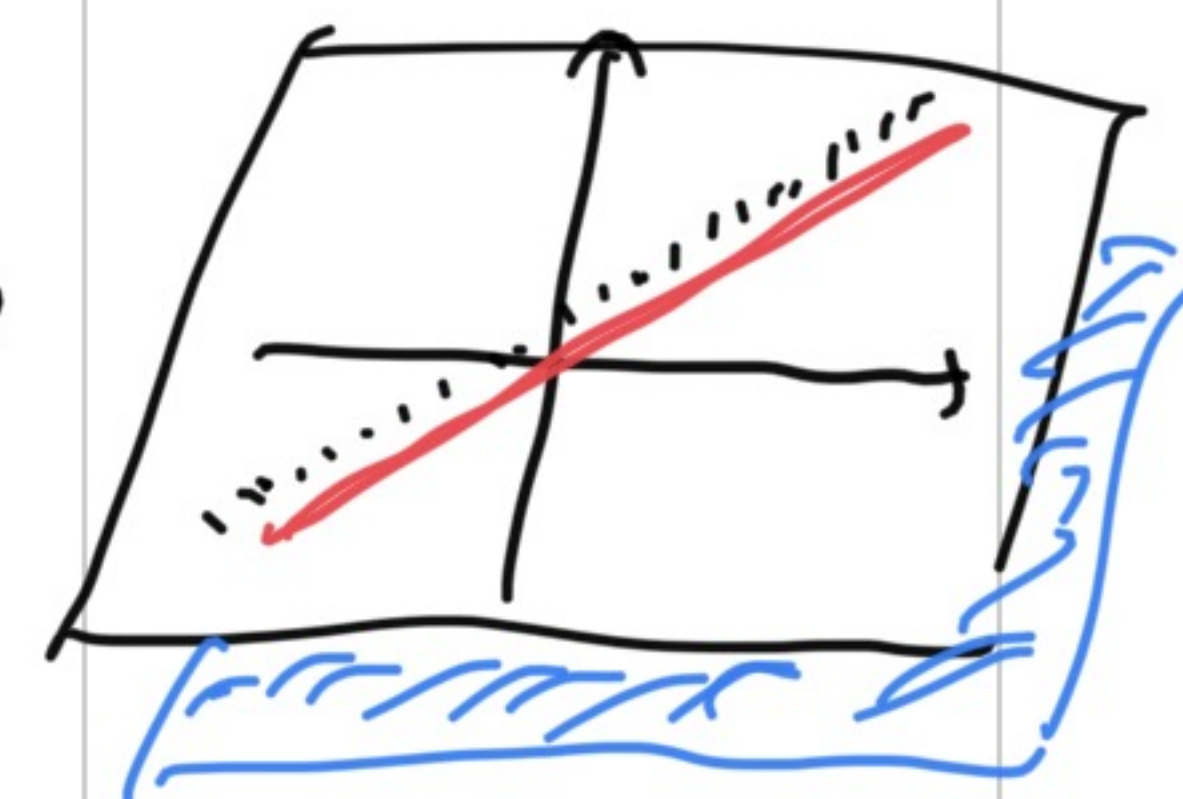
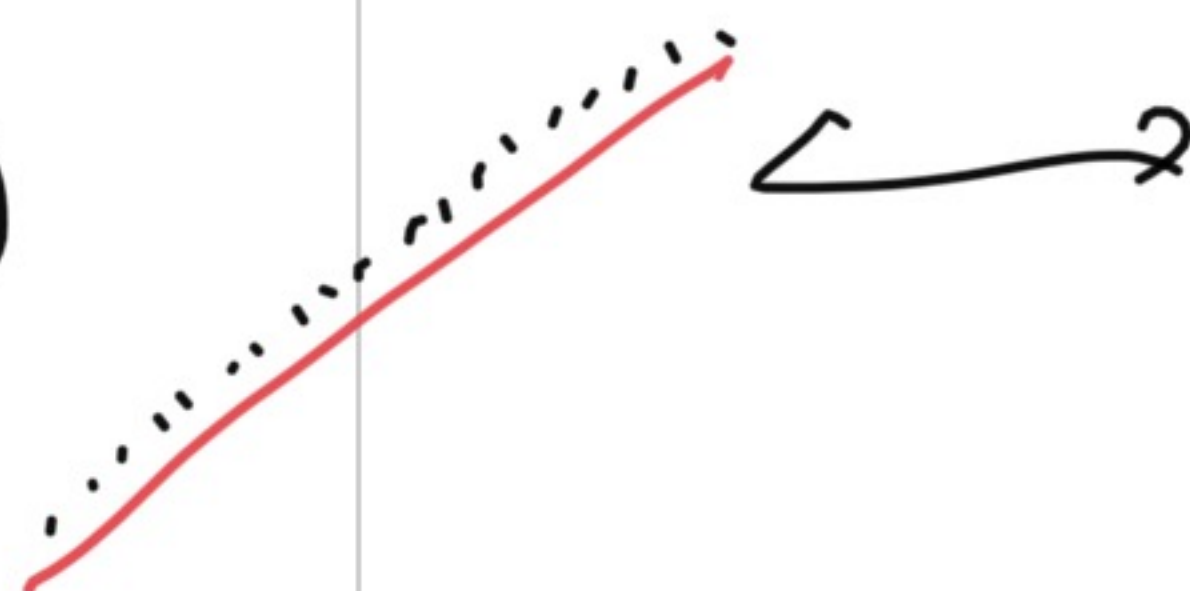
$$f \in A$$

 A/I

$$\text{Spec } A$$

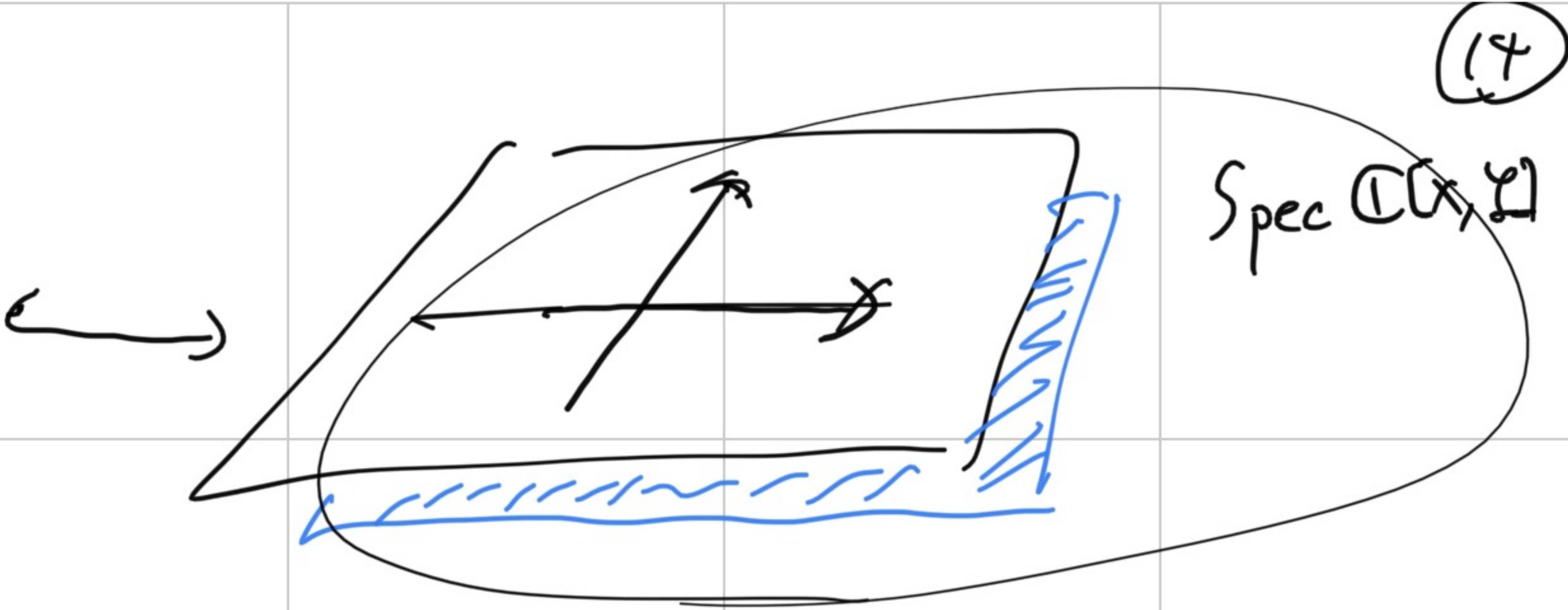
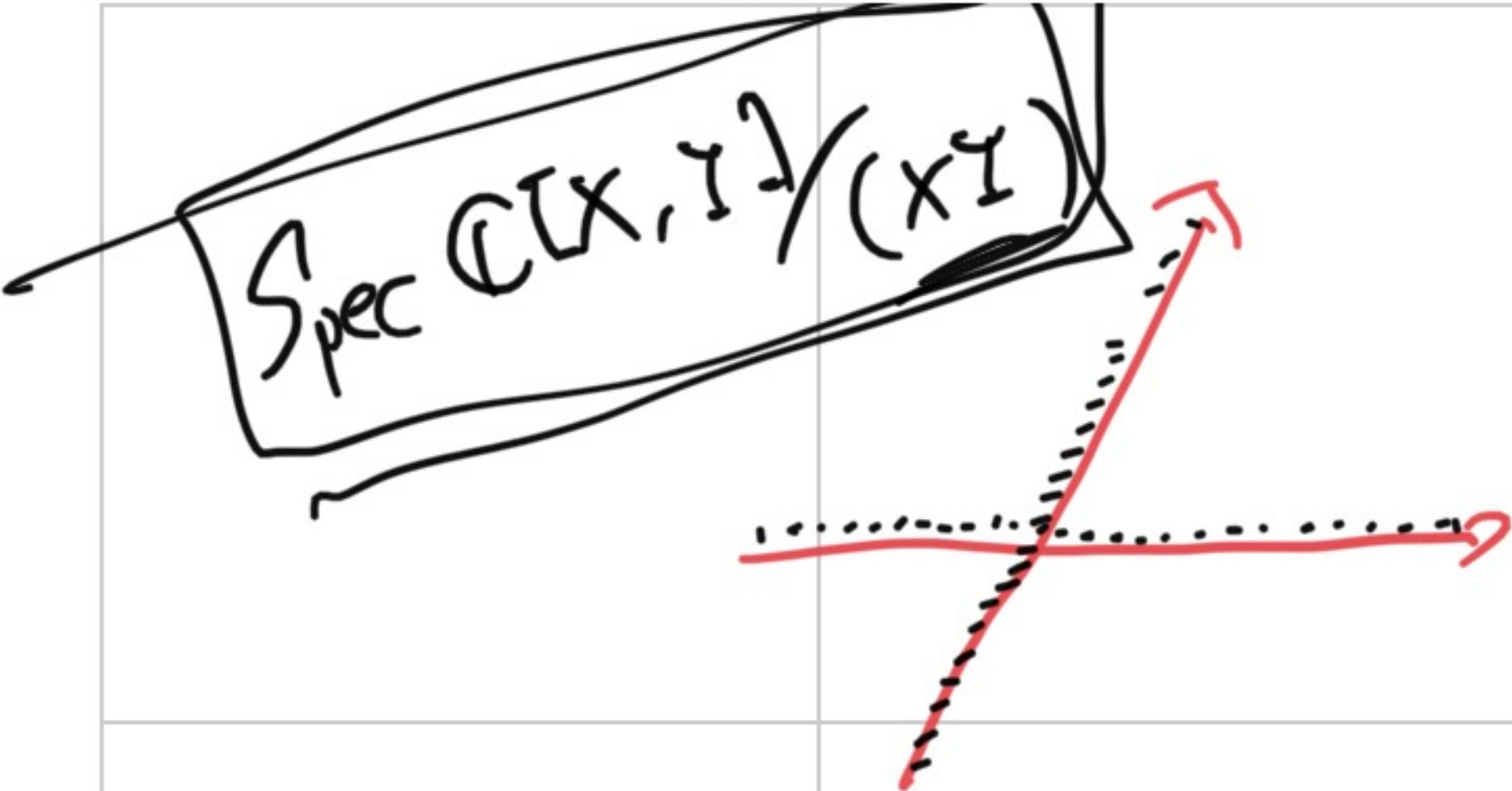
例

$$\text{Spec } \mathbb{C}[x, y] / (y-x)$$



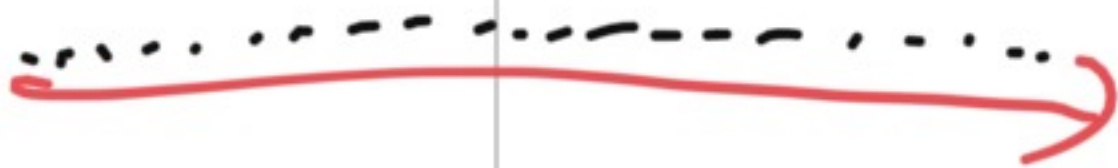
$$\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$$

$$V((y-x))$$



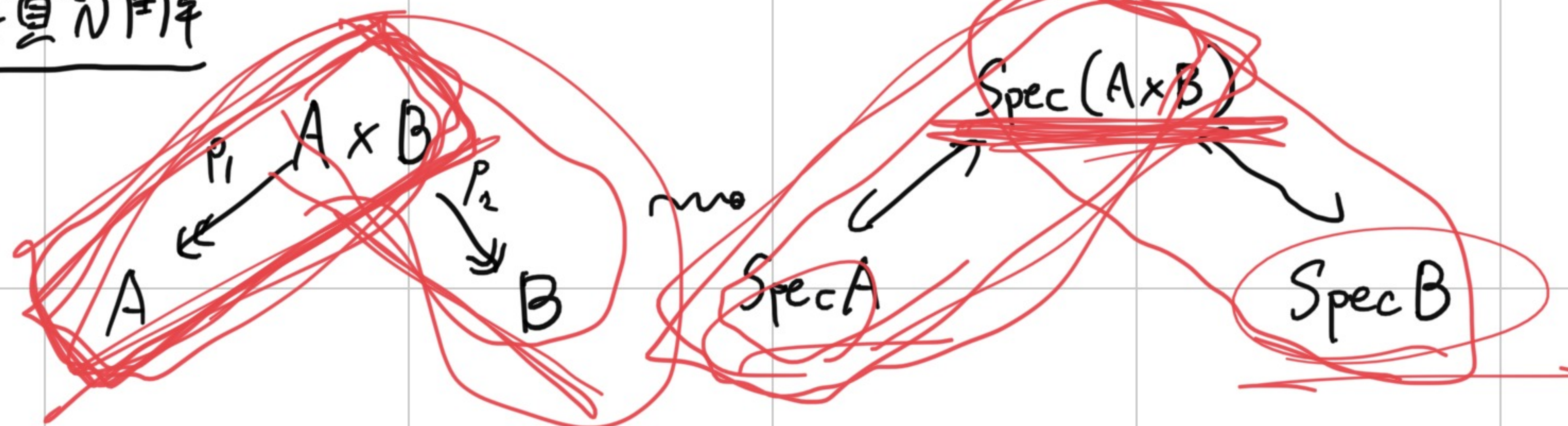
$\text{Spec } C[X, Y]/(X)$

$\text{Spec } C[X, Y]/(Y)$



直積分解

(15)



これがちょうど「分割」になる, (つ#)

$$\text{Spec}(A \times B) \text{ “=” } \text{Spec } A \sqcup \text{Spec } B$$



(2つの開集合への分割)

(pキ)

スキームのレベルで成立.

これ全体を
 $\text{Spec}(A \times B)$

Fact

この等式は,

Fact逆に, $\text{Spec } C$ の2つの開集合への分割は,

この形として理解可能.

向きこうとしたが
違った.



2. 中国剰余定理

主張を幾何的に理解

(16)

証明を幾何的に理解.

定理 A : 環 I, J : A のイデアル

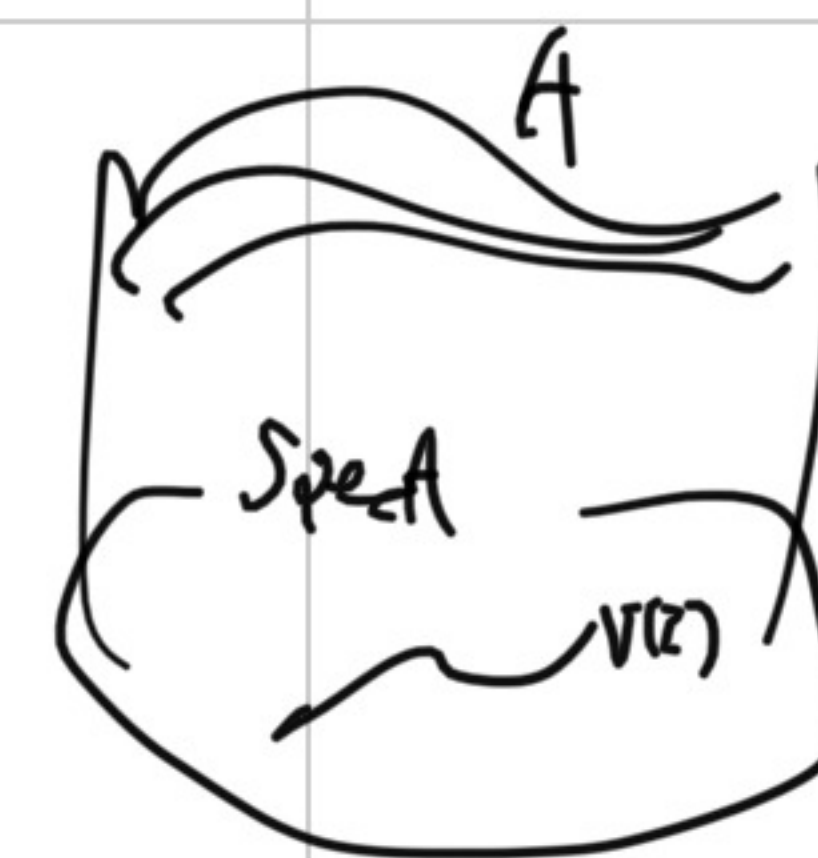
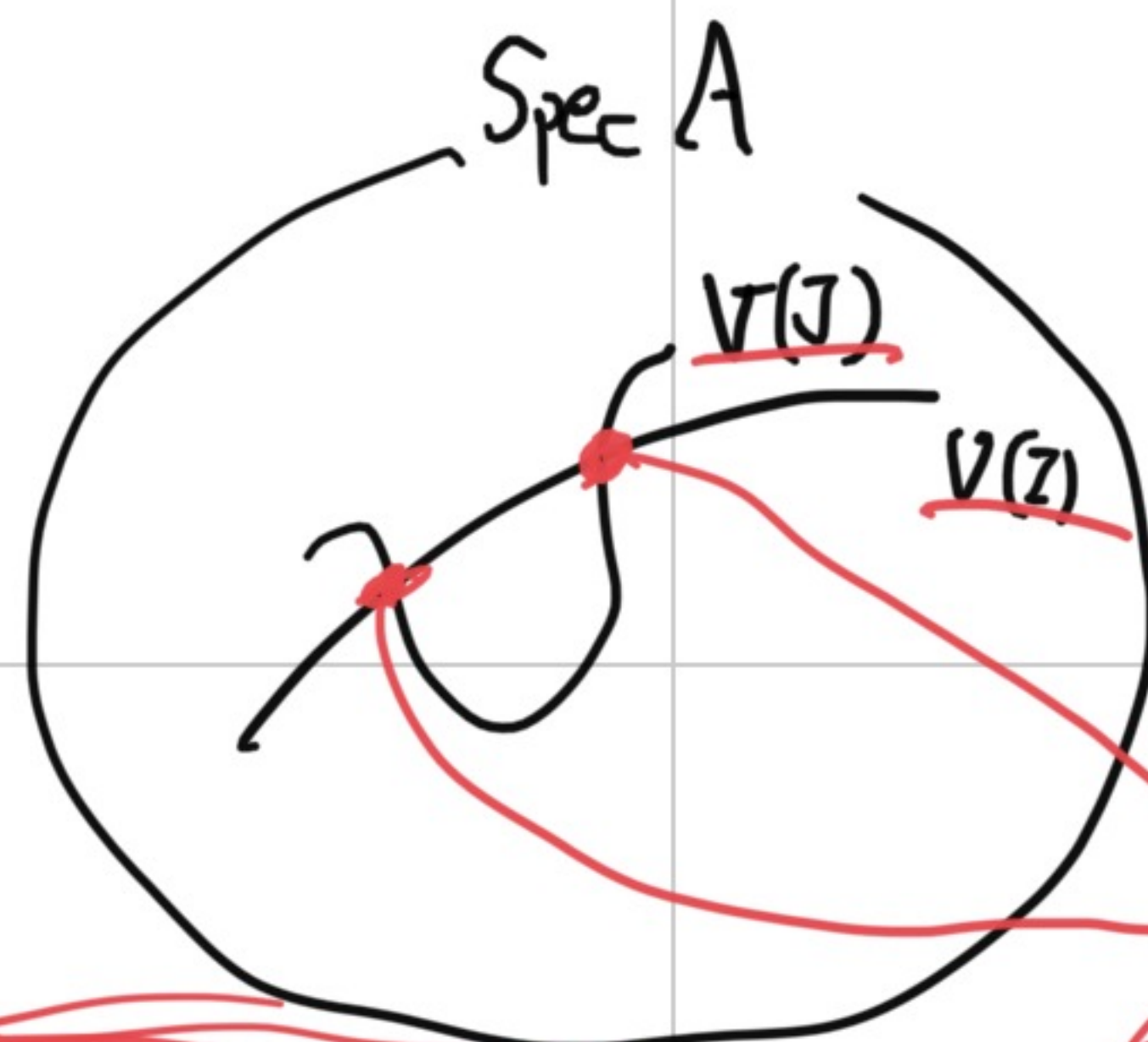
$I + J = A$ と仮定

$$\rightarrow A/IJ \cong A/I \times A/J$$

$$[a] \mapsto ([a], [a])$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{より一般に, } I_k + I_l = A \\ (k \neq l) \\ \rightarrow A/I_1 \cdots I_n \cong A/I_1 \times \cdots \times A/I_n \end{array} \right)$$

理解の仕方



$$\boxed{I + J = A \text{ かつ } I \cap J = \emptyset} \quad \text{I} \cap \text{J} = \emptyset \quad \text{I} \cap \text{J} = \emptyset$$

$$I \cap J = \emptyset$$

$$A \cong 1.$$



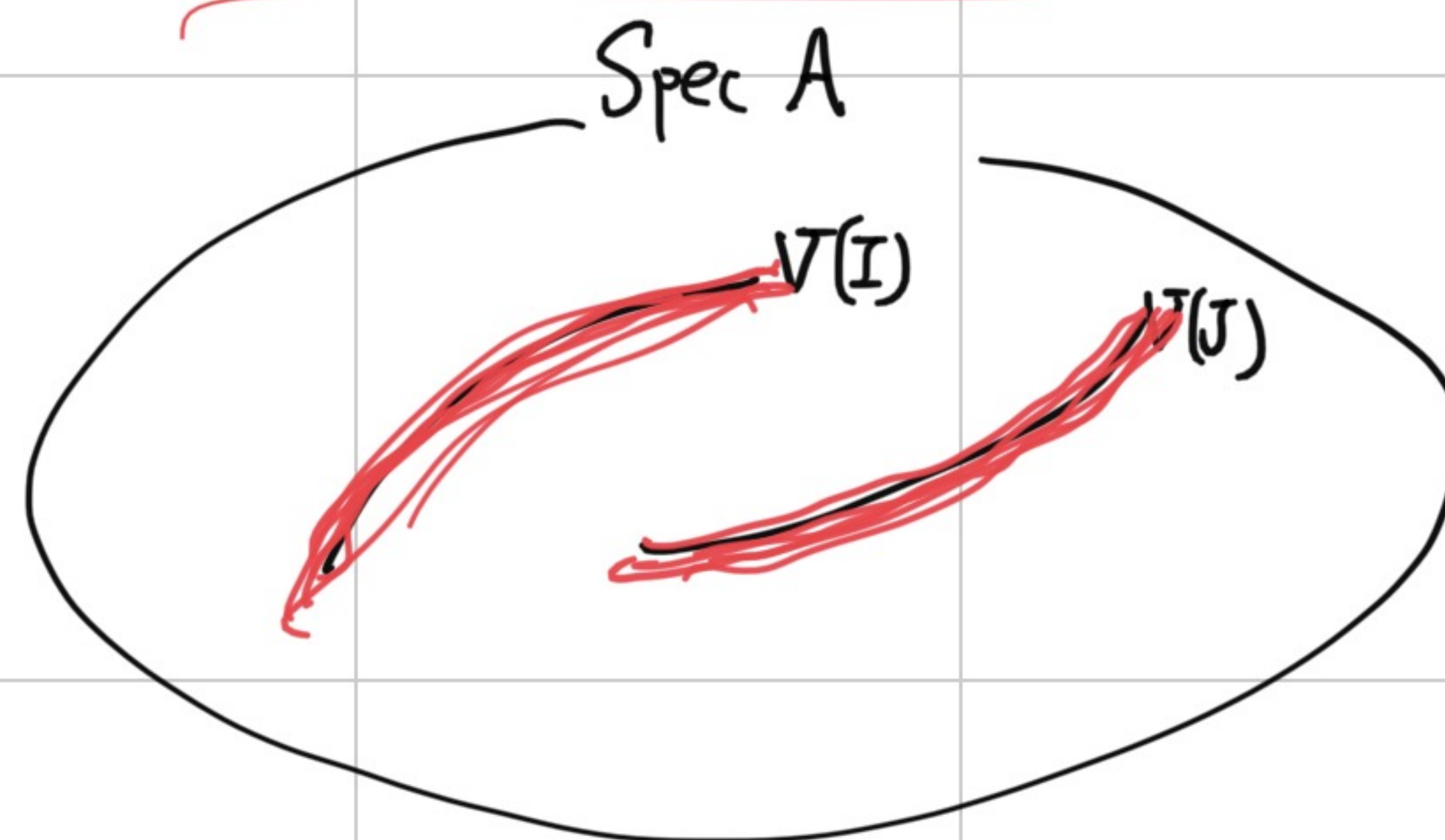
①7

$$I+J=A$$

$$A/IJ \cong A/I \times A/J$$

理解の仕方 (ツグモ)

$$V(I) \cap V(J) = \emptyset$$



$$V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$$

$$= V(IJ)$$

注 閉集合の等式としては
 $I+J=A$ の仮定なしに
 成立.

閉部分スキームの等式としては

$$I+J=A \quad (\Leftrightarrow V(I) \cap V(J) = \emptyset)$$

が必要

閉集合 $V(I) \cup V(J)$ に “対応”

する剰余環は A/IJ . $A/I \cap J$

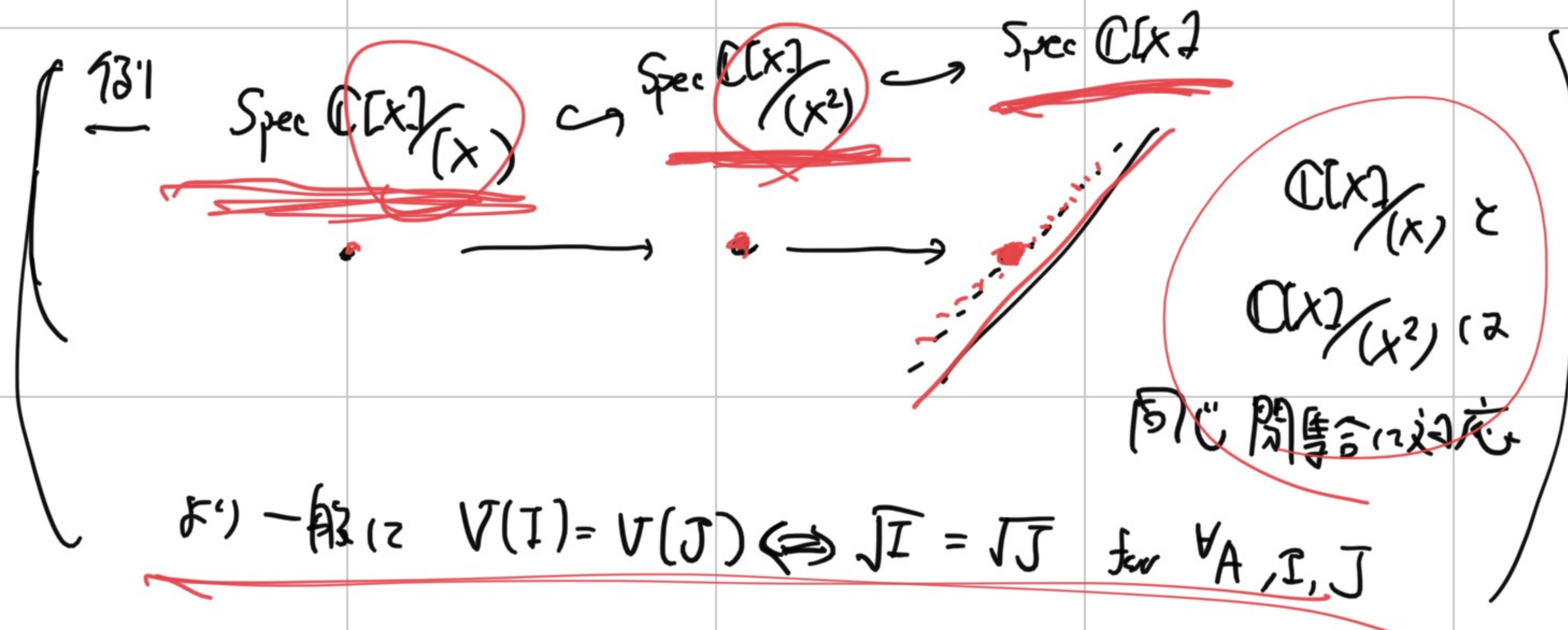
$V(I)$ と $V(J)$ それぞれで考えると $A/I \times A/J$. 因 (嘘証明 $\forall \delta$)



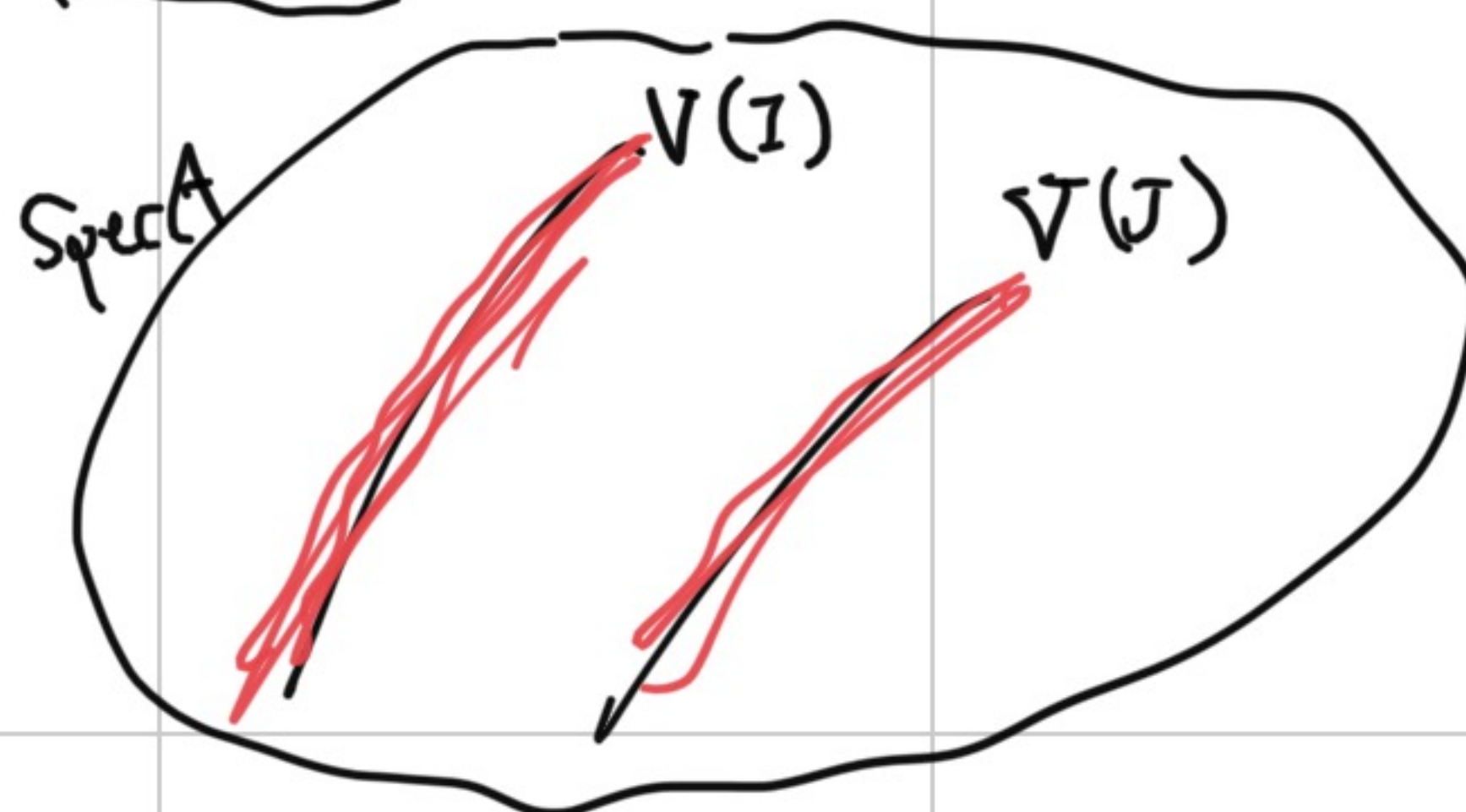
議論の問題点

(18)

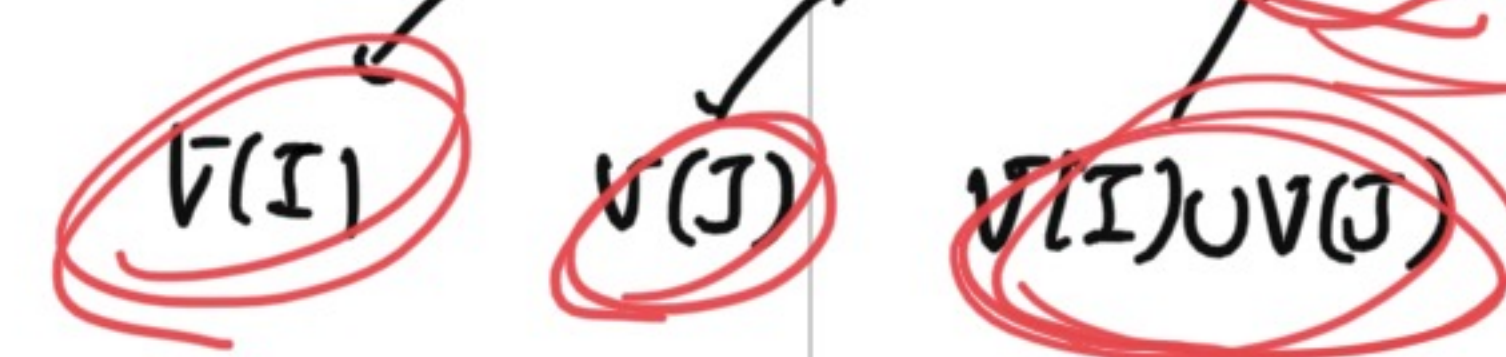
... Aの剰余環 と $\text{Spec } A$ の開集合 は 1:1 に対応しない!



しかし この文脈で



最も“素直”な対応物は A/I , A/J , $A/IJ = A/I \cap J$



なので, かんば外は正当化可能.



きちんとした証明の幾何学的解釈

(前ページまでとは
独立な部分にフォーカス)

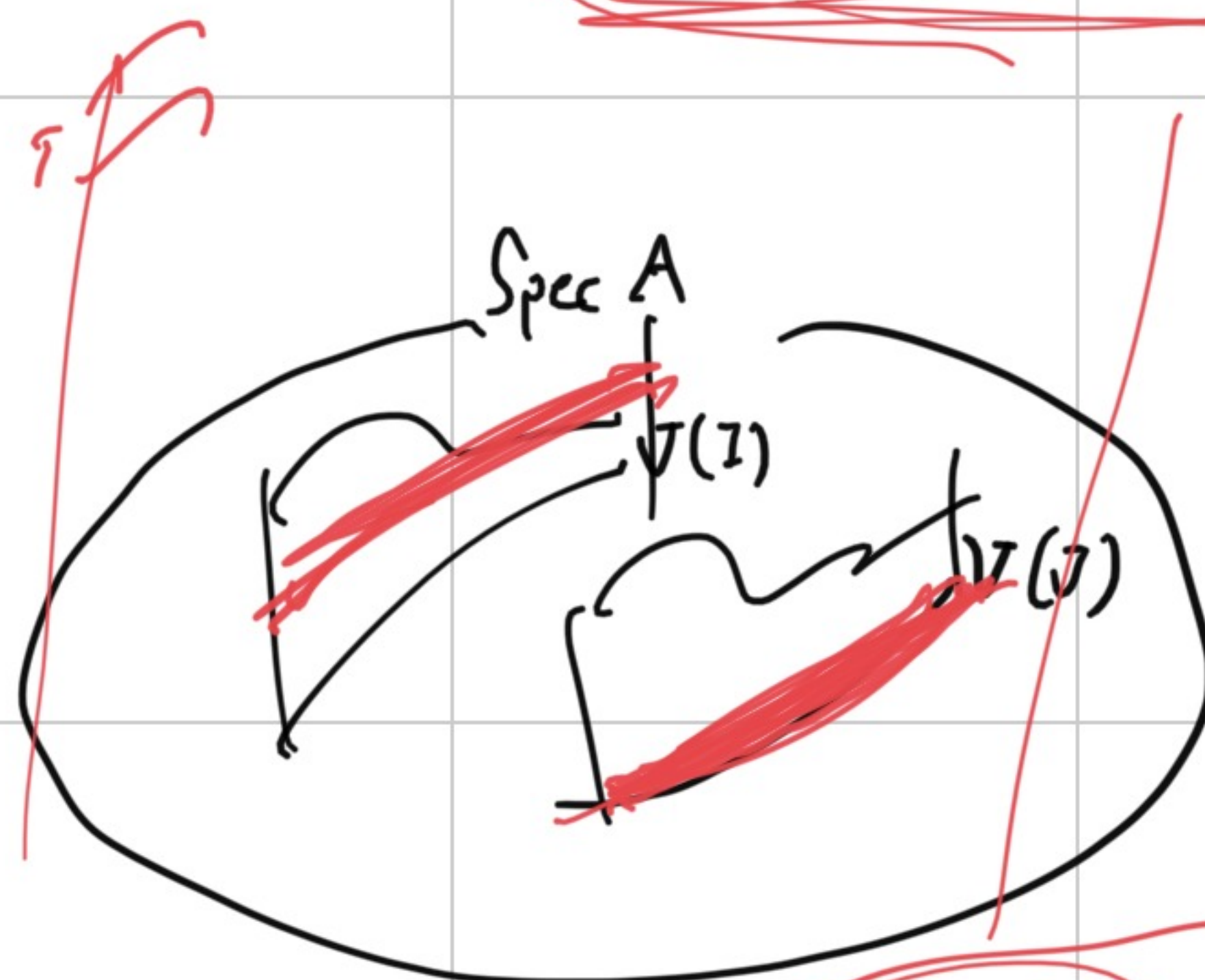
(19)

$$A \longrightarrow A/I \times A/J$$

$$\alpha \longmapsto ([\alpha], [\alpha])$$

の Ker が $IJ \stackrel{\neq}{=} I \cap J$ なので,
 $I+J=A$

あとは この 全射性のみが問題.



$([1], [0])$

$([0], [1])$

さえ Spec A 全体に拡がればよい.

$$I+J=A$$

$$e_1 + e_2 = 1 \text{ 同義反復.}$$

$$([a], [e]) = \alpha([1], [0]) + e_1([0], [1])$$

↓ 講演中になく話せなかったこと (“中国剰余定理の証明の幾何的解釈”の
“幾何的さ”)



“定数関数 1” ($1 \in A$)

$$1 = \underbrace{e}_{\substack{V(I) \text{ 上では定数関数 } 1 \\ V(J) \text{ 上では定数関数 } 0}} + \underbrace{f}_{\substack{V(I) \text{ 上では定数関数 } 0 \\ V(J) \text{ 上では定数関数 } 1}}$$

$V(I)$ 上では定数関数 1
 $V(J)$ 上では定数関数 0

$V(I)$ 上では定数関数 0
 $V(J)$ 上では定数関数 1

このようにわけられねえ (=ある種の“1の分割”ができるは“...幾何的!!)

注

“1の分割”の議論は
スキーム論において基本的。
前ページまでの“理解の土壌”
でこまかした部分も、
このような意図に
関連する。

$([a], [e]) \in \underbrace{A/I}_{V(I)} \times \underbrace{A/J}_{V(J)}$ をどのように指定しても、それは
 (“1の分割を用いた $[a], [e]$ の
大域化”)

$V(I)$ 上の関数,
 $\text{Spec } A$ 全体に
関数 a として延長
 $V(J)$ 上の関数,
 $\text{Spec } A$ 全体に
関数 e として延長

$ae + ef$ の $V(I) \cup V(J)$
への制限として実現可能。

一方、この“1の分割”の存在は仮定そのもの!!



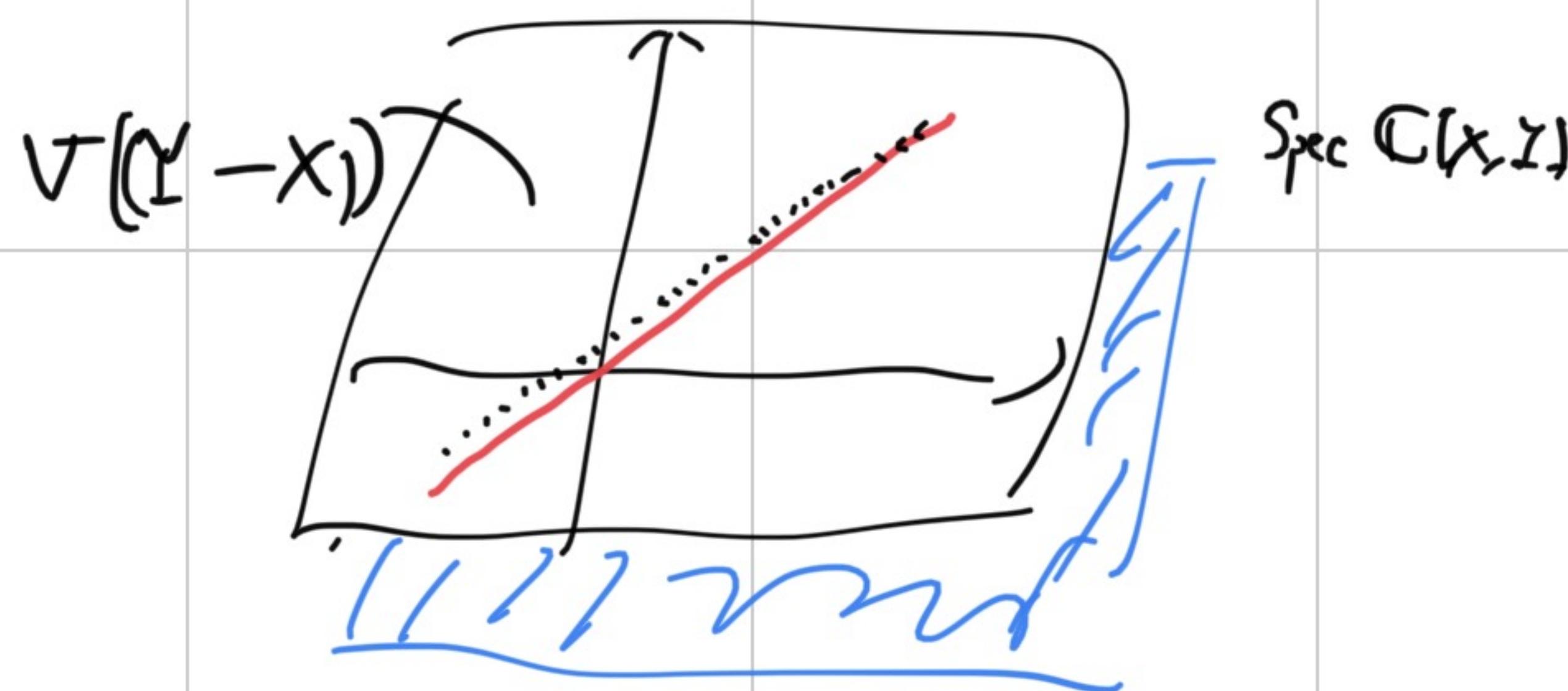
3. Noether 局所環の次元論 ※ここから講演時間から、書き込みは講演後

(20)

位相に関する補足

$$V(P) = \left\{ \begin{array}{l} \text{素イデアル } P \text{ を含む} \\ \text{素イデアル 全体} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{点 } P \text{ に "含まれる"} \\ \text{点 全体} \end{array} \right\}$$

点 P が $V(P)$ の
"最大" 点

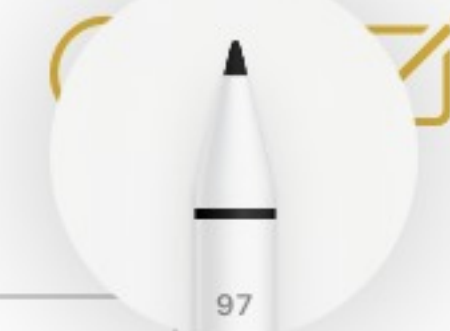


既約閉集合 $V(P)$
の "生成点"
注 $\overline{\{P\}} = V(P)$

Fact. $A : \text{Noether} \Rightarrow V(I) \subset \text{Spec } A$ は,
" $V(P)$ " の有限合併.

注 特に, $\text{Spec } A$ の位相構造は, "含む" 構造と等価.

$\exists i \in$
 $\text{Spec } A = V(P_1) \cup \dots \cup V(P_n)$
($\dots$) 既約分解
 $\text{Spec } A$ の 既約成分 (一意)



定義 (パラメータ次元)

A : Noether 局所環 (min max ideal)

(22)

例として...



$\text{Spec } A$

2次元
Noether
局所
環
の
場合の例

$A/(f_1, \dots, f_d)$

の組合せ次元が 0

$\text{Spec } A/(f_1, \dots, f_d) \hookrightarrow \text{Spec } A$

例

$V((f_1, \dots, f_d))$
これが 0 次元

となる $f_1, \dots, f_d$ の

d の最小値を A のパラメータ次元

という.

Empire 一致

定理

A : Noether 局所環

A の組合せ次元 = A のパラメータ次元

言いたこと

$\geq$ は ほぼ自明

$\leq$ は Krull の高度定理 そのもの



(23)

② 組合せ次元 ≥ パラメータ次元 ?

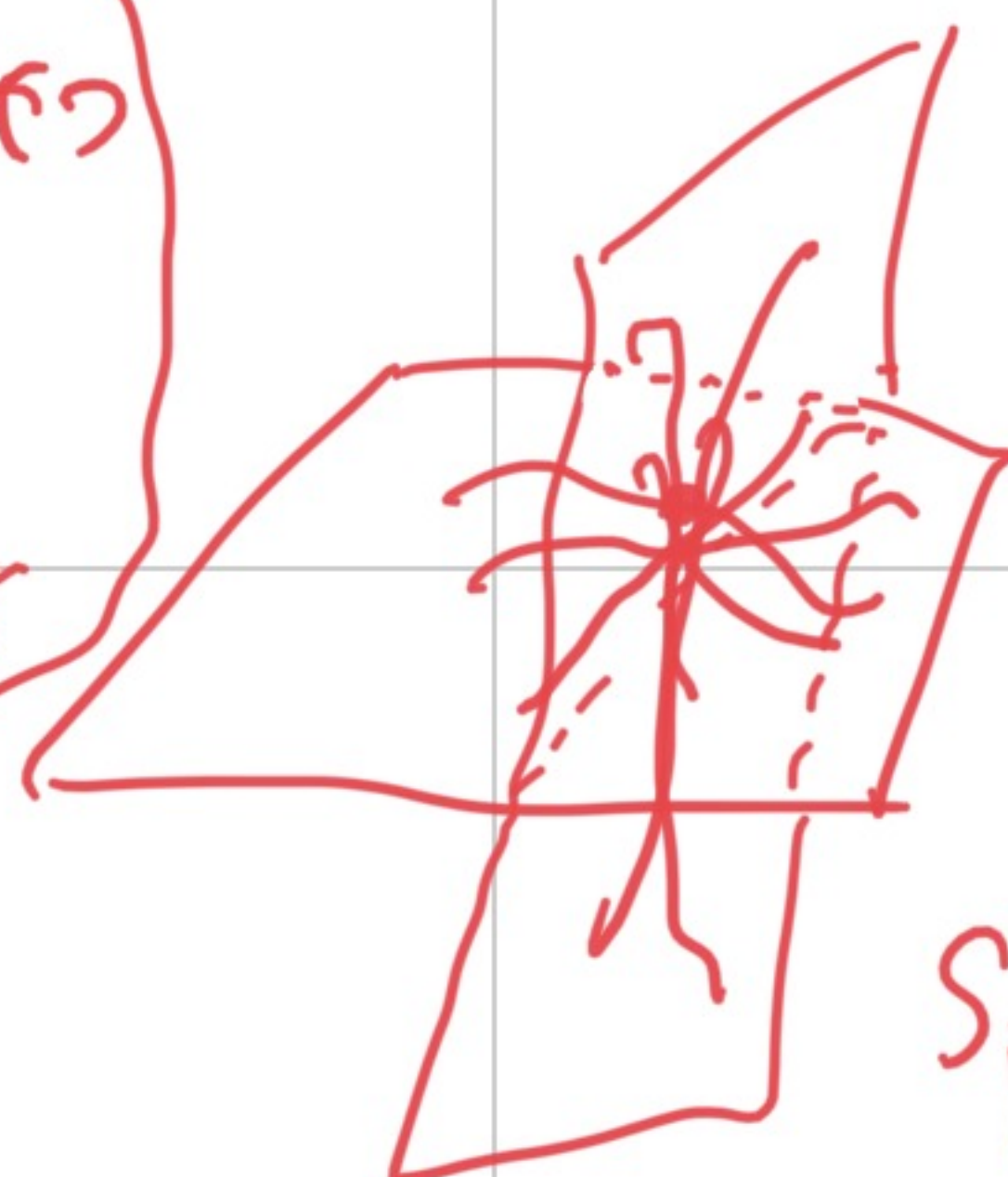
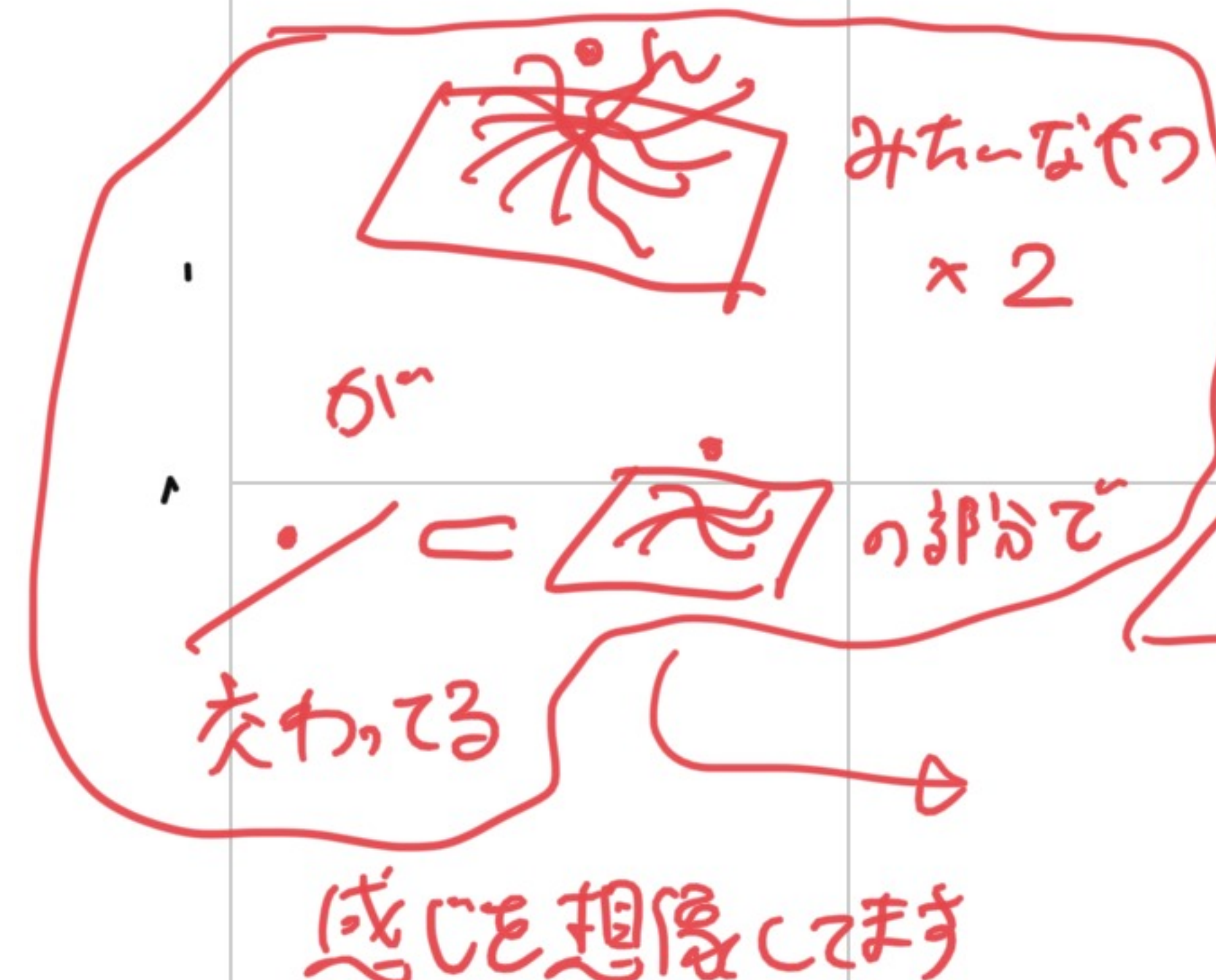
(注 無限かもしれない。
 上記の簡略化のために有限書く。)

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_n$$

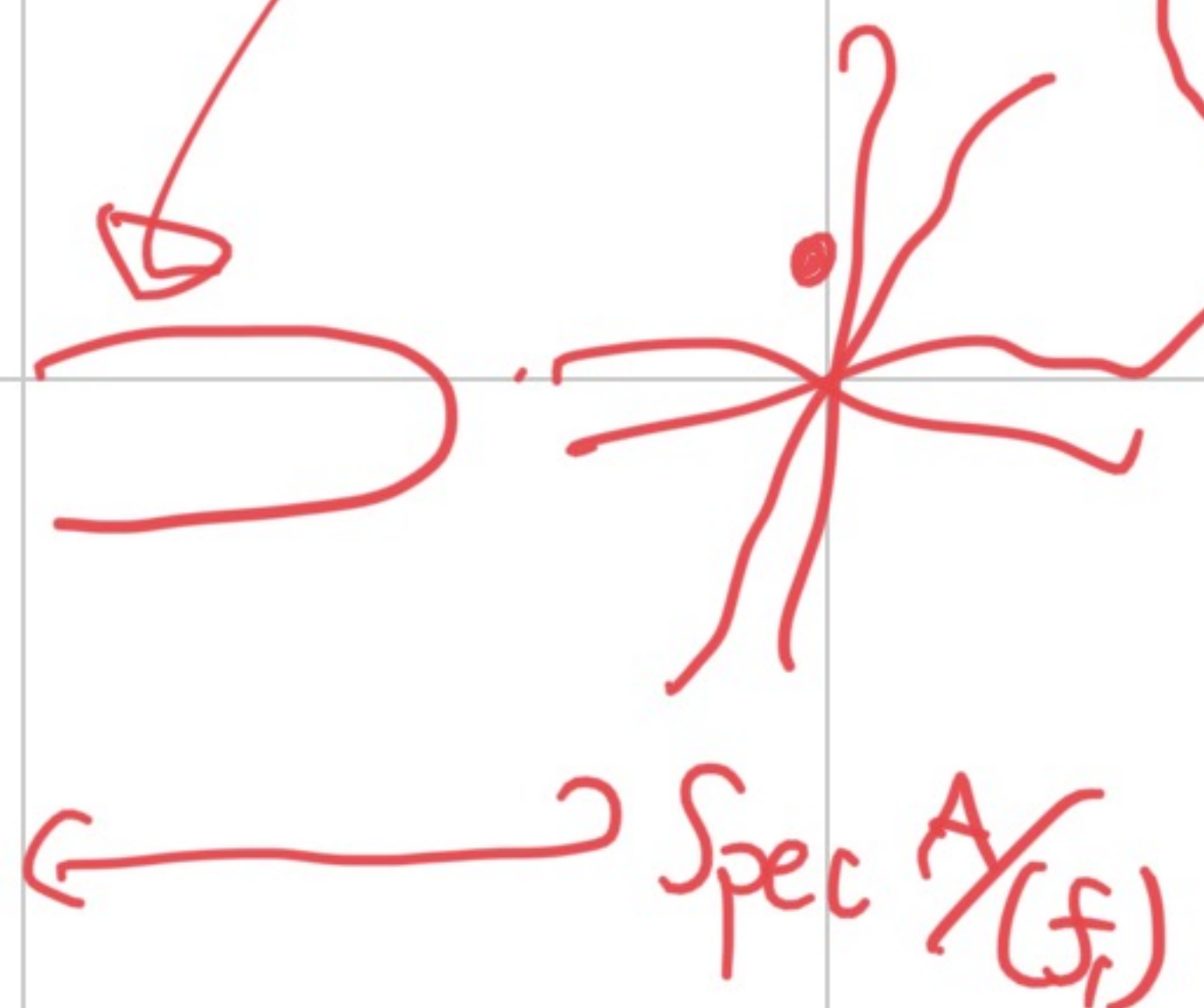
(講義中なら
 口で言うはずだったこと)

みにかくいて

$n=2$ の場合の絵



$\text{Spec } A$



$\text{Spec } A/(f_i)$

$\text{Spec } A/(f_i, f_j)$

prime avoidance で、
 極点 (既約成分の生成点)

← 回避するように f_i を選ぶ
 $\in \mathfrak{m}$

同様に、

回避
 するように
 $f_2 \in \mathfrak{m}$
 (or $\in \mathfrak{m}/(f_1)$?)
 を選ぶ

prime avoidance で パラメータ次元を真に $\geq$ していきける

(本当に 1次元ずつしか $\geq$ なら
 のか? か、 $\geq$ か、 $\Rightarrow$ のどっちか)

($\leq$) 組合せ次元 $\leq$ パラメータ次元 ?

(24)

定理

A : Noether 局化環 $f \in A, f \notin A^\times$
 $f \in \mathfrak{m}$

(単位元
定理)

$$\dim A_{(f)} \geq \dim A - 1$$

"次元が" 下がり過ぎない"

└

問題

これが "($\leq$) そのもの" であることを示せ.

(実際, 前ページに
= 元を書いたこと.)

Thank you.