K3 曲面の微分幾何

すてふ Sgt_stephen3rd

2024/3/30

K3 曲面

- コンパクトな単連結複素曲面であって、至る所非退化な正則２形式を持つものを K3 曲面（=Kummar, Kahler, Kodaira) という。

e.g. $[X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0] \subset \mathbb{P}^3$ (Fermat hypersurface)
e.g $T/\pm 1$ の極小特異点解消 (Kummer 曲面)

諸性質

- K3 曲面は全て微分同相
- 特に $H^2(X;Z)$ は格子の構造も含めて符号 $(3,19)$ の K3 格子 $L := U^{\oplus 3} \oplus E_8^{\oplus 2}$ と同型
- K3 曲面には必ずケーラー計量が存在している

周期写像とモジュライ

- K3 曲面 X と同型 $\alpha : H^2(X;\mathbb{Z}) \to L$ の組を印付き K3 曲面と言い、α を印という
- $\Omega := \{[\omega] \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \mid \omega^2 = 0, (\omega, \overline{\omega}) > 0\}$ を K3 曲面の周期領域と言い、$(X, \alpha) \mapsto \alpha(\omega_X)$ を印付き K3 曲面の同型類から周期領域への周期写像という
- 先人たちの努力の末に、周期写像は周期領域と印付き K3 曲面の同型類の間の一対一対応を与えていることが示された
- 印の取り換えは Ω 側では $O(L)$ の作用として実現されるが、カスなことに $O(L)\backslash\Omega$ は激しく Non-Hausdorff である。。。

標準計量の存在定理

Theorem
X を標準類が自明な n 次元コンパクト複素多様体とする。このとき、任意のケーラー類はリッチ平坦なケーラー計量を一意に持つ。

リッチ平坦 K3 曲面のモジュライ

- K3 曲面とリッチ平坦ケーラー計量の組のモジュライ空間を考えたい（そうすると実はモジュライ空間がハウスドルフになってくれる）
- 印付きリッチ平坦 K3 曲面 (X, κ, α) に対して $p(X, \kappa, \alpha) := (\alpha(\omega_X), \alpha(\kappa)) \in L_{\mathbb{C}} \times L_{\mathbb{C}}$ を周期写像として定義するとこれは $K\Omega^0 \subset L_{\mathbb{C}} \times L_{\mathbb{C}}$ との全単射を与える ($K\Omega^0$ は L の格子の構造だけで記述できるが割愛)
- $K\Omega^0$ の部分的コンパクト化として、ケーラー類が半正値なものを許したものを $K\Omega$ と書くことにするとリッチ平坦 K3 曲面のモジュライ空間は $O(L)\backslash O(3, 19)/O(3) \times O(19)$ として記述できることが知られている

Kobayashi–Todorov, Kobayashi, etc...

- 部分的コンパクト化 $K\Omega$ は、コホモロジー類の退化として記述されているので、対応する計量の退化はどうなっているか
- Kobayashi–Todorov, Kobayashi, Bando–Kasue–Nakajima, etc... により次のことが分かった

Theorem
モジュライ空間 $K\Omega$(の商空間としての自然な位相構造）と、{ リッチ平坦 $K3$ 曲面たち } *with* 非崩壊グロモフ・ハウスドルフ閉包 は同相である。

もう少し詳しい話

- 退化したリッチ平坦 K3 曲面はクライン特異点を持つことが知られている (これは一般に標準特異点になる)
- クライン特異点は局所的に $\mathbb{C}^2/\Gamma$ （ただし Γ は SL の有限部分群）の形をしている
- 退化したケーラー計量はオービフォールド計量というものになっている

漸近的な計算の仕方

- X のリッチ平坦オービフォールド計量 ω を取ってくる
- 各特異点の近傍を ALE-gravitational instanton[Kronheimer] で取り替える（これを ω_0 と置く）
- すると ω_0 は X の smoothing 上の計量で、“ 張り合わせた ” ところ以外ではリッチ平坦になっている
- ω_0 を reference metric として Monge–Ampere 方程式を解く

今後の発展

- 高次元化←なんか無限にスーパー中国人とスーパーフランス人がやってる
- より詳細な理解←私の研究テーマらしい

高次元化

- 一般に、標準特異点を持つカラビ–ヤウ多様体に対してリッチ平坦計量が任意のケーラー類の中に存在していることが示された (Eyssidieux–Guedj–Zeriahi)
- さらにこれも GH 収束定理が示された (Rong–Zhang, Zhang)
- みんなすごいですね

より詳細な理解

- Kobayashi にて、K–T で示された収束定理の詳細が評価された。とくに、複素構造を固定したうえで、収束のオーダーが具体的に計算された。
- Kobayashi の計算を、複素構造まで動かして拡張できないか？
- みんなはえらいのに、漏れはカス

参考文献

- R. Kobayashi, Moduli of Einstein metrics on a K3 surface and degenerationof type I
- R. Kobayashi, A, Todorov, Polarized Period map for generalized K3 surfaces and the moduli of Einstein metrics
- P. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyperkahler quotients