

2つの封筒問題の整備と発展

Chihiro

2024年 3月 30日

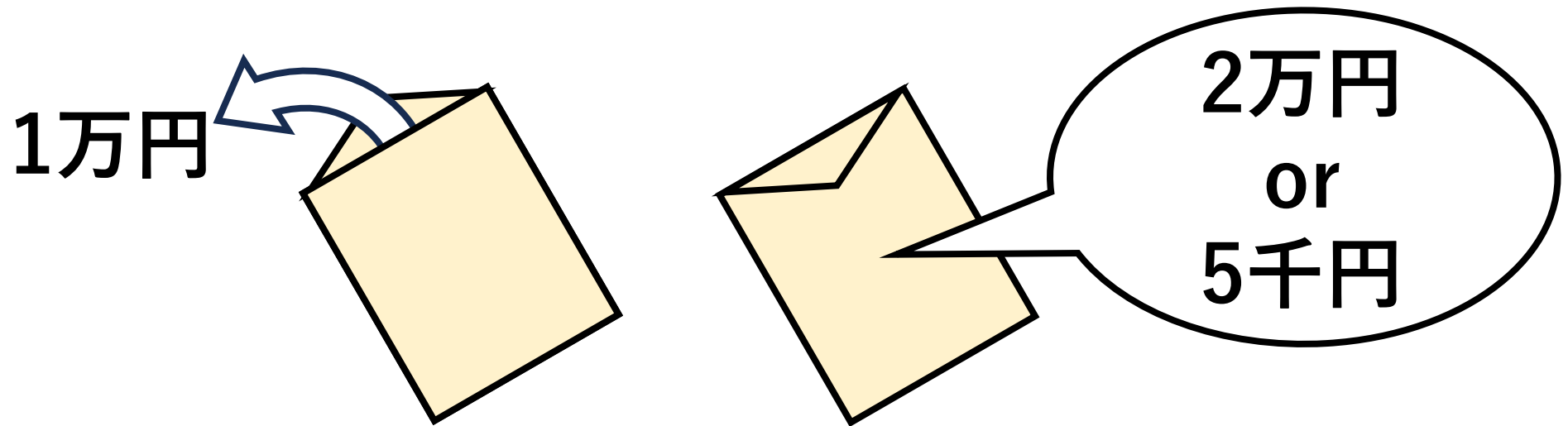
- 2つの封筒問題
- 整備された2つの封筒問題
- 得かつ損なゲーム
- 調整された得かつ損なゲーム

2つの封筒問題

2つの封筒問題とは、確率に関する次のようなパラドックスである。

問題1. 2つの封筒問題

お金の入った2つの封筒があり、片方にはもう片方の2倍の金額が入っているが、どちらにいくら入っているかはわからない。無作為に封筒を1つ選んで中を確認すると1万円が入っていたとき、どちらの封筒を受け取ることが得であるか？



2つの封筒問題の考察

考察1-1

確認する封筒は無作為に選ぶので、それが低額、高額である確率は $\frac{1}{2}$ であり、もう片方の金額の期待値は $\frac{1}{2} \times 20000 + \frac{1}{2} \times 5000 = 12500$ となる。よって、確認していない封筒に交換する方が得である！

考察1-2

確認した金額が偶数なら考察1-1と同様の計算により交換した方が得となり、確認した金額が奇数ならそれが必ず低額であるから交換した方が得となる。確認した金額がいくらでも交換した方が得になるから、確認せずとも交換した方が得だということになる。封筒の対称性に反するのではないか？

1

2

2つの封筒問題の解決(?)

考察1-1と考察1-2は対立している！どこに誤りがあるのだろうか？

考察1-3

金額が1万円と2万円なら、金額は5千円と1万円ではないから、同時に起きないこれらを同時に扱ってはならない。よって、考察1-1は成立しない。

上のような、受け入れ難い考察1-1を否定するための考察が見られることもあるが、問題1は1万円を見た事象だけをすべて扱う問題なので、この反論は不当である。

考察1-1の誤りは、選んだ封筒が低額である確率を金額を見る前後で等しいと考えた部分にある。計算に使うべき見た後の**事後確率**は一般には $\frac{1}{2}$ とは限らないのである。では、考察1-1はどのように訂正されるべきなのだろうか？



2つの封筒問題の不備

今回の事後確率を計算するために必要な情報は次の2つである。

- (1) 封筒にどれくらいの確率でどれだけの金額が入れているか
- (2) どれくらいの確率で低額、高額 of 封筒を選ぶか

事後確率の計算には(1)の詳細、つまり**確率分布**が必要である。

問題1にはそれが備わっていただろうか？

問題1には金額を決める確率分布が設定されていない。

それどころか、ゲームとして想定したい分布(一様な分布)は存在しないのである。

結論1-1

問題1は金額を決める**確率分布**が不備なため、舞台が成立していなかった。
よって、パラドックスは発生していない。

2つの封筒問題の結論(?)

確率分布を与えることでこの問題を解決する方法もよく知られている。
例えば次のように定めると、ついでにパラドックスも解消される。

一様な分布は定義できないので、大きな金額ほど入れられる確率を低くしてみる。

低い方の金額	625	...	5000	10000	...	$625 \cdot 2^t$...
確率	1/2	...	1/16	1/32	...	2^{-t-1}	...

低い金額の標本空間 $\Omega = \{625 \cdot 2^t \mid t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, 確率密度関数 $f_X(625 \cdot 2^t) = 2^{-t-1}$

結論1-2

問題1の設定に上の確率分布を採用して、考察1-1で**事後確率**を計算すると、
交換で損得がなくなり考察1-2と対立しないので、パラドックスは解消される。

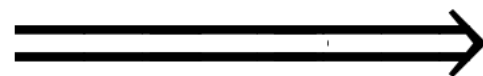
ここで分析を終えることもできるが、2つの封筒問題の肝はこれだけなのだろうか？

整備された2つの封筒問題

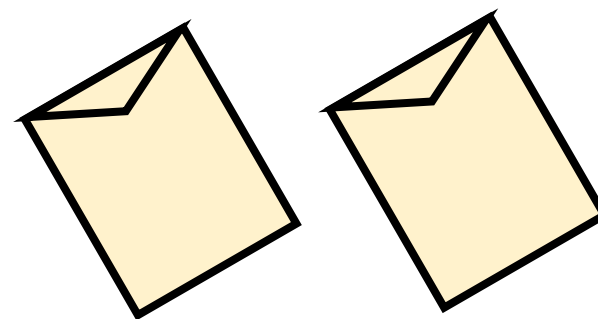
例えば、J. Broomeは考察1-1が考察1-2と対立するような確率分布を与えた。
ここでは、ゲームとして簡単に実現できる別の離散確率分布を与えてみる。

問題2. 整備された2つの封筒問題

コインを裏が出るまで投げ続けて、それまでに表が出た回数を n とする。2つの封筒にそれぞれ 3^n 円と 3^{n+1} 円が入れるが、 n の値やどちらにいくら入っているかはわからない。無作為に封筒を1つ選んで中を確認したとき、どちらの封筒を受け取ることが得であるか？



9円 and 27円



整備された2つの封筒問題の考察

考察2-1

確認した金額が1円なら、必ずそれが低額なので交換した方がよい。
確認した金額が 3^n 円 ($n > 0$) なら、それが低額である事後確率は $\frac{1}{3}$ であり、
もう片方の金額の期待値は $\frac{1}{3} \times 3^{n+1} + \frac{2}{3} \times 3^{n-1} = \frac{11}{9} \times 3^n$ となる。
よって、確認していない封筒に交換する方が得である！

考察2-2

確認した金額がいくらでも交換した方が得になるなら、確認せずとも交換した方が得だということになる。封筒の対称性に反するのではないか？

1

2

整備された2つの封筒問題の解決

考察2-1と考察2-2は対立している！どこに誤りがあるのだろうか？

期待値が**(無限)級数**で定義されていることに注目する。

最初の封筒で確認した金額よりも
もう片方の金額の期待値が高い

最初の封筒の金額の期待値よりも
もう片方の金額の期待値が高い

交換する場合の期待値の
級数の各項*の方が大きい

交換する場合の期待値の
級数の方が大きい

※厳密には2項ずつの和

両方の級数が ∞ に発散する
今回の状況が反例

1

2

整備された2つの封筒問題の結論

言い換えると、金額を確認するまで無限の期待値があった交換の無意味なゲームが、金額の確認で有限の期待値である交換が得なゲームのどれかに制限されるのである。

問題2は後者のゲームすべてについての問いであり、考察2-1はそれを考察している。考察2-2は前者のゲームについての考察を混同したことが誤りである。

結論2

考察2-2には**級数で項の大小と総和の大小の関係を無視する誤り**があったので、考察2-1への反論は成立せず、パラドックスは解消される。金額を確認しないゲームの期待値はどちらも正の無限大なので、考察2-2の通り対称的であり交換で損得は発生しない。

考察1-2も同じ誤りを含んでいたが、問題1では分析の手が届かなかったのである。整備によっても残るこの誤りが、2つの封筒問題の肝だったといえるのではないか。

得かつ損なゲーム

期待値という概念は、今までの問題以上に受け入れ難いパラドックスを生む。

問題3. 得かつ損なゲーム

はじめにコインを裏が出るまで投げ続け、それまでに表が出た回数を n とする。最後にもう1度コインを投げて、表が出たら $5^n + 1$ 円獲得し、裏が出たら 5^n 円支払う。このゲームに参加することは得であるか損であるか？



得かつ損なゲームの考察

考察3-1

表がはじめに n 回出た場合は、お金を獲得する、支払う事後確率は $\frac{1}{2}$ であり、賞金の期待値は $\frac{1}{2} \times (5^n + 1) + \frac{1}{2} \times (-5^n) = \frac{1}{2} > 0$ となる。
表がはじめに何回出ても得なので、このゲームは参加すると得である！

考察3-2

表が全部で 0 回出た場合は、必ず 1 円支払うことになるので損である。
表が全部で m 回 ($m > 0$) 出た場合は、お金を獲得する事後確率は $\frac{2}{3}$ であり、賞金の期待値は $\frac{2}{3} \times (5^{m-1} + 1) + \frac{1}{3} \times (-5^m) = -5^{m-1} + \frac{2}{3} < 0$ となる。
表が全部で何回出ても損なので、このゲームは参加すると損である！

1

2

得かつ損なゲームの解決

考察3-1と考察3-2は対立している！どこに誤りがあるのだろうか？

再び、期待値が**(無限)級数**で定義されていることに注目する。

表がはじめに n 回出る場合は
どれも期待値が正

期待値の級数の項は特別な
まとめ方をするとどれも正

期待値の級数は特別な順番で
計算すると正(∞ を含む)

期待値の級数が存在して
正(∞ を含む)となる

級数が絶対収束しない
今回の状況が反例

1

2

得かつ損なゲームの結論

一般には、無限級数の計算結果は足す順番を変えると変化する。
考察3-1と考察3-2は互いに異なる順番で計算しているので、異なる結果になることは対立することにはならないのである。

それどころか、一般には標本空間の根元事象に自然な順番は決まっていないので、期待値の級数が絶対収束しない場合は、期待値がwell-definedにすらならない。
問題3の考察は、それぞれの計算結果を期待値とみなしたことが誤りである。

結論3

考察3-1と考察3-2には**項に順序のない絶対収束しない級数を計算しようとする誤り**があったので、それらは成立せず、パラドックスは解消される。

調整された得かつ損なゲーム

条件収束する級数を期待値に持つゲームも構成することができる。

問題4. 調整された得かつ損なゲーム

はじめにコインを裏が出るまで投げ続け、それまでに表が出た回数を n とする。最後にもう1度コインを投げて、表が出たら $\delta = 1$ ，裏が出たら $\delta = -1$ とする。このゲームの得点が $\frac{\delta}{n+1} 2^{n+2}$ 点のとき、得点の期待値は何点か？



調整された得かつ損なゲームの考察

考察4-1

$\left\lfloor \frac{2n}{3+\delta} \right\rfloor = m$ のとき、得点の期待値は $\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2} > 0$ である。

m は非負整数のみすべて動き、このゲームの得点の期待値は $\log 2 > 0$ である。

n		0	1	2	3	4	5	...
(n, δ) の確率		1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	...
確率重み 付き点数	$\delta = 1$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	...
	$\delta = -1$	-1	-1/2	-1/3	-1/4	-1/5	-1/6	...

期待値 $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \log 2$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{m=0}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{m=1}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{m=2}$

1

調整された得かつ損なゲームの結論

考察4-1と同様な議論で、結果が逆になる考察も得られる。

考察4-2

$\left\lfloor \frac{2n}{3-\delta} \right\rfloor = m$ のとき、得点の期待値は $-\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2} < 0$ である。

m は非負整数のみすべて動き、このゲームの得点の期待値は $-\log 2 < 0$ である。

考察4-1と考察4-2は、制限された場合の期待値だけでなく、ゲーム全体の期待値に具体的な計算結果を与えるので、対立がより現実味を帯びる。

しかし、場合分けが人工的で複雑であり、議論中に有名な交代級数が現れるので、問題の不思議さを味わう前に問題の肝に気付いてしまうくらい露骨になっている。

結論4

計算の方法によって任意の計算結果になる**条件収束する期待値**を持つゲームが存在し、期待値は計算されていてもwell-definednessを疑わなければならない。

まとめ

問題1の考察1-1には**事後確率を考慮していない誤り**があるように見えたが、そもそも問題に**確率分布の不備**があった。

問題2では確率分布の不備が取り除かれ、事後確率を考慮した考察2-1は成立し、対立する考察2-2には**級数で項の大小と総和の大小の関係を無視する誤り**があった。

問題3の互いに対立する考察3-1と考察3-2には**項に順序のない絶対収束しない級数を計算しようとする誤り**があった。

問題4は**項に順序がないので計算できない条件収束する級数が期待値**となった。

<https://www.yaokisj.com/mattopic6.html>

https://woorex.com/05_zakki/05_02_06_fuutou.html

<https://qiita.com/SaitoTutomu/items/3079a88163153abf2ac2>

<https://qiita.com/mogamoga1337/items/4eced4eaeb5b5cebc902> など

2つの封筒問題について、様々な説を紹介するもの、確率分布の不備まで指摘しているものなど、それぞれ参考になる考察をまとめている。

John Broome. Two-Envelope Paradox. Analysis Vol. 55 Num. 1 (1995)

一方がもう一方の2倍の金額という状況のもとで、パラドックスを保つ離散確率分布と連続確率分布を与えている。