$(\infty, 1)$ 圏の理論のモデルについて

よの

2024 年 3 月 31 日

1 圏

定義 1.1 (1 圏)

次の条件を満たすクラスの組 $\mathcal{C} = (\mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \mathrm{Mor}(\mathcal{C}))$ **を 1 圏 (1-category) という**.

- **合成の存在性** $\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "g"] & \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "gf"] & & \bullet \end{tikzcd}$ **と恒等射の存在性** $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, equal, dashed, "\mathrm{id}"] & \bullet \end{tikzcd}$
- **恒等射公理**

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, equal, "\mathrm{id}"] & \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f\mathrm{id} = f"] & & \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "f"] & \\ \bullet \arrow[ur, equal, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "\mathrm{id}f = f"] & & \bullet \end{tikzcd}$$

- **結合性公理**

$$\begin{tikzcd} & \bullet & \\ & & \bullet \arrow[ul, "h"'] \\ \bullet \arrow[uu, "(hg)f = h(gf)"] \arrow[urr, "gf"] \arrow[rr, "f"] & & \bullet \arrow[u, "g"'] \arrow[uul, "hg"] \end{tikzcd}$$

2 圏

1 射の間に「2 射」が存在するような圏の例を挙げる.

例 1.2

- 小圏の圏 $\mathcal{C}\mathrm{at}$ における 1 射 (関手 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$) の間には, 自然変換 $F \Rightarrow G$ が存在する.
- 位相空間の圏 $\mathcal{T}\mathrm{op}$ における 1 射 (連続写像 $f, g : X \to Y$) の間には, ホモトピー $f \Rightarrow g$ が存在する.

このような圏は 1 圏として扱うと不都合が生じることがある.

注意 1.3

$\mathcal{C}\mathrm{at}$ における次の図式の可換性は $H = GF$ を意味している.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D} \arrow[dr, "G"] & \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "H"] & & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

しかし, 関手は「自然同型を除いて一意」に定義されるべきであり, 自然同型の違いは許すべきであった.

$\mathcal{C}\mathrm{at}$ では, 1 圏が持っていない「2 射 (=1 射の間の射)」の構造まで考える必要がある.

高次の射の可逆性

1 射だけでなく，2 射 (1 射の間の射) が存在するような圏を 2 圏 (2-category) という．
より一般に，n 射までの構造を持つような圏を n 圏 (n-category) という．

注意 1.4

$\mathcal{C}\mathrm{at}$ を 1 圏としてみなすことの不都合さは見たが，2 射としてすべての自然変換をとることも不自然である．[1]
つまり，この図式の可換性は「関手の一致」や「自然変換の存在」ではなく，「自然同型の存在」を意味するべきである．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Updownarrow"] & \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "H"'] & {} & \mathcal{E}
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{C}\mathrm{at}$ は 1 圏としては tight すぎる一方で，一般の自然変換まで考えることは loose すぎる．

例 1.5

$\mathcal{T}\mathrm{op}$ における 2 射はホモトピーであったが，これは自然に可逆である．(逆向きのホモトピーを考えればよい．)
更に，ホモトピーのホモトピー (3 射) なども考えれるが，これらはすべて可逆である．

[1] 関手は「自然同型の違いを除いて」一致するべきであって，「自然変換の違いを除いて」考えることはほとんどない．

(n,k) 圏および (∞,k) 圏

多くの高次圏では高次の射は可逆なので，ある k 射以降がすべて可逆であるような n 圏が重要である．

定義 1.6 ((n,k) 圏)

$(k+1)$ 射以降の射がすべて可逆であるような n 圏を (n,k) 圏 ((n,k)-category) という．

例 1.7

- 通常の亜群は $(1,0)$ 圏である．
- 通常の圏は $(1,1)$ 圏である．
- $\mathcal{C}\mathrm{at}$ や $\mathcal{T}\mathrm{op}$ は $(2,1)$ 圏である (とみなす)．

(n,k) 圏の定義において，$n\to\infty$ としたものが (∞,k) 圏である．

定義 1.8 ((∞,k) 圏)

k を固定したときの (n,k) 圏の集まりを (∞,k) 圏 ((∞,k)-category) という．

本稿の主題は $k=1$ とした $(\infty,1)$ 圏である．つまり，2 射以上がすべて可逆な ∞ 圏である．

位相的圏と単体的圏

$(\infty,1)$ 圏は 2 射以上はすべて可逆であったので，射の集まりとして「Hom 空間」を考える方法が挙げられる．
つまり，$(\infty,1)$ 圏は「空間」で豊穣された圏であると考える．

定義 2.1 (位相的圏)

$\mathcal{CG}$ 豊穣圏 [2] を位相的圏 (topological category) という．位相的圏と位相的関手のなす圏を $\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}}$ と表す．

定義 2.2 (単体的圏)

$\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 豊穣圏 [3] を単体的圏 (simplicial category) という．単体的圏と単体的関手のなす圏を $\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta$ と表す．

豊穣圏を用いた定義は非常に簡明であり，豊穣圏論の一般論を使えることは利点である．
しかし，$(\infty,1)$ 関手圏の定義など，実際に扱うことは困難な場合が多い．[4]

[2] $\mathcal{CG}$ はコンパクト生成弱 Hausdorff 位相空間の圏であり，$\mathcal{T}\mathrm{op}$ よりも性質がよい．
[3] $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ の「空間らしさ」は分かりづらいが，Dold-Kan 対応や，$(\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)_{\mathrm{Quillen}}$ と $(\mathcal{T}\mathrm{op})_{\mathrm{KQ}}$ が Quillen 同値であることから，イメージを掴むことができる (かも)．
[4] $\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta$ 上の Bergner モデル構造が Cartesian モデル圏でないという理由もある．

単体的集合

Joyal や Lurie は「擬圏」が $(\infty, 1)$ 圏の枠組みとして適切であることを見抜いた. [5]

定義 2.3 (単体圏)

有限線形順序集合と狭義順序を保つ写像のなす圏を単体圏 (simplex category) といい, Δ と表す.

定義 2.4 (単体的集合)

関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$ を単体的集合 (simplicial set) という. 単体的集合の圏を $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ と表す.

[5] Boardman と Vogt により, 擬圏は弱 Kan 複体 (weak Kan complex) として調べられていたが, これが $(\infty, 1)$ 圏のモデルであると見抜いたのは Joyal である (はず).

単体的集合

Kan 拡張を用いて，特徴的な 2 つの随伴が得られる．

注意 2.5 (ホモトピー圏をとる関手と脈体)

埋め込み $\Delta \hookrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$ から Kan 拡張を用いることで，次の随伴 (h, N) が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta \arrow[dr, bend left, "\mathrm{h}"] & \\
\Delta \arrow[u, "\text{よ}"] \arrow[r, hook] & \mathcal{C}\mathrm{at} \arrow[ul, bend left, "\mathrm{N}"]
\end{tikzcd}
$$

注意 2.6 (幾何学的実現と特異単体)

関手 $\Delta[-] : \Delta \to \mathcal{T}\mathrm{op}$ から Kan 拡張を用いることで，次の随伴 $(|-|, \mathrm{Sing})$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta \arrow[dr, bend left, "|-|"] & \\
\Delta \arrow[u, "\text{よ}"] \arrow[r] & \mathcal{T}\mathrm{op} \arrow[ul, bend left, "\mathrm{Sing}"]
\end{tikzcd}
$$

小圏の脈体

圏論は単体的集合の特殊な場合と思うことができる.

定理 2.7

脈体 $\mathrm{N} : \mathcal{C}\mathrm{at} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ は忠実充満である.

小圏の脈体はリフト性質で特徴づけることができる.

定理 2.8

単体的集合 S に対して, 次は同値である.

- S はある小圏 $\mathcal{C}$ の脈体 $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ と自然同型である.
- 任意の $n \geq 2$ と $0 < i < n$ に対して, 次の図式は一意なリフトを持つ.

$$\begin{tikzcd} \Lambda[n,i] \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{C} \\ \Delta[n] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Kan 複体

位相空間論における CW 複体に対応する単体的集合のクラスを定義する.

定義 2.9 (Kan **複体**)

任意の $n \geq 2$ **と** $0 \leq i \leq n$ **に対して, 次の図式がリフト条件を持つ単体的集合** S **を** Kan **複体** (Kan complex) **という.**

$$\begin{tikzcd} \Lambda[n,i] \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{C} \\ \Delta[n] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

例 2.10

任意の位相空間 X **に対して, 特異単体** $\mathrm{Sing}(X)$ **は** Kan **複体である.**

次の意味で, 位相空間のホモトピー論は単体的集合の枠組みにおいて考えてもよい.

定理 2.11 (Milnor, Giever)

- **任意の位相空間** X **に対して,** $|\mathrm{Sing}(X)| \to X$ **は位相空間の弱ホモトピー同値である.**
- **任意の単体的集合** S **に対して,** $S \to \mathrm{Sing}(|S|)$ **は** *Kan* **弱同値** (**単体的集合の弱ホモトピー同値**) **である.**

擬圏

単体的集合の枠組みにおいて，圏論は「脈体」で，位相空間のホモトピー論は「Kan 複体」によって表すことができた．
これらはともにリフト性質によって特徴づけることができたが，2 つの相違点がある．

- 脈体のリフトは内部角体 $(0 < i < n)$ に対してのみだが，Kan 複体のリフトは外部角体 $(i = 0, n)$ に対しても課す．
- 脈体のリフトは一意だが，Kan 複体のリフトは一意性を課していない．

脈体と Kan 複体の共通の一般化として，擬圏の定義を得る．

定義 2.12 (擬圏)

任意の $n \geq 2$ と $0 < i < n$ に対して，次のリフト条件を満たす単体的集合 $\mathcal{C}$ を擬圏 (quasi-category) という．

$$\begin{tikzcd} \Lambda[n,i] \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{C} \\ \Delta[n] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

例 2.13

- 任意の Kan 複体は擬圏である．特に，任意の位相空間 X に対して，特異単体 $\mathrm{Sing}(X)$ は擬圏である．
- 任意の小圏 $\mathcal{C}$ に対して，脈体 $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ は擬圏である．

擬圏は $(\infty,1)$ 圏のモデルである

擬圏において，射の合成は「可縮な空間の選択を除いて」一意に定まる．

定理 2.14 (Joyal)

単体的集合 $\mathcal{C}$ に対して，次は同値である．

- $\mathcal{C}$ は擬圏である．
- 包含 $\Lambda^2_1 \hookrightarrow \Delta^2$ が定める単体的集合の射

$$\mathrm{Fun}(\Delta^2,\mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(\Lambda^2_1,\mathcal{C})$$

  は自明な *Kan* ファイブレーションである．

対象 x と y をつなぐ射のなす単体的集合を x から y への射空間とみなす．

定義 2.15 (射空間)

擬圏 $\mathcal{C}$ の対象 x, y に対して，単体的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) := \{x\} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}^{\Delta^1} \times_{\mathcal{C}} \{y\}$ を x から y への射空間 (space of morphisms) という．

定理 2.16

擬圏 $\mathcal{C}$ の対象 x, y に対して，単体的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$ は *Kan* 複体である．

以上から，擬圏は $(\infty,1)$ 圏のモデルと見ることができる．

単体的空間

擬圏は脈体と Kan 複体に対する共通の一般化として，単体的「集合」の枠組みにおいて拡張条件を用いて定義された．
一方，完備 Segal 空間は単体的「空間」の枠組みにおける $(\infty, 1)$ 圏のモデルである．

定義 2.17 (単体的空間)

関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ を単体的空間 (simplicial space) という．単体的空間の圏を $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}$ と表す．

単体的集合 S の n 単体 S_n は集合であるが，単体的空間 X の n 単体 X_n は単体的集合である．

注意 2.18

積-Fun 随伴より，$\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}) \cong \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et})$ が成立する．

埋め込み $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta} \hookrightarrow \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}$ を用いて標準的単体を定義する．

定義 2.19 (単体的集合関手 (の境界))

- $\Delta[n]$ を離散単体的集合とみなすことで定める単体的空間 $F(n)$ を n 次空間関手 (n-th space functor) という．
- $\partial\Delta[n]$ を離散単体的集合とみなすことで定める単体的空間 $\partial F(n)$ を n 次空間関手の境界 (boundary of n-th space functor) という．

注意 2.20

単体的空間 X に対して，単体的集合の同型 $\mathrm{Map}_{\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}}(F(n), X) \cong X_n$ が存在する．

Reedy ファイブラント

単体的空間に「空間」の性質を特徴づける条件が Reedy ファイブラントである.

$\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ 上の Quillen モデル構造において, Kan 複体はファイブラント対象である.
このモデル構造から $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}$ 上に Reedy モデル構造が定まる.
よって, Reedy モデル構造におけるファイブラント対象は「空間」のように思える.

定義 2.21 (Reedy ファイブラント)

X **を単体的空間とする. 任意の** $n, l \geq 0$ **と** $0 \leq i \leq n$ **に対して, 次の単体的集合の射**

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}}(F(n), X) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}}(\partial F(n), X)$$

が Kan ファイブレーションのとき, X **を Reedy ファイブラント (Reedy fibrant) という.**

Reedy ファイブラントの n **単体は「空間」である.**

定理 2.22

Reedy **ファイブラント** X **に対して,** X_n **は** *Kan* **複体である.**

例 2.23

任意の $n \geq 0$ **に対して,** $F(n)$ **は Reedy ファイブラントである.**

Segal 空間

Reedy ファイブラントに「圏」の性質を特徴づけるものとして，Segal 条件を定義する．
単体的集合の枠組みにおいて，圏の脈体は Segal 条件を用いて特徴づけることができる．

定理 2.24

単体的集合 S に対して，次は同値である．

- S はある小圏 $\mathcal{C}$ の脈体 $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ と自然同型である．
- 任意の $n \geq 2$ に対して，$\varphi_n : S_n \to S_1 \times_{S_0} \cdots \times_{S_0} S_1$ は同型である．

単体的集合の Segal 条件を単体的空間の枠組みおいて考える．

定義 2.25 (Segal 空間)

X を Reedy ファイブラントとする．任意の $n \geq 2$ に対して，次の単体的集合の射

$$\varphi_n : X_n \to X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

が Kan 弱同値のとき，X を Segal 空間 (Segal space) という．

例 2.26

任意の小圏 $\mathcal{C}$ に対して，脈体 $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ は Segal 空間である．

Segal 空間における射空間

Segal 空間における対象や射を定義する.

定義 2.27 (対象)

Segal 空間 X に対して, X_0 の点を X の対象 (object) という.

定義 2.28 (射空間)

Segal 空間 X の対象 x, y に対して, 単体的集合 $\mathrm{map}_X(x, y)$ を次のプルバックで定義し, X の射空間 (mapping space) という.
$\mathrm{map}_X(x, y)$ の元を x から y への射 (morphism) という.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{map}_X(x,y) \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d] \\ \Delta^0 \arrow[r, "{(x,y)}"'] & X_0 \times X_0 \end{tikzcd}$$

Segal 空間における射空間は「空間」である.

注意 2.29

Segal 空間 X の任意の対象 x, y に対して, $\mathrm{map}_X(x, y)$ は Kan 複体である.

Segal 空間における射の合成

Segal 空間において，射の合成は「可縮な空間の選択を除いて」一意に定まる.

補題 2.30

Segal 空間 X の任意の対象 $x_0, \cdots, x_n$ に対して，次の単体的集合の射

$$\mathrm{map}_X(x_0, \cdots, x_n) \to \mathrm{map}_X(x_0, x_1) \times \cdots \times \mathrm{map}_X(x_{n-1}, x_n)$$

は自明な *Kan* ファイブレーションである.

定義 2.31

Segal 空間 X の射 $f : x \to y, g : y \to z$ に対して，単体的集合 $\mathrm{comp}(f, g)$ を次のプルバックで定義する.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{comp}(f,g) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{map}_X(x,y,z) \arrow[d] \\
\Delta^0 \arrow[r, "{(f,g)}"'] & \mathrm{map}_X(x,y) \times \mathrm{map}_X(y,z)
\end{tikzcd}$$

注意 2.32

Segal 空間 X の射 $f : x \to y, g : y \to z$ に対して，$\mathrm{comp}(f, g)$ は可縮な Kan 複体である.

Segal 空間における射の合成

Segal 空間において，射の合成は「ホモトピーの違いを除いて」結合的かつ単位的である．

定義 2.33 (ホモトピック)

$f, g : x \to y$ を Segal 空間 X の射とする．$f, g : \Delta^0 \to \mathrm{map}_X(x, y)$ が単体的集合のホモトピックであるとき，f と g はホモトピック (homotopic) であるという．

定理 2.34

合成可能な射の組 f, g, h に対して，$(hg)f \sim h(gf)$ かつ $f\mathrm{id} \sim f$, $\mathrm{id}f \sim f$ である．

定義 2.35 (ホモトピー同値の空間)

Segal 空間 X に対して，ホモトピー同値のなす単体的部分集合を $X_{\mathrm{hoequiv}} \subset X_1$ と表す．

完備 Segal 空間

Segal 空間において，圏の性質とホモトピー論の性質は整合的ではない．[6]

2 つの対象が「Segal 空間 X においてホモトピックである」ことと，「Kan 複体 X_0 においてホモトピックである」ことを同値にする必要がある．

定義 2.36 (完備 Segal 空間)

Segal 空間 X に対して，次の単体的集合の射

$$s_0 : X_0 \to X_{\mathrm{hoequiv}}$$

が Kan 弱同値のとき，X は完備 (complete) であるという．

完備性は，圏論的な同型 (対象の同型) とホモトピー論的な同値 (ホモトピー同値) が 1 対 1 に対応するような条件である．

定理 2.37

小圏 $\mathcal{C}$ に対して，脈体 $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ が完備であることと，$\mathcal{C}$ が *gaunt* [7] であることは同値である．

[6] walking isomorhism をもつ亜群 $\{0 \leftrightarrow 1\}$ と 1 点圏 $\{*\}$ を比較するとよい．
[7] 圏 $\mathcal{C}$ が恒等射以外の同型射を持たないとき，$\mathcal{C}$ は gaunt であるという．

相対圏

今まで見たように, $(\infty, 1)$ 圏は圏論とホモトピー論の共通の一般化であった.
よって, ホモトピーの情報を「weak equivalence の射のクラス」として持つような圏が考えられる.

定義 2.38 (相対圏)

小圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ の wide 部分圏[8] W の組 $(\mathcal{C}, W)$ を相対圏 (relative category) という.

通常の圏は 2 つの極端な方法で相対圏とみなせる.

例 2.39 (極大と極小)

$(\mathcal{C}, W)$ を相対圏とする. $W = \mathcal{C}$ のとき, $(\mathcal{C}, W)$ は極大 (maximal) であるといい, $\mathcal{C}_{\mathrm{max}}$ と表す.
W が恒等射以外の射を含まないとき, $(\mathcal{C}, W)$ は極小 (minimal) であるといい, $\mathcal{C}_{\mathrm{min}}$ と表す.

相対圏の間の weak equivalence を保つような関手を定義する.

定義 2.40 (相対関手)

$(\mathcal{C}, W), (\mathcal{C}', W')$ を相対圏とする. 関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ が $F(W) \subset W'$ を満たすとき, F を相対関手 (relative functor) という.

相対圏と相対関手のなす圏を $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}$ と表す. 相対半順序集合と相対関手のなす圏を $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{P}\mathrm{os}$ と表す.

[8] 圏 $\mathcal{C}$ の対象をすべて含むような部分圏を wide 部分圏という.

半順序集合の細分化

単体的集合の重心細分と同様に，相対半順序集合の細分化を定義する．

定義 2.41 (終細分化)

相対半順序集合 $\mathcal{P}$ **に対して，相対半順序集合** $\xi_t\mathcal{P}$ **を次のように定義し，**$\mathcal{P}$ **の終細分化** (terminal subdivision) **という．**

- $\xi_t\mathcal{P}$ **の対象は** $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{P}\mathrm{os}$ **における** mono **射** $x : [n]_{\min} \to \mathcal{P}$ $(n \geq 0)$
- $\xi_t\mathcal{P}$ **の射は次の図式を可換にするような射** $[n_1]_{\min} \to [n_2]_{\min}$

$$\begin{tikzcd}
[n_1]_{\min} \arrow[rr] \arrow[dr, "x_1"'] & & [n_2]_{\min} \arrow[dl, "x_2"] \\
& \mathcal{P} &
\end{tikzcd}$$

- $\xi_t\mathcal{P}$ **の** weak equivalence **は誘導される射** $x_1(n_1) \to x_2(n_2)$ **が** $\mathcal{P}$ **の** weak equivalence **であるような射**

終細分化を与える対応は関手 $\xi_t : \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{P}\mathrm{os} \to \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{P}\mathrm{os}$ **を定める．双対的に，始細分化** $\xi_i : \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{P}\mathrm{os} \to \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{P}\mathrm{os}$ **も定義される．**

定義 2.42 (2 重細分化)

相対半順序集合 $\mathcal{P}$ **に対して，**$\xi\mathcal{P} := \xi_t\xi_i\mathcal{P}$ **を** $\mathcal{P}$ **の** 2 **重細分化** (two-fold subdivion) **という．**

1. 1 圏から高次圏へ
2. $(\infty, 1)$ 圏のモデル
3. **モデル圏論**
4. $(\infty, 1)$ 圏の理論のモデルの等価性

モデル圏とは

モデル圏

モデル圏とは，位相空間上のホモトピー論を抽象的に行うための枠組みである．
Quillen はホモトピー論を行うためには weak equivalence，fibration，cofibration の 3 つの射が重要であることを見抜き，この射の性質を公理化した．
これにより，位相空間の圏以外でもホモトピー論が行うことができるようになった．
例えば，位相空間の CW 近似や複体の projective resolution が，モデル圏におけるコファイブラント置換によって説明できる．

Quillen 同値

モデル圏 $\mathcal{M}$ に対して，ホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ が定義される．
モデル圏の同値として，Quillen 同値がある．この同値はモデル圏として随伴であって，ホモトピー圏が圏同値であるような条件である．
よって，$(\infty, 1)$ 圏の理論のモデルが等価であるかは，2 つのモデル圏が Quillen 同値であるかで判断する．

単体的集合の圏上の Joyal モデル構造

単体的集合の圏における weak equivalence として, Kan 弱同値のほかに Joyal 弱同値がある.

定義 3.1 (Joyal 弱同値)

$f : S \to T$ を単体的集合の射とする. 任意の擬圏 $\mathcal{C}$ に対して,

$$\mathrm{hFun}(T, \mathcal{C}) \to \mathrm{hFun}(S, \mathcal{C})$$

が通常の圏同値のとき, f を Joyal 弱同値 (Joyal weak equivalence) [9] という.

ファイブラント対象がちょうど擬圏であるような $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 上のモデル構造が存在する.

定理 3.2 (Joyal モデル構造)

単体的集合の mono 射を cofibration, Joyal 同値を weak equivalence とするような, $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 上のモデル構造が存在する. このモデル構造を $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 上の Joyal モデル構造といい, $(\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)_{\mathrm{Joyal}}$ と表す.

定理 3.3

$(\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)_{\mathrm{Joyal}}$ におけるファイブラント対象はちょうど擬圏である.

[9] 一般には, (弱) 圏同値 ((weak) categorical equivalence) と呼ばれる.

単体的空間の圏上の Rezk モデル構造

定義 3.4 (Rezk 弱同値)

$f : X \to Y$ を単体的空間の射とする．任意の完備 Segal 空間 W に対して，

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}}(Y, W) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}}(X, W)$$

が Kan 弱同値のとき，f を Rezk 弱同値 (Rezk weak equivalence) という．

ファイブラント対象がちょうど完備 Segal 空間であるような $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}$ 上のモデル構造が存在する．

定理 3.5 (Rezk モデル構造)

単体的空間の *mono* 射を *cofibration*, *Rezk* 弱同値を *weak equivalence* とするような, $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}$ 上のモデル構造が存在する．
このモデル構造を $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}$ 上の *Rezk* モデル構造といい, $(\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace})_{\mathrm{Rezk}}$ と表す．[10]

定理 3.6

$(\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace})_{\mathrm{Rezk}}$ におけるファイブラント対象はちょうど完備 *Segal* 空間である．

[10] 一般には，$(\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace})_{\mathrm{Rezk}}$ は $(\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace})_{\mathrm{Reedy}}$ の Bousfield 局所化を用いて定義される．

相対圏の圏上の Barwick-Kan モデル構造

随伴によってモデル構造がリフトされる．この定理を用いて，相対圏の圏上のモデル構造を定義する．

定理 3.7

$\mathcal{C}$ **をコファイブラント生成なモデル圏，** $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ **を随伴とする．** (F, G) **がいい条件を満たすとき，次のような** $\mathcal{D}$ **上のモデル構造が存在する．**

- *weak equivalence* **は** G **での像が** $\mathcal{C}$ **における** *weak equivalence* **となるような** $\mathcal{D}$ **の射**
- *fibration* **は** G **での像が** $\mathcal{C}$ **における** *fibration* **となるような** $\mathcal{D}$ **の射**

随伴 (N_ξ, K_ξ) **を用いて，** $(\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace})_{\mathrm{Reedy}}$ **から** $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}$ **上にモデル構造をリフトすることができる．**

定理 3.8 (Barwick-Kan **モデル構造**)

N_ξ **の像が** *Reedy* **弱同値である相対関手を** *weak equivalence*, N_ξ **の像が** *Reedy* **ファイブレーションであるような相対関手を** *fibration* **とするような，** $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}$ **上のモデル構造が存在する．**
このモデル構造を $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}$ **上の** *Barwick-Kan* **モデル構造といい，** $(\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at})_{\mathrm{BK}}$ **と表す．**

位相的圏と単体的圏の等価性

幾何学的実現と特異単体の随伴は豊穣圏の間の随伴にリフトする.

注意 4.1

随伴 $|-|: \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta \rightleftarrows \mathcal{T}\mathrm{op} : \mathrm{Sing}$ は, 随伴 $|-|: \mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta \rightleftarrows \mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}} : \mathrm{Sing}$ を定める.

本質的には次の命題から従う.

定理 4.2

いいモノイダルモデル圏の *Quillen* 随伴 $F : \mathbf{A} \rightleftarrows \mathbf{A}' : G$ は, *Quillen* 随伴 $F : (\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathbf{A}})_{\mathrm{Berg}} \leftrightarrows (\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathbf{A}'})_{\mathrm{Berg}} : G$ を定める.
更に, *Quillen* 同値からは *Quillen* 同値が定まる.

$\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta$ と $\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}}$ は Bergner モデル構造として Quillen 同値である.

定理 4.3 ([Bergner, 2005])

随伴 $|-|: \mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta \rightleftarrows \mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}} : \mathrm{Sing}$ は次の *Quillen* 同値を定める.

$$|-|: (\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta)_{\mathrm{Berg}} \rightleftarrows (\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}})_{\mathrm{Berg}} : \mathrm{Sing}$$

擬圏と位相的圏の等価性

$\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ と $\mathcal{C}\mathrm{at}_{\Delta}$ の随伴を Kan 拡張を用いて構成する.

注意 4.4

関手 $\mathfrak{C}[\Delta^{-}] : \Delta \to \mathcal{C}\mathrm{at}_{\Delta}$ を $\mathfrak{C}[\Delta^{-}]([n]) := \mathfrak{C}[\Delta^{n}]$ で定義する. Kan 拡張から, 次の随伴 $(\mathfrak{C}, \mathfrak{N})$ が得られる.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta} \arrow[dr, bend left, "\mathfrak{C}"] & \\
\Delta \arrow[u, "よ"] \arrow[r, "{\mathfrak{C}[\Delta^{-}]}"'] & \mathcal{C}\mathrm{at}_{\Delta} \arrow[ul, bend left, "\mathfrak{N}"]
\end{tikzcd}
$$

定理 4.5 ([Bergner, 2007])

随伴 $\mathfrak{C} : \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta} \rightleftarrows \mathcal{C}\mathrm{at}_{\Delta} : \mathfrak{N}$ は次の *Quillen* 同値を定める.

$$
\mathfrak{C} : (\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta})_{\mathrm{Joyal}} \rightleftarrows (\mathcal{C}\mathrm{at}_{\Delta})_{\mathrm{Berg}} : \mathfrak{N}
$$

完備 Segal 空間と擬圏の等価性

$\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}$ と $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ の随伴を Kan 拡張を用いて構成する.

注意 4.6

$[n]$ により自由生成される亜群の脈体を $\Delta'[n]$ と表す. 関手 $t : \Delta \times \Delta \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ を $t([m], [n]) := \Delta[m] \times \Delta'[n]$ で定義する. Kan 拡張から, 次の随伴 $(t_!, t^!)$ が得られる.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace} \arrow[dr, bend left, "t_!"] & \\ \Delta \times \Delta \arrow[u, "よ"] \arrow[r, "t"'] & \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta \arrow[ul, bend left, "t^!"] \end{tikzcd}$$

定理 4.7 ([Joyal and Tierney, 2006])

随伴 $(t_!, t^!)$ は次の *Quillen* 同値を定める.

$$t_! : (\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace})_{\mathrm{Rezk}} \rightleftarrows (\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)_{\mathrm{Joyal}} : t^!$$

完備 Segal 空間と相対圏の等価性

$\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}$ と $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}$ の随伴を Kan 拡張を用いて構成する.

注意 4.8

関手 $[-]^{\xi}_{\mathrm{m,m}} : \Delta \times \Delta \to \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}$ を $[-]^{\xi}_{\mathrm{m,m}}([n],[m]) := \xi([n]_{\mathrm{min}} \times [m]_{\mathrm{max}})$ で定義する.
Kan 拡張から, 次の随伴 (K_ξ, N_ξ) が得られる.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace} \arrow[dr, bend left, "K_\xi"] & \\ \Delta \times \Delta \arrow[u, "\text{よ}"] \arrow[r, "{[-]^{\xi}_{\mathrm{m,m}}}"'] & \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at} \arrow[ul, bend left, "N_\xi"] \end{tikzcd}$$

定理 4.9 ([Barwick and Kan, 2011])

随伴 (K_ξ, N_ξ) は次の *Quillen* 同値を定める.

$$K_\xi : (\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace})_{\mathrm{Rezk}} \rightleftarrows (\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at})_{\mathrm{BK}} : N_\xi$$

まとめ

本稿で紹介した Quillen **同値をまとめる**.

次の Quillen **同値の列が存在する**. **(上矢印が左** Quillen **同値)**

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at})_{\mathrm{BK}} \arrow[r, bend right, "N_\xi"'] & (\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace})_{\mathrm{Rezk}} \arrow[l, bend right, "K_\xi"'] \arrow[r, bend left, "t_!"] & (\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)_{\mathrm{Joyal}} \arrow[l, bend left, "t^!"] \arrow[r, bend left, "\mathfrak{C}"] & (\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta)_{\mathrm{Berg}} \arrow[l, bend left, "\mathfrak{N}"] \arrow[r, bend left, "|-|"] & (\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}})_{\mathrm{Berg}} \arrow[l, bend left, "\mathrm{Sing}"]
\end{tikzcd}$$

参考文献 I

[Barwick and Kan, 2011] Barwick, C. and Kan, D. M. (2011).
Relative categories: Another model for the homotopy theory of homotopy theories.

[Bergner, 2005] Bergner, J. E. (2005).
A model category structure on the category of simplicial categories.

[Bergner, 2007] Bergner, J. E. (2007).
Three models for the homotopy theory of homotopy theories.
Topology, 46(4):397–436.

[Joyal and Tierney, 2006] Joyal, A. and Tierney, M. (2006).
Quasi-categories vs segal spaces.