連立一次方程式の非負整数解の個数を複素積分で計算する

N.Y

@N_Y_Big_Apple

今日、何をやるか

今日、何をやるか

①特定の条件を満たす行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$
について連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}\ (\mathbf{b} \in \mathbb{Z})$
の非負整数解の個数を数え上げる公式を紹介
[Lasserre2001]

今日、何をやるか

①特定の条件を満たす行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$
について連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}\ (\mathbf{b} \in \mathbb{Z})$
の非負整数解の個数を数え上げる公式を紹介
[Lasserre2001]

②一次方程式についての結果を利用し,
二次連立方程式の非負整数解の個数
を推定する確率変数を構成した

モチベーション

→とにかくディオファントス方程式をわかりたい!!!!!!!

未解決問題の例
(Erdős-Straus 予想)

すべての整数$N \geq 2$に対して,

$$\frac{4}{N} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}$$

を満たす正の整数X, Y, Zは存在するか?

どんな(高次)ディオファントス方程式も
二次連立方程式に帰着できる.

どんな(高次)ディオファントス方程式も
二次連立方程式に帰着できる.

例. 方程式 $3xy^2 + z = 1$ は

$$\begin{cases} xy = u \\ 3uy + z = 1 \end{cases}$$

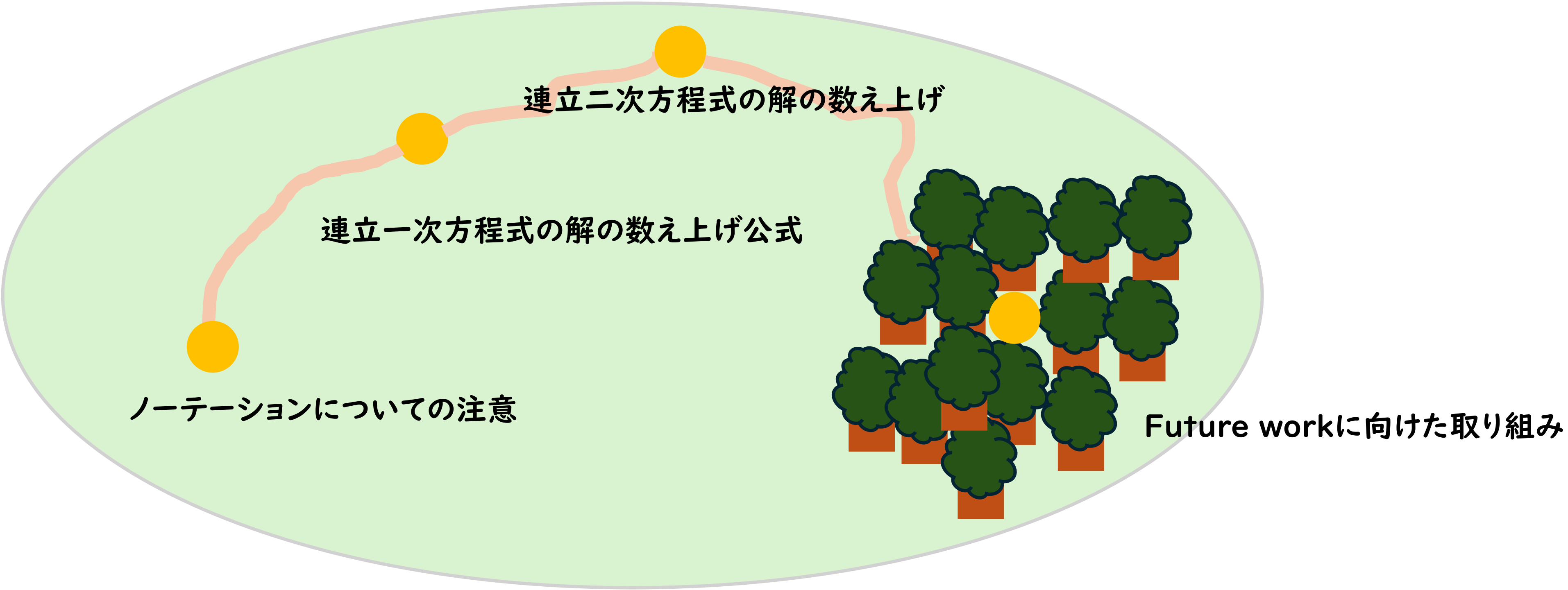
と等価

こういう形の連立方程式についてアプローチしたい.

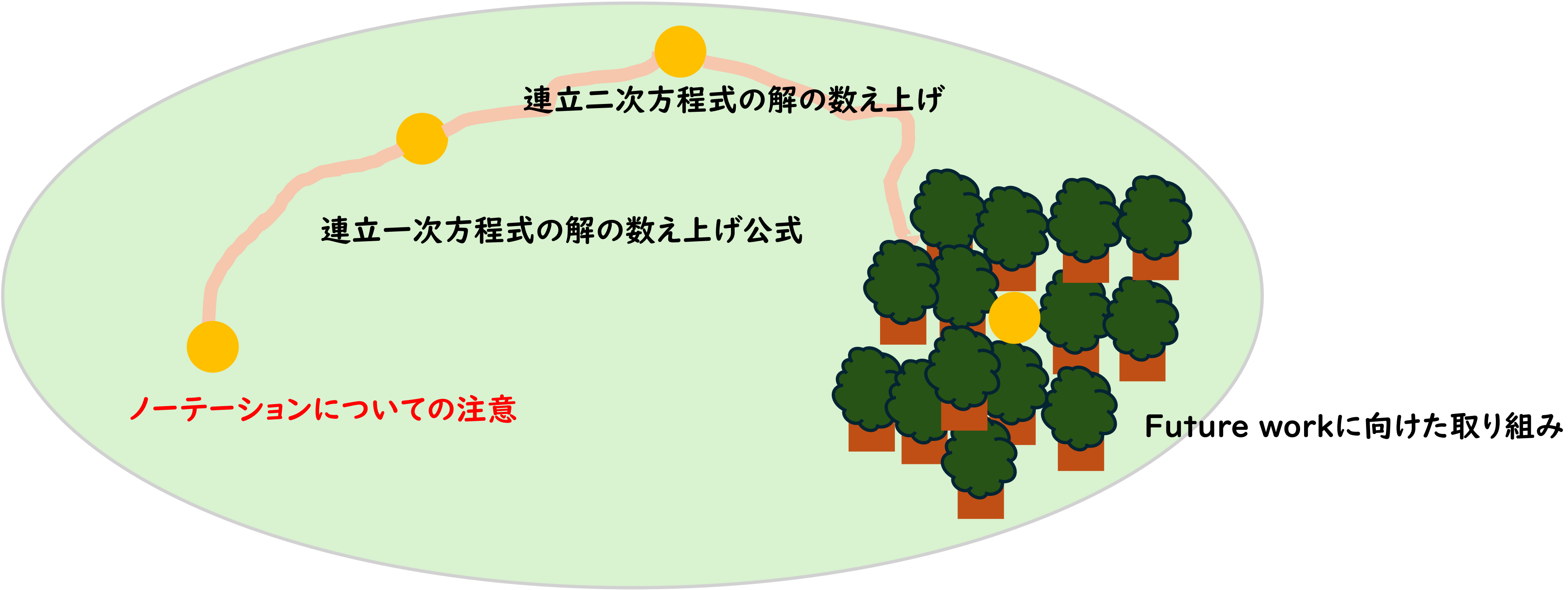
$$\begin{cases} \sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(1)} x_k = c^{(1)} \\ . \\ . \\ \sum_{i,j} a_{ij}^{(m)} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(m)} x_k = c^{(m)} \end{cases}$$

$$(a_{ij}^{(l)}, b_k^{(l)}, c^{(l)} \in \mathbb{Z})$$

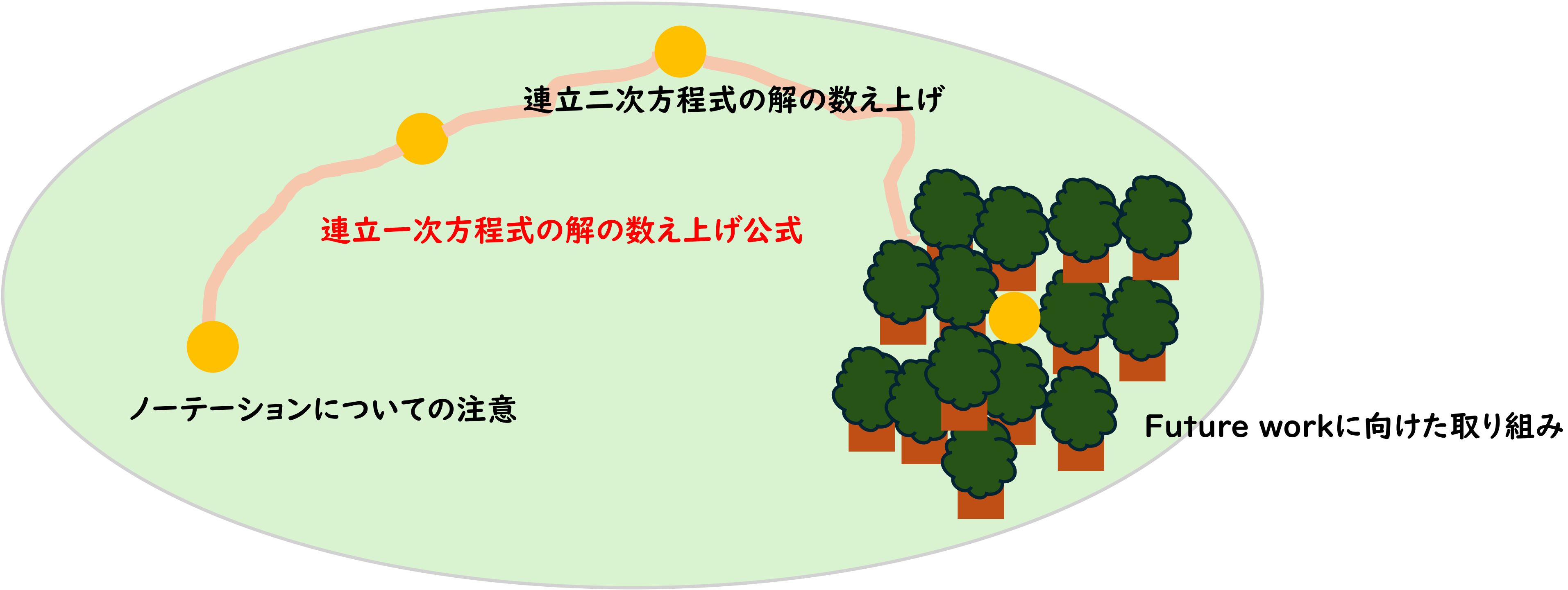
もくじ


連立二次方程式の解の数え上げ
連立一次方程式の解の数え上げ公式
ノーテーションについての注意
Future workに向けた取り組み

もくじ

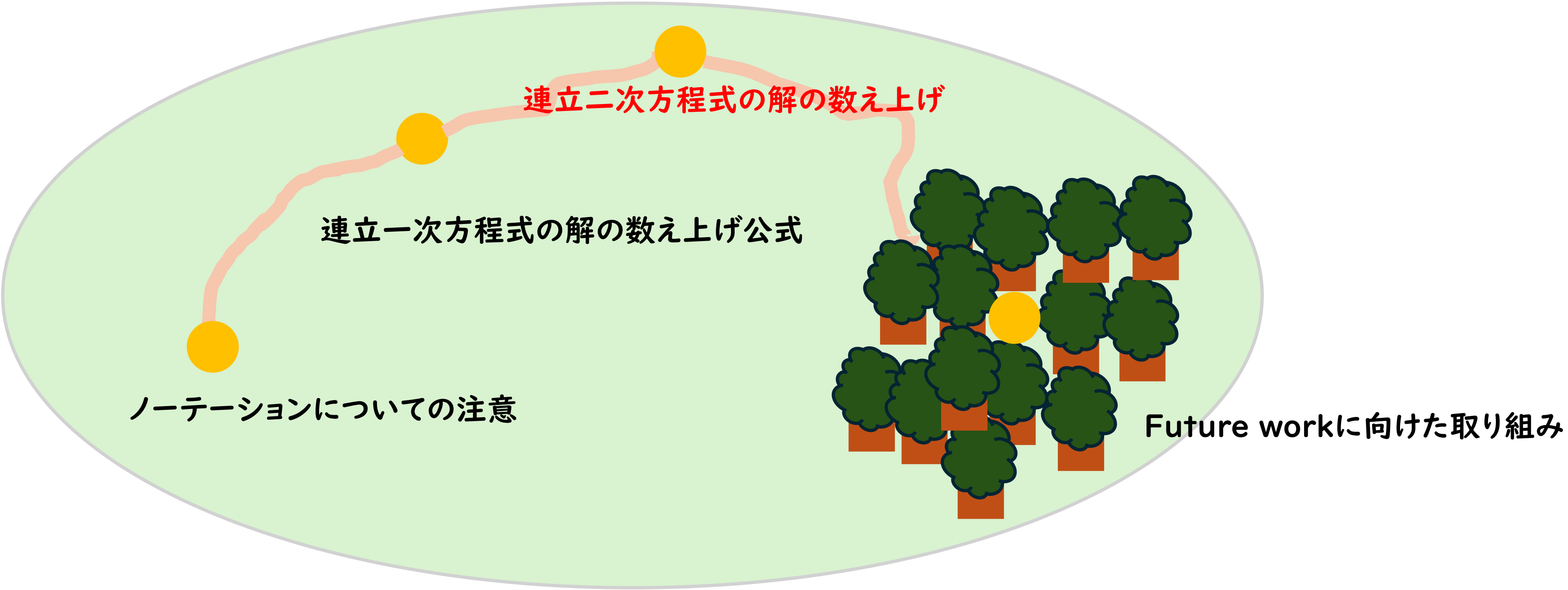

連立二次方程式の解の数え上げ
連立一次方程式の解の数え上げ公式
ノーテーションについての注意
Future workに向けた取り組み

もくじ



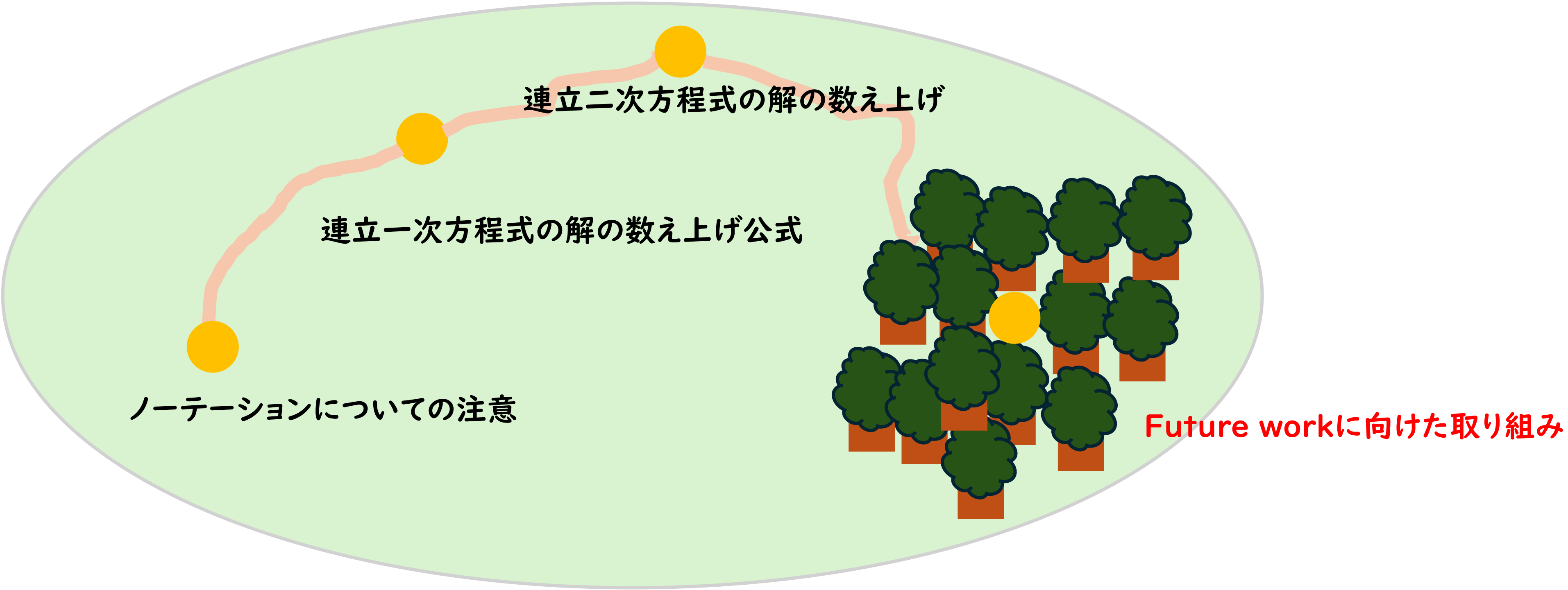
連立二次方程式の解の数え上げ
連立一次方程式の解の数え上げ公式
ノーテーションについての注意
Future workに向けた取り組み

もくじ

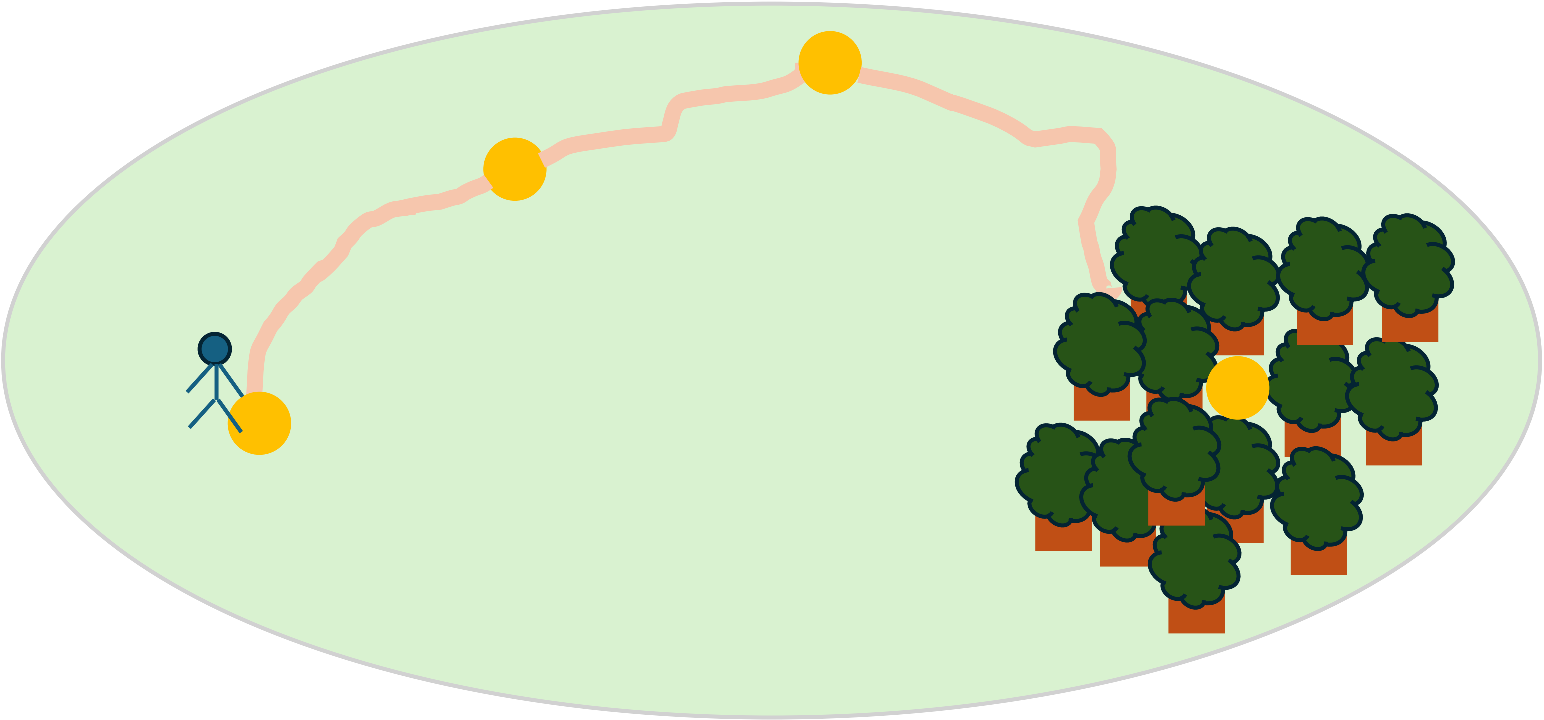


連立二次方程式の解の数え上げ
連立一次方程式の解の数え上げ公式
ノーテーションについての注意
Future workに向けた取り組み

もくじ


連立二次方程式の解の数え上げ
連立一次方程式の解の数え上げ公式
ノーテーションについての注意
Future workに向けた取り組み

ノーテーションについての注意



行列A
のij成分をa_{ij}と書いたりなど，
大文字で行列を定義して小文字でその成分を表す．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$のとき，$a_{21} = 3$

ベクトルを $\mathbf{b}$ のように太字で表し,その成分を
b_i のように書く.

特に何も言わなかったらベクトルは縦ベクトルと思って.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$ のとき,$b_3 = 6$

ベクトルの次元を明記しない場合がある.
例えばm次元の零ベクトルもn次元の零ベクトルも
両方$\mathbf{o}$のように書く.

ベクトルに対して$\mathbf{a} > \mathbf{b}$などと
書いている場合は各成分について
不等式が成り立っていると思って.

$$\mathbf{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$のとき,$\mathbf{a} > \mathbf{b}$

同じ次元のベクトル**a**,**b**
に対して$\mathbf{a}^{\mathbf{b}}$などと書いている場合は
$a_1^{b_1} \cdots a_m^{b_m}$ を意味していると思って.

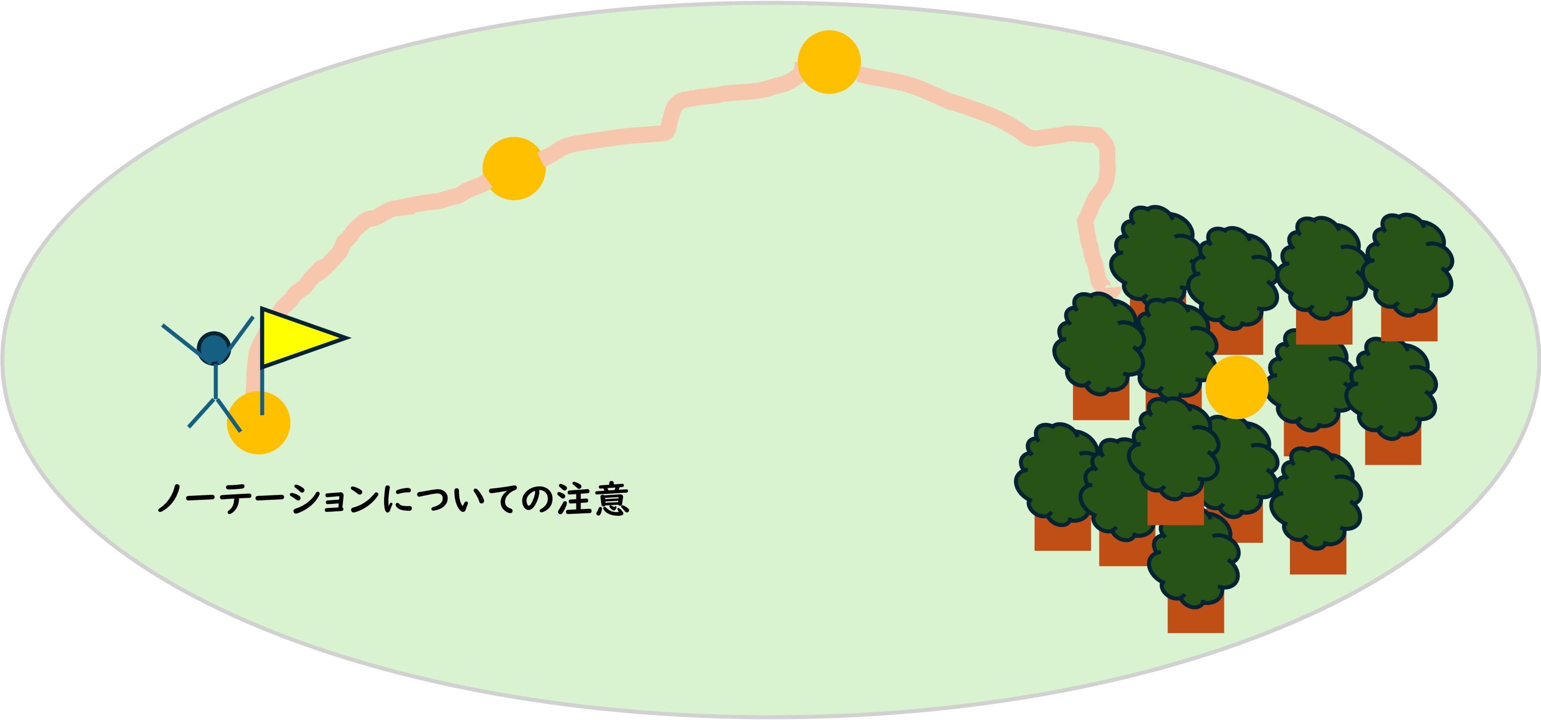
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$ のとき

$$\mathbf{a}^{\mathbf{b}} = 1^4 \cdot 2^5 = 32$$

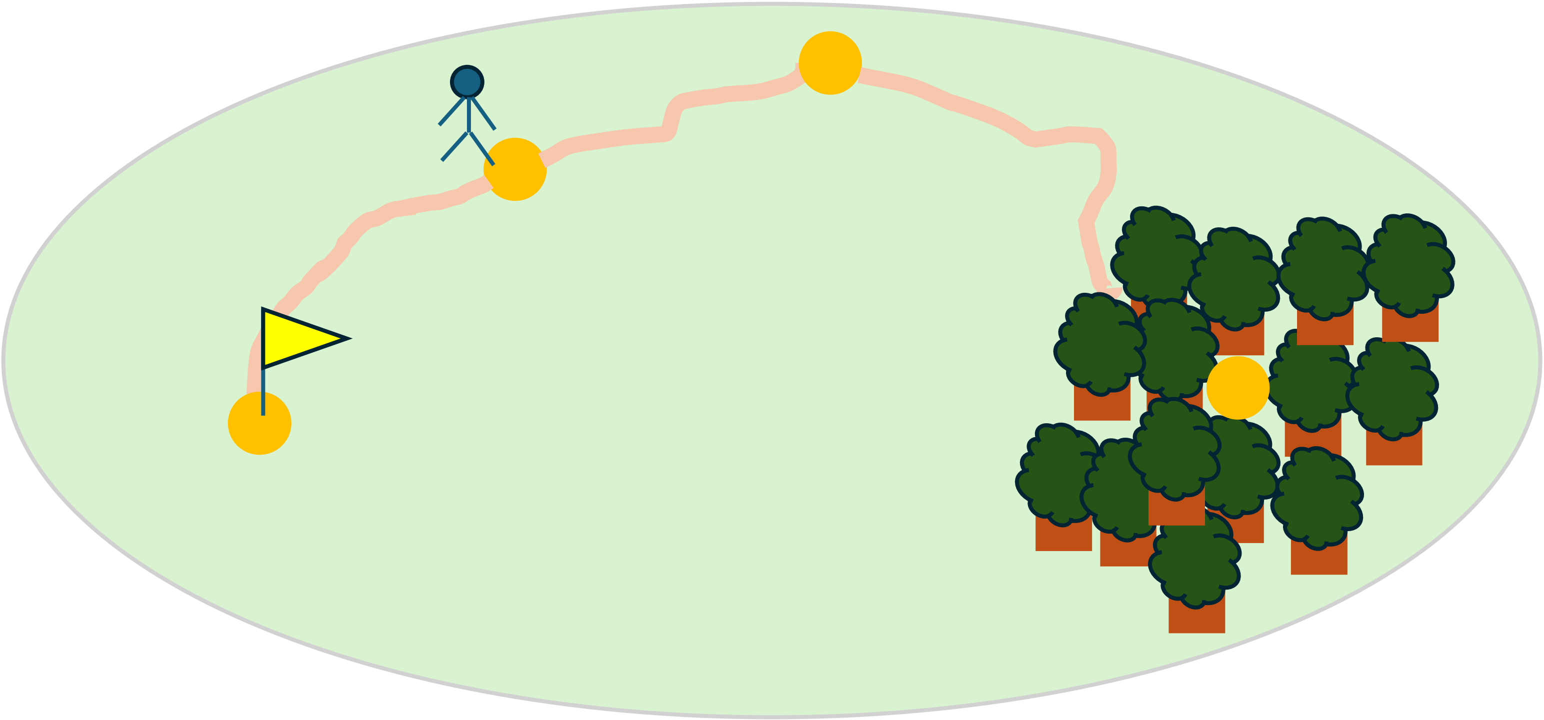
ベクトル$\mathbf{v}$に対して $\ln(\mathbf{v})$などと書いている場合は
$(\ln(v_1), \dots, \ln(v_m))^\top$を意味していると思って.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} \text{のとき} \qquad \ln(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

STAGE CLEAR !



連立一次方程式の解の数え上げ公式



まず係数行列 A が満たすべき条件を明示しておく

まず係数行列 A は以下の【条件】を満たしているものを考える.

【条件】

$$\mathbb{K}_A = \{u \in \mathbb{R}^m \mid A^\top u > \mathbf{0}\} \neq \emptyset$$

この【条件】には同値な条件がある.(こちらの方が直感的かも)

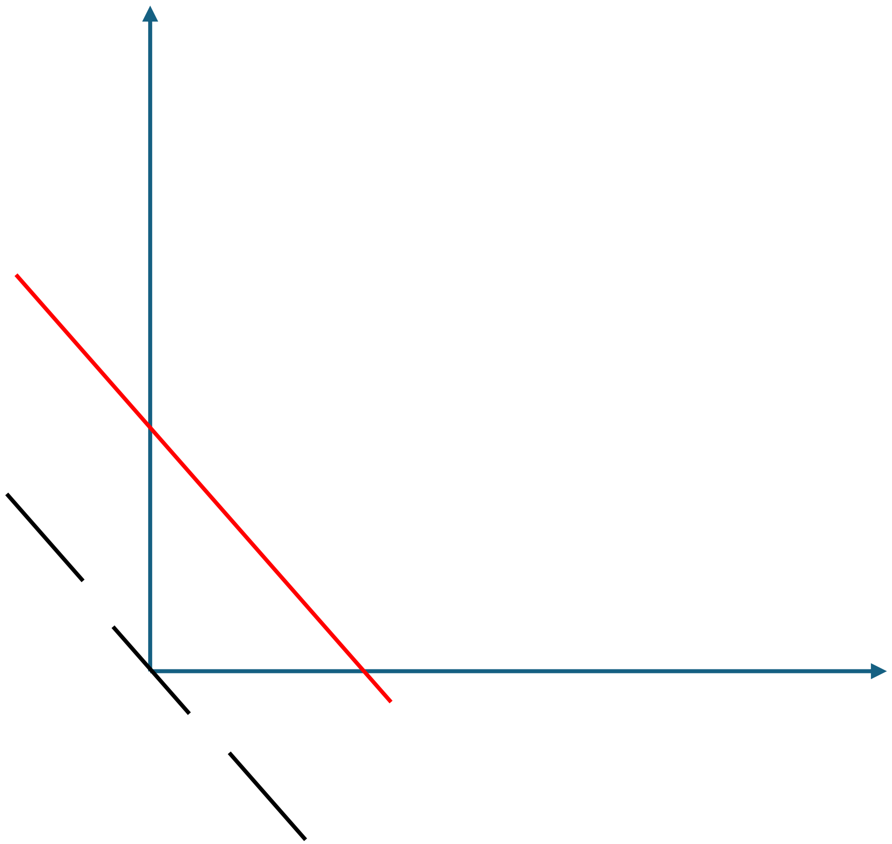
この【条件】には同値な条件がある.（こちらの方が直感的かも）

命題
以下①,②は同値

① $\mathbb{K}_A = \{u \in \mathbb{R}^m \mid A^\top u > \mathbf{o}\} \neq \emptyset$

② $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{o}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\} = \{\mathbf{o}\}$

【条件】を満たしている例

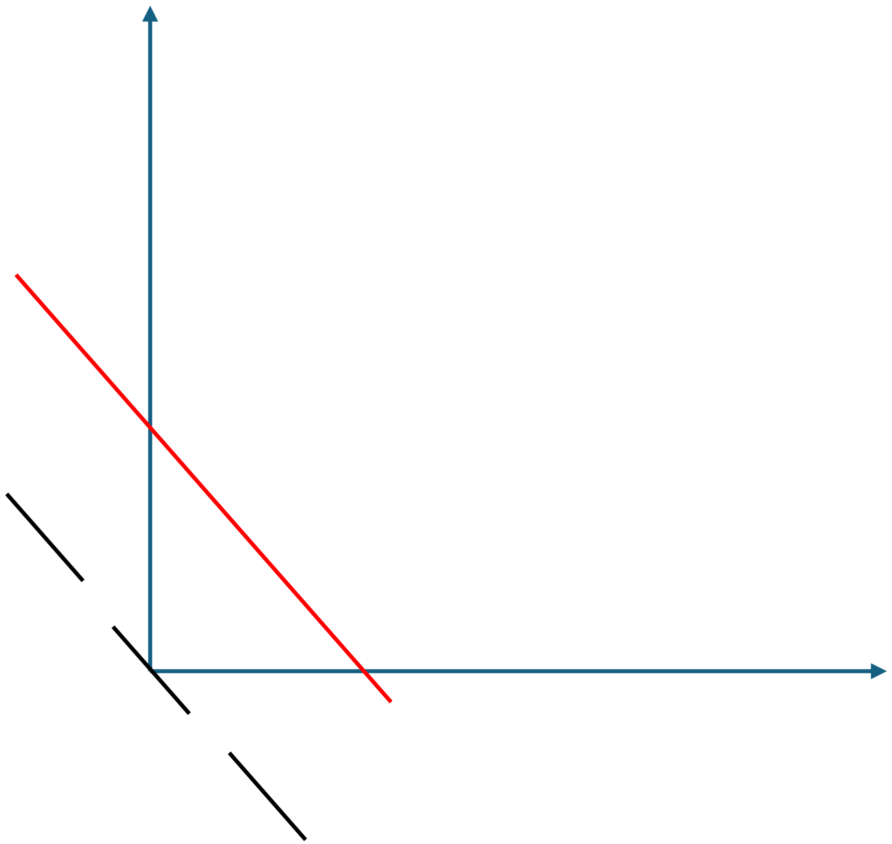


$$2x + 3y = 1$$

$$A = (2, 3),\ \mathbf{b} = (1)$$

$$A^\top \mathbf{u} = u \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

【条件】を満たしている例



$$2x + 3y = 1$$

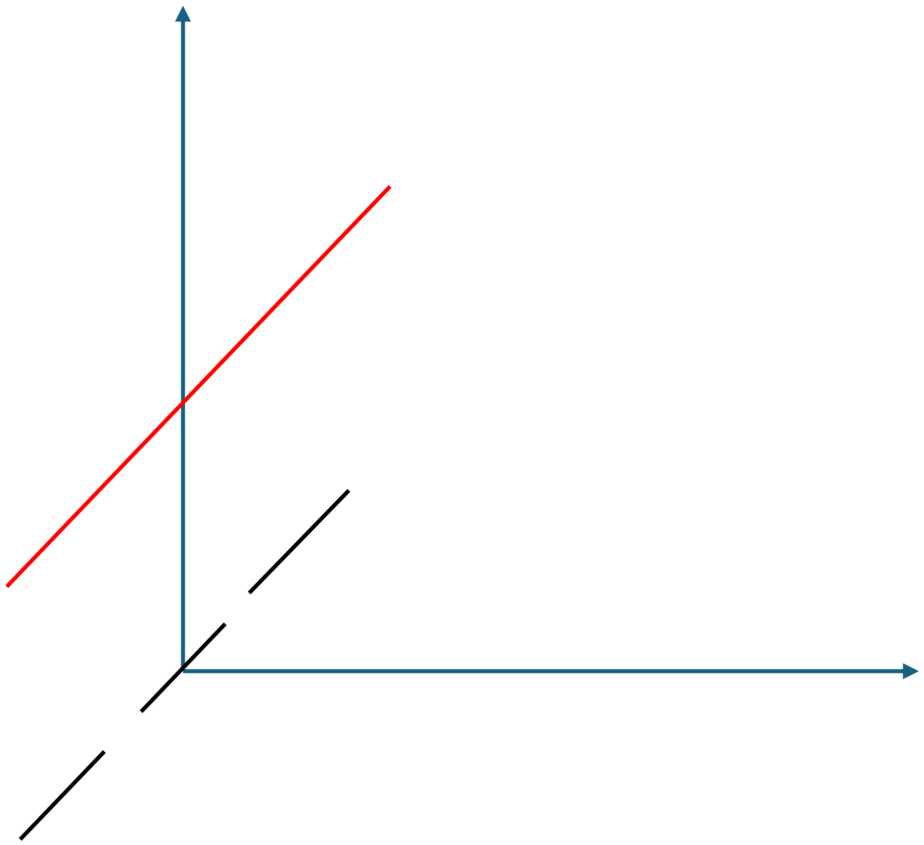
$$A = (2, 3), \mathbf{b} = (1)$$

$2x + 3y = 0$を満たす非負の(x, y)は$(0, 0)$のみ

$$A^\top \mathbf{u} = u \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

→　正のuを掛ければ全成分が正

【条件】を満たしていない例

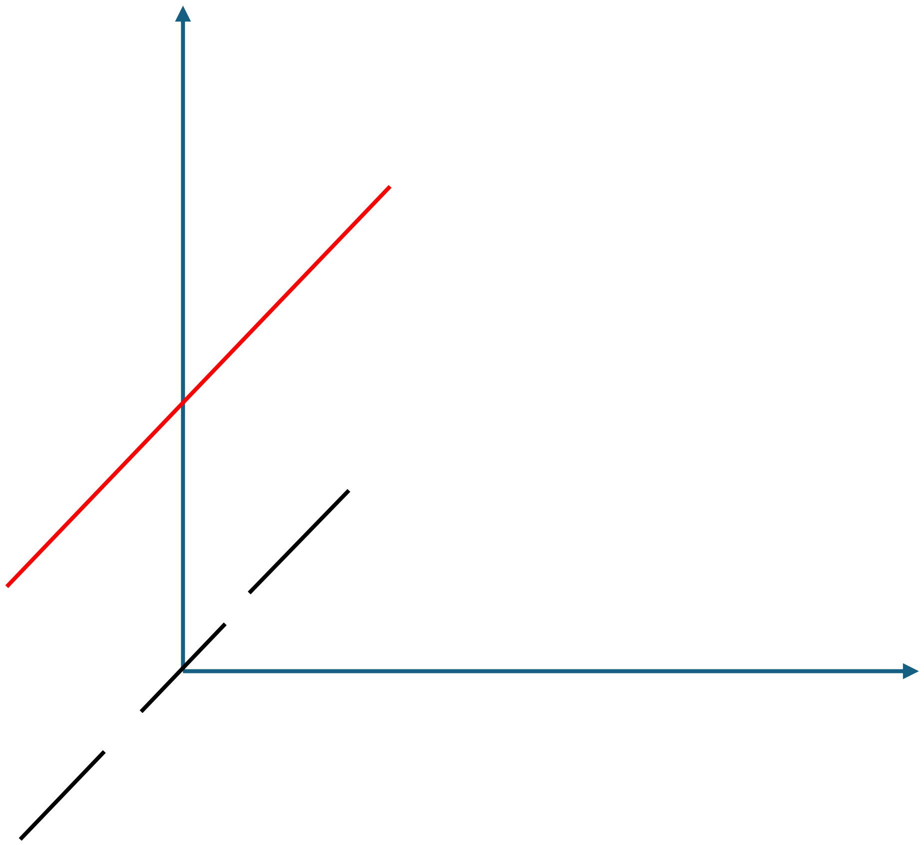


$$-2x + 3y = 1$$

$$A = (-2, 3),\ \mathbf{b} = (1)$$

$$A^{\top}\mathbf{u} = u\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

【条件】を満たしていない例



$$-2x + 3y = 1$$

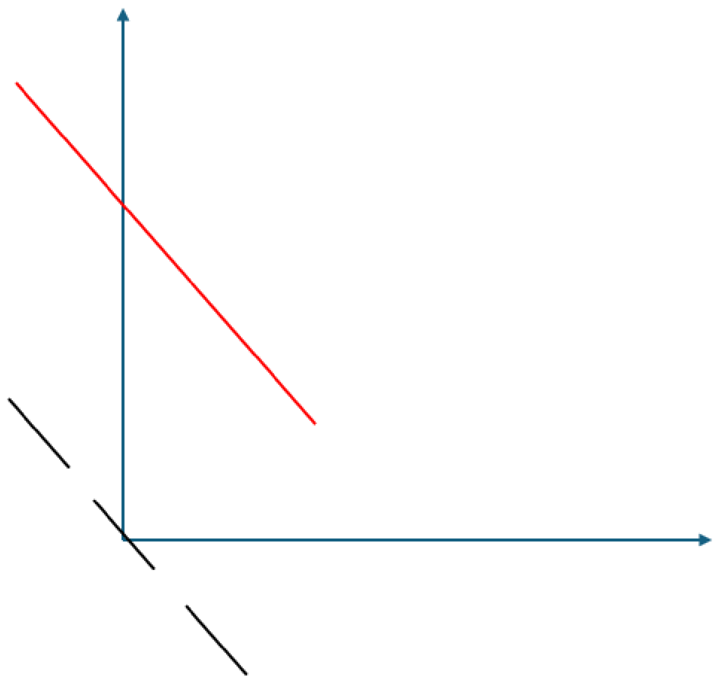
$$A = (-2, 3),\ \mathbf{b} = (1)$$

$-2x + 3y = 0$を満たす非負の(x, y)はいっぱいある

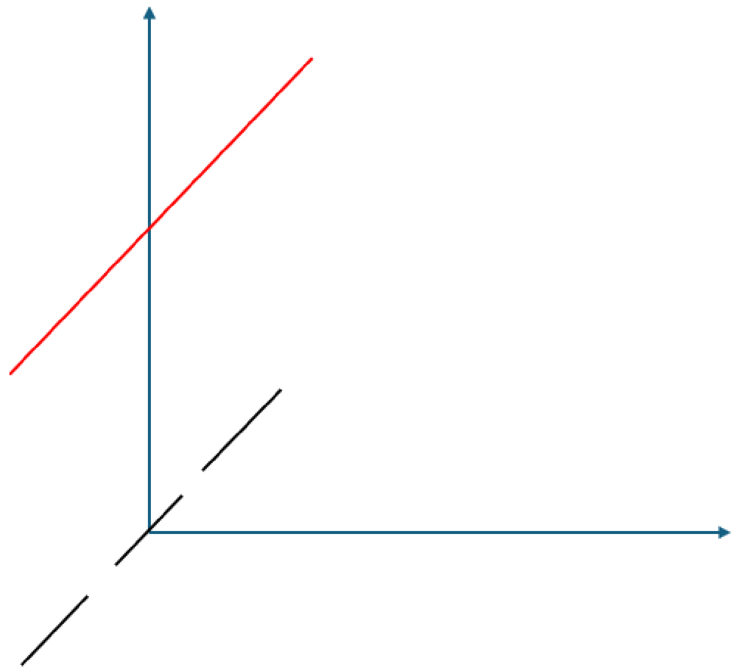
$$A^\top \mathbf{u} = u \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

→ 全成分を正にはできない!

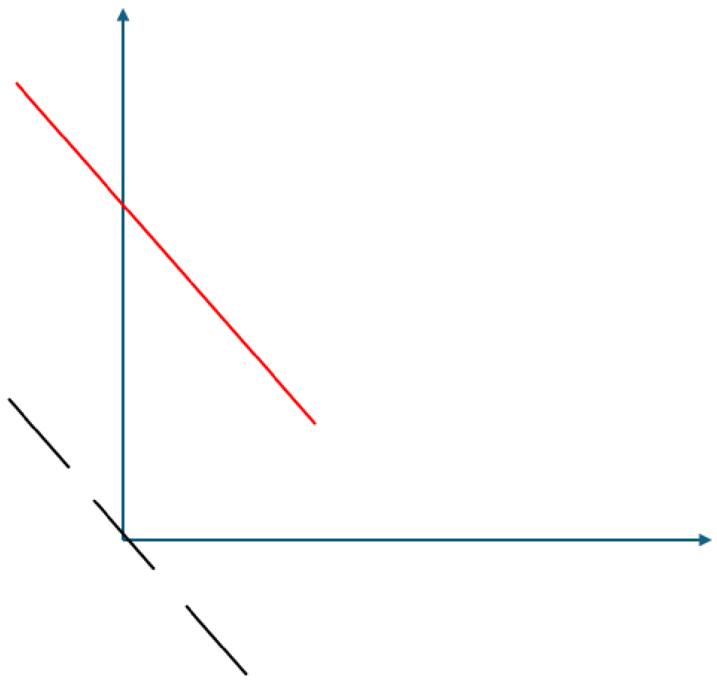
【条件】を満たしている



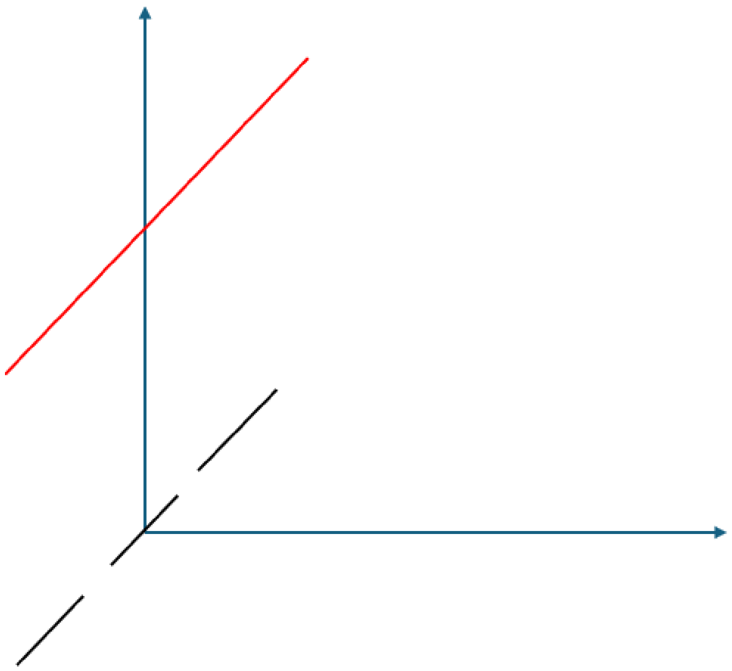
【条件】を満たしていない



【条件】を満たしている



【条件】を満たしていない



【条件】は格子点を数えるということが
意味を成すための条件

$\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ に対して

$$\Omega(\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\}$$

と定める.

$\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ に対して

$$\Omega(\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\}$$

と定める.

→ つまり数えたいのは $|\Omega(\mathbf{b})|$

$\mathbf{c} \geq \mathbf{o}$ を固定する.

写像 $\begin{array}{ccc} \mathbf{b} & \mapsto & f_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) \\ \rotatebox{-90}{$\in$} & & \rotatebox{-90}{$\in$} \\ \mathbb{Z}^m & & \mathbb{R} \end{array}$ を

$$f_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{b})} \exp(\mathbf{c}^\top \mathbf{x})$$

で定める.

$$f_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Omega(\mathbf{b})} \exp(\mathbf{c}^\top \mathbf{x})$$

↓

$\mathbf{c} = \mathbf{0}$ の場合は明らかに

$$f_{\mathbf{0}}(\mathbf{b}) = |\Omega(\mathbf{b})|$$

である.

f_{c} に対して複素関数 $\mathcal{F}[f_{\mathrm{c}}](\mathbf{z}) = \mathcal{F}[f_{\mathrm{c}}](z_1, \ldots, z_m)$

を対応させる変換

$\mathcal{F}$ ： $f_{\mathrm{c}} \mapsto \mathcal{F}[f_{\mathrm{c}}](\mathbf{z})$

を考える.

f_{c} に対して複素関数 $\mathcal{F}[f_{\mathrm{c}}](\mathbf{z}) = \mathcal{F}[f_{\mathrm{c}}](z_1, \ldots, z_m)$

を対応させる変換

$$\mathcal{F}: \ f_{\mathrm{c}} \mapsto \mathcal{F}[f_{\mathrm{c}}](\mathbf{z})$$

を考える.

$\mathcal{F}[f_{\mathrm{c}}](\mathbf{z})$ をいい感じの式で表し,その逆変換をすることで

$f_{\mathrm{c}}(\mathbf{b})$ を得る方針

$\mathcal{F}[f_{\mathbf{c}}](\mathbf{z})$ は具体的には

$$\mathcal{F}[f_{\mathbf{c}}](\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^m} f_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})\mathbf{z}^{-\mathbf{b}}$$

で定める.(級数が収束する範囲において)

以下，$f_{\mathrm{c}}(\mathbf{b})$や $\mathcal{F}[f_{\mathbf{c}}](\mathbf{z})$について，
文脈上混乱の恐れのない場合は省略して
$f(\mathbf{b})$とか$\mathcal{F}(\mathbf{z})$などと書く.

定理

$f, \mathcal{F}$が先に定めた通りとし,Aを【条件】を満たす行列とする.

(Aが条件を満たすとき,

ある$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$について$A^\top \mathbf{u} > \mathbf{c}$となることに注意)

このとき,$(|z_1|, \ldots, |z_m|) \in \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^m \mid A^\top \ln(\mathbf{v}) > \mathbf{c}\}$

を満たす範囲の$\mathbf{z}$において,

$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \Pi_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}}$

が成り立つ.

(証明)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{z}) &= \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^m} f(\mathbf{b})\mathbf{z}^{-\mathbf{b}} \\
&= \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^m} \mathbf{z}^{-\mathbf{b}}\left\{\sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{N}^n, A\mathbf{x}=\mathbf{b}} \exp(\mathbf{c}^\top\mathbf{x})\right\} \\
&= \sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{N}^n} \exp(\mathbf{c}^\top\mathbf{x})\mathbf{z}^{-(A\mathbf{x})}
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

和の中身を見てみると，

$$\exp(\mathbf{c}^\top \mathbf{x})\mathbf{z}^{-(A\mathbf{x})}$$

$$= \exp(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) z_1^{-(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)} \cdots z_m^{-(a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n)}$$

$$= \Pi_{k=1}^n \{\exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} z_2^{-a_{2k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}\}^{x_k}$$

ここで,条件$(|z_1|, \ldots, |z_m|) \in \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^m \mid A^\top \ln(\mathbf{v}) > \mathbf{c}\}$は

$|z_1^{a_{1k}} \cdots z_m^{a_{mk}}| > \exp(c_k)$ (for all k)

つまり,

$|\exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}| < 1$ (for all k)

を意味している.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{z}) &= \sum_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{N}} \prod_{k=1}^{n} \{\exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} z_2^{-a_{2k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}\}^{x_k} \\
&= \sum_{x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{N}} (\prod_{k=2}^{n} \{\exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} z_2^{-a_{2k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}\}^{x_k}) \\
&\quad \times \{(\exp(c_1) z_1^{-a_{11}} \cdots z_m^{-a_{m1}})^0 + (\exp(c_1) z_1^{-a_{11}} \cdots z_m^{-a_{m1}})^1 + \cdots\} \\
&= \sum_{x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{N}} (\prod_{k=2}^{n} \{\exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} z_2^{-a_{2k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}\}^{x_k}) \frac{1}{1-\exp(c_1) z_1^{-a_{11}} \cdots z_m^{-a_{m1}}} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}} \qquad \square
\end{aligned}
$$

この結果に対して,逆変換をして
解の数え上げ公式を得よう.

定理

$\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$に対して,

$$f(\mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \frac{z_1^{b_1-1} \ldots z_m^{b_m-1}}{\prod_{k=1}^{n} 1-\exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \ldots z_m^{-a_{mk}}} d\mathbf{z}$$

がなりたつ.

ただし,$R_1, \ldots, R_m$は$R_1^{a_{1k}} \cdots R_m^{a_{mk}} > \exp(c_k)$

(for all k)を満たしていなければならない.

(証明)

$\int_{|z|=R} z^w dz \; (R>0)$を考えると,

$\int_{|z|=R} z^{-1} dz = 2\pi\sqrt{-1},\, w \neq -1$では$\int_{|z|=R} z^w dz = 0$

であるため,

$$\int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \mathcal{F}(\mathbf{z}) z_1^{Y_1} \cdots z_m^{Y_m} d\mathbf{z}$$
$$= \int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^m} f(\mathbf{b}) z_1^{-b_1+Y_1} \cdots z_m^{-b_m+Y_m} d\mathbf{z}$$

(証明)

$\int_{|z|=R} z^w dz\ (R>0)$を考えると,

$\int_{|z|=R} z^{-1} dz = 2\pi\sqrt{-1},\ w \neq -1$では$\int_{|z|=R} z^w dz = 0$

であるため,

$$\int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \mathcal{F}(\mathbf{z}) z_1^{Y_1} \cdots z_m^{Y_m} d\mathbf{z}$$
$$= \int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^m} f(\mathbf{b}) z_1^{-b_1+Y_1} \cdots z_m^{-b_m+Y_m} d\mathbf{z}$$

あとは和と積分が交換できてほしい!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) z_1^{Y_1} \cdots z_m^{Y_m}$$
$$= \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{N}} z_1^{Y_1} \cdots z_m^{Y_m} \prod_{k=1}^{n} \{\exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} z_2^{-a_{2k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}\}^{x_k}$$

だが,

$R_1^{a_{1k}} \cdots R_m^{a_{mk}} > \exp(c_k)$ (for all k)

のときこの無限級数は積分範囲の上で絶対収束

しかも,

$$\exp(c_k) R_1^{-a_{1k}} \cdots R_m^{-a_{mk}} < \gamma < 1 \text{ (for all } k\text{)}$$

になるような公比γがどれるので,一様収束もいえる.

しかも,

$$\exp(c_k) R_1^{-a_{1k}} \cdots R_m^{-a_{mk}} < \gamma < 1 \text{ (for all } k\text{)}$$

になるような公比γがとれるので,一様収束もいえる.

→ めでたく和と積分が交換できる!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

$$\int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^m} f(\mathbf{b}) z_1^{-b_1+Y_1} \ldots z_m^{-b_m+Y_m} d\mathbf{z}$$
$$= (2\pi\sqrt{-1})^m f(Y_1+1,\ldots,Y_m+1)$$

$$\int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^m} f(\mathbf{b}) z_1^{-b_1+Y_1} \ \ldots \ z_m^{-b_m+Y_m} d\mathbf{z}$$
$$= (2\pi\sqrt{-1})^m f(Y_1 + 1, \ldots, Y_m + 1)$$

ゆえに,

$$f(\mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \frac{z_1^{b_1-1} \ldots z_m^{b_m-1}}{\prod_{k=1}^{n} 1-\exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \ldots z_m^{-a_{mk}}} d\mathbf{z} \qquad \square$$

系 (数え上げ公式)

$A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$を【条件】を満たす行列,$\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$とする.

また,$R_1, \ldots, R_m$を$R_1^{a_{1k}} \cdots R_m^{a_{mk}} > 1$ (for all k)

を満たす正の数とする.

このとき,連立一次方程式$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$の

非負整数解の個数$C(A, \mathbf{b})$は

$$C(A, \mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \frac{z_1^{b_1-1} \ldots z_m^{b_m-1}}{\prod_{j=1}^n (1-z_1^{-a_{1j}} \ldots z_m^{-a_{mj}})} dz_1 \cdots dz_m$$

(証明)

$\mathbf{c} = \mathbf{0}$を考えればよい. $\square$

Future workとして,数値積分を用いて
近似評価を行う事も考えられるので,
実積分の形にも書き直しておく.

系 (数え上げ公式の実積分表示)

先ほどと同じ設定において,

$$C(A, \mathbf{b})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Pi_{j=1}^n \sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}} r^{\sum_{i=1}^m b_i} (\cos\{\sum_{i=1}^m b_i t_i - \sum_{j=1}^n \arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}} \sin(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}})\}) dt_1 \cdots dt_m$$

と書ける.

(証明)

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m}\int_{|z_1|=r}\cdots\int_{|z_m|=r}\frac{z_1^{b_1-1}\cdots z_m^{b_m-1}}{\prod_{j=1}^{n}(1-z_1^{-a_{1j}}\cdots z_m^{-a_{mj}})}dz_1\cdots dz_m$$

に対して

$$z_i = r(\cos t_i + \sqrt{-1}\sin t_i),$$
$$dz_i = r(-\sin t_i + \sqrt{-1}\cos t_i)dt_i = r(\cos(t_i + \tfrac{\pi}{2}) + \sqrt{-1}\sin(t_i + \tfrac{\pi}{2}))dt_i$$

と変数変換して,
あとは職人の手で一項一項丁寧に丹精込めて計算するとよい.

実部と虚部を分けるように変形する.

(被積分関数の分子)

$$= r^{\sum_{i=1}^{m} b_i} \{\cos\{\sum_{i=1}^{m} b_i t_i + \frac{m\pi}{2}\} + \sqrt{-1}\sin\{\sum_{i=1}^{m} b_i t_i + \frac{m\pi}{2}\}\}$$

(被積分関数の分母)

$$= \Pi_{j=1}^{n}\{(1 - r^{-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}t_i)) + \sqrt{-1}r^{-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}t_i)\}$$

$$= \Pi_{j=1}^{n}[\sqrt{\{1 + r^{-2\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}(1 - 2r^{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}t_i))\}}$$

$$\times\{\cos(\arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}t_i))\}}})) + \sqrt{-1}\sin(\arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}t_i))\}}}))\}]$$

したがって，

$$C(A,\mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi)^m}\{\cos(-\frac{m\pi}{2}) + \sqrt{-1}\sin(-\frac{m\pi}{2})\}$$

$$\times \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \frac{dt_1\cdots dt_m}{\Pi_{j=1}^n\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}} r^{\sum_{i=1}^m b_i}(\cos\{\sum_{i=1}^m b_it_i + \frac{m\pi}{2} - \sum_{j=1}^n \arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}})\}$$

$$+\sqrt{-1}\sin\{\sum_{i=1}^m b_it_i + \frac{m\pi}{2} - \sum_{j=1}^n \arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}})\})$$

虚部は積分したらゼロになるので,

$$
\begin{aligned}
&C(A, \mathbf{b}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{1}{\prod_{j=1}^n \sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}} r^{\sum_{i=1}^m b_i} (\cos\{\sum_{i=1}^m b_i t_i - \sum_{j=1}^n \arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}} \sin(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}})\}) dt_1 \cdots dt_m
\end{aligned}
$$

□

例

$x + y = 56$を満たす非負整数の組(x, y)は57個である．

したがって・・・

$$\frac{1}{(2\pi)}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+e^{-2}(1-2e\cos t)}e^{56}(\cos\{56t-2\arcsin(\frac{e^{-1}\sin t}{\sqrt{1+e^{-2}(1-2e\cos t)}}\})dt$$

$$=\frac{1}{(2\pi)}\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^2+(1-2e\cos t)}e^{58}(\cos\{56t-2\arcsin(\frac{\sin t}{\sqrt{e^2+(1-2e\cos t)}}\})dt$$

$$\frac{1}{(2\pi)}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+e^{-2}(1-2e\cos t)}e^{56}(\cos\{56t-2\arcsin(\frac{e^{-1}\sin t}{\sqrt{1+e^{-2}(1-2e\cos t)}}\})dt$$

$$=\frac{1}{(2\pi)}\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{2}+(1-2e\cos t)}e^{58}(\cos\{56t-2\arcsin(\frac{\sin t}{\sqrt{e^{2}+(1-2e\cos t)}}\})dt$$

$$=57$$

$$\frac{1}{(2\pi)}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+e^{-2}(1-2e\cos t)}e^{56}(\cos\{56t-2\arcsin(\frac{e^{-1}\sin t}{\sqrt{1+e^{-2}(1-2e\cos t)}}\})dt$$

$$=\frac{1}{(2\pi)}\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{2}+(1-2e\cos t)}e^{58}(\cos\{56t-2\arcsin(\frac{\sin t}{\sqrt{e^{2}+(1-2e\cos t)}}\})dt$$

$$=57$$

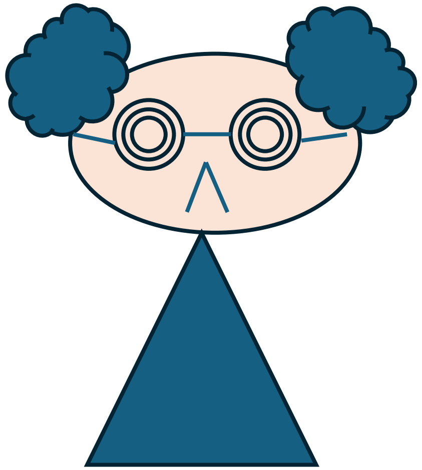
eの部分は積分曲線の半径なので，

1より大きければなんでもいい．

πでも$\log 3$でもいい

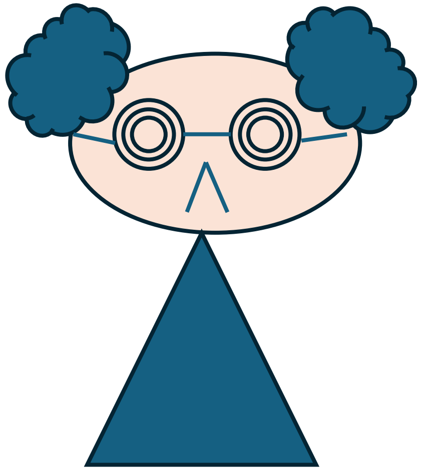
オイラー定数γやディラック定数$\hbar$はだめ

例　　ある日の微積の演習風景・・・



教員

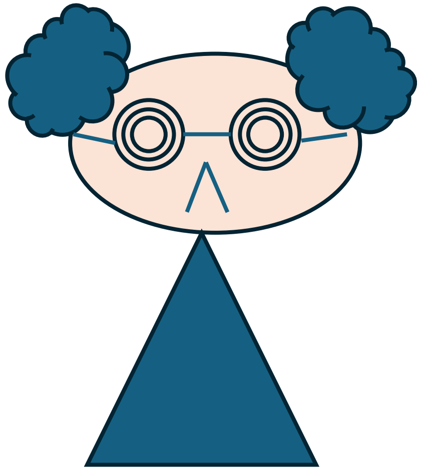
例　ある日の微積の演習風景・・・



$$\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx = \frac{1}{2}$$

$t = 1 + \sqrt{x}$とおいて置換積分

例　　ある日の微積の演習風景・・・



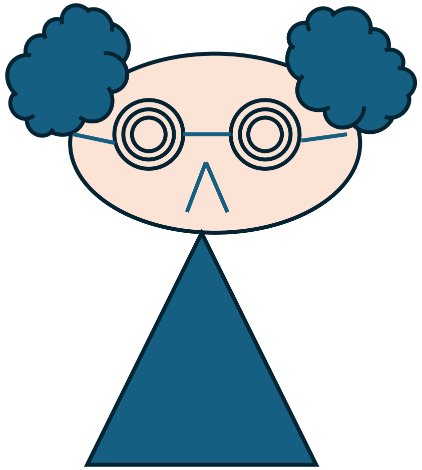
教員

$$\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx = \frac{1}{2}$$

$t = 1 + \sqrt{x}$とおいて置換積分

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$$

例　ある日の微積の演習風景・・・



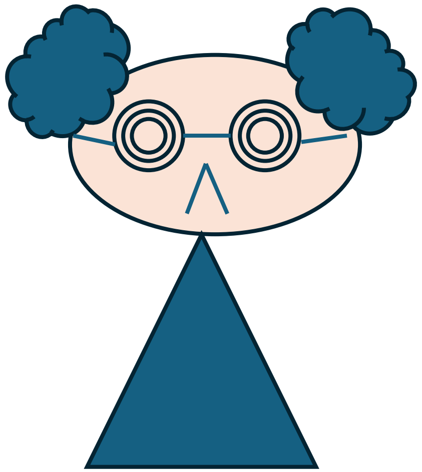
$$\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx = \frac{1}{2}$$

$t=1+\sqrt{x}$とおいて置換積分

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx = 6$$

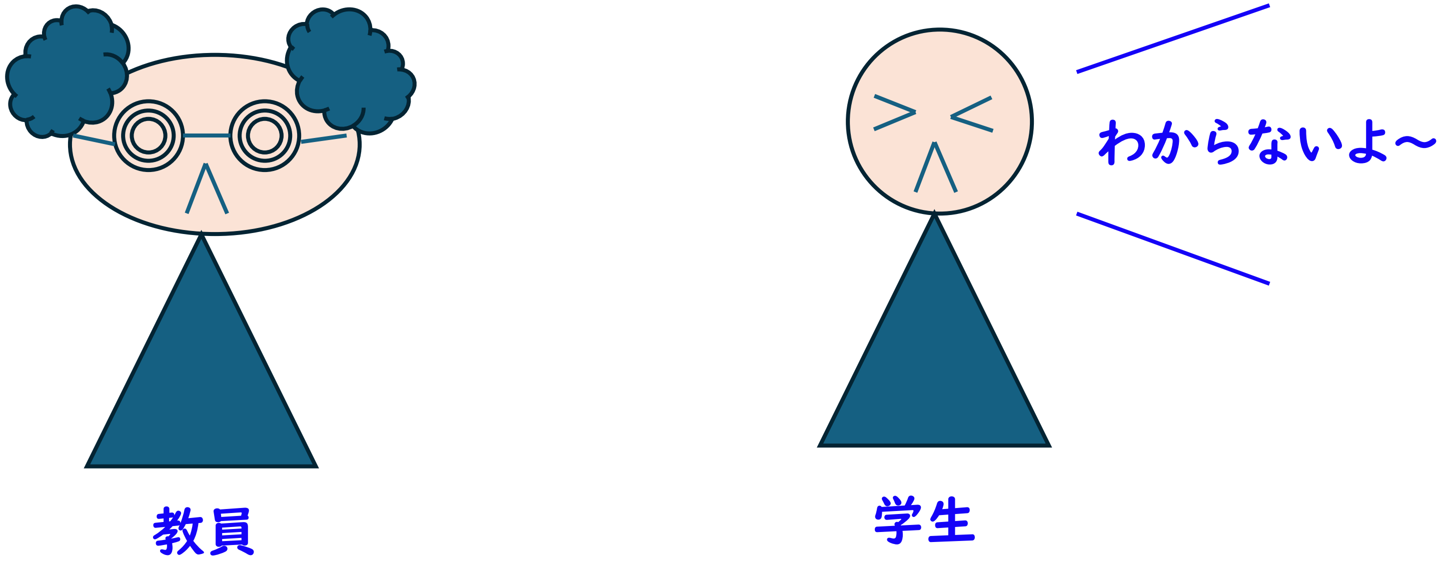
広義積分の例題

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{86}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3 \;-\arcsin\left(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}\right) -\arcsin\left(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}\right) -\arcsin\left(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\right)\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\;\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\;\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\, dt_1\, dt_2\, dt_3$$

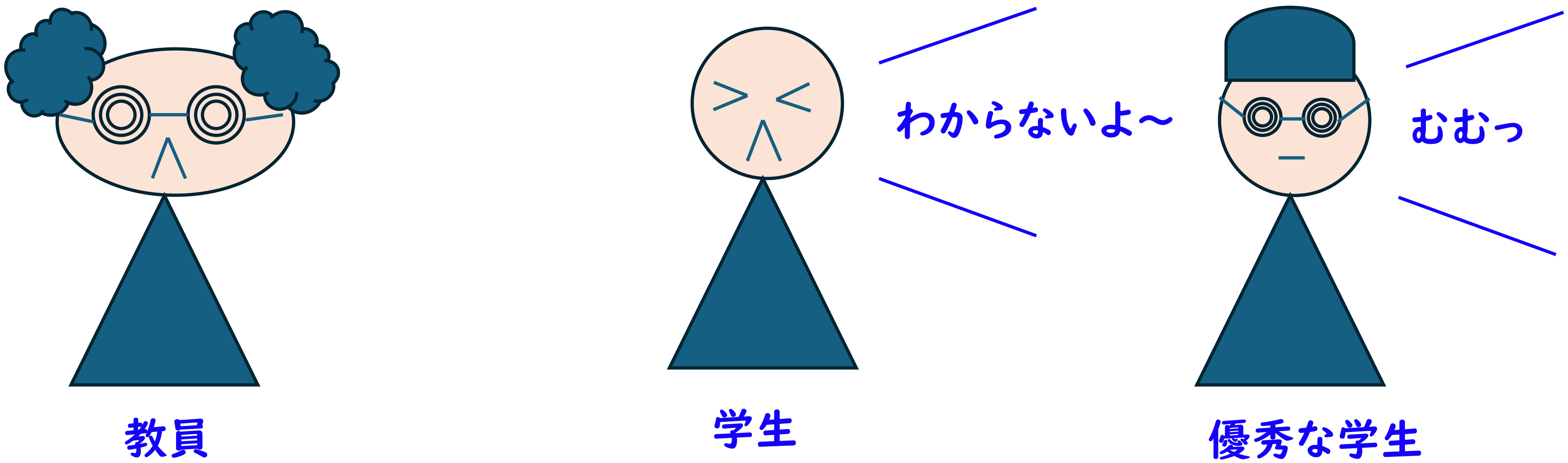


教員

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{86}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3 -\arcsin(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}) -\arcsin(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}) -\arcsin(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}})\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\, dt_1\, dt_2\, dt_3$$

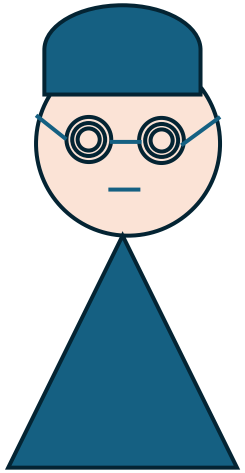


$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{86}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3 -\arcsin(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}) -\arcsin(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}) -\arcsin(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}})\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\,dt_1\,dt_2\,dt_3$$



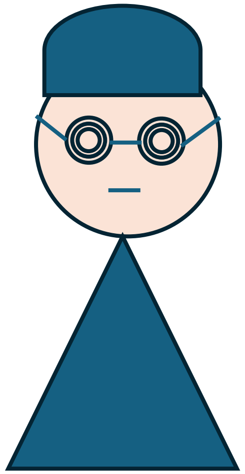
$$\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3\ -\arcsin(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}})\ -\arcsin(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}})\ -\arcsin(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}})\ \}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$

この被積分関数の形は連立一次方程式の非負整数解の数え上げ公式
が絡んでいるに違いない!!!



$$\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3\ -\arcsin\left(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}\right)\ -\arcsin\left(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}\right)\ -\arcsin\left(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\right)\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$

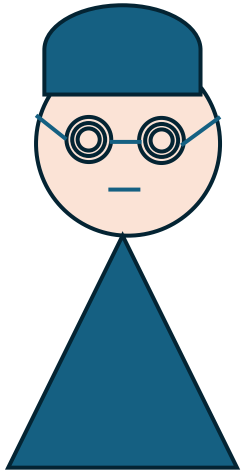
この被積分関数の形は連立一次方程式の非負整数解の数え上げ公式が絡んでいるに違いない!!!



$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$\frac{e^{76}\cos\left\{14t_1+23t_2+39t_3-\arcsin\left(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}\right)-\arcsin\left(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}\right)-\arcsin\left(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\right)\right\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$

この被積分関数の形は連立一次方程式の非負整数解の数え上げが絡んでいるに違いない!!!

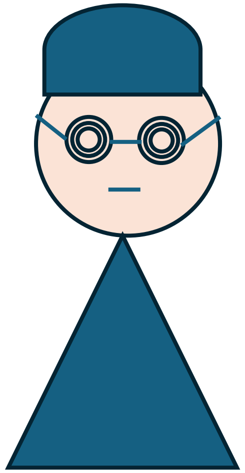


$$6=1+2+3$$

$$11=2+3+6$$

$$\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3-\arcsin\left(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}\right)-\arcsin\left(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}\right)-\arcsin\left(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\right)\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$

この被積分関数の形は連立一次方程式の非負整数解の数え上げが絡んでいるに違いない!!!

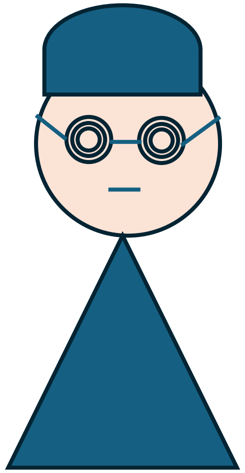


$$6=1+2+3$$

$$11=2+3+6$$

$$16=3+5+8$$

$$\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3-\arcsin\left(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}\right)-\arcsin\left(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}\right)-\arcsin\left(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\right)\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$



この被積分関数の形は連立一次方程式の非負整数解の数え上げが絡んでいるに違いない!!!

$$6=1+2+3$$

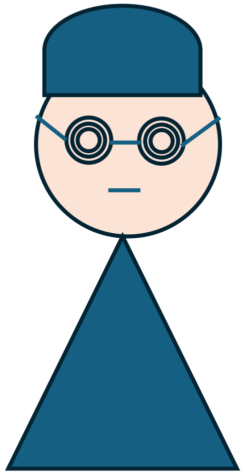
$$11=2+3+6$$

$$16=3+5+8$$

$$76=14+23+39$$

$$\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3-\arcsin\left(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}\right)-\arcsin\left(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}\right)-\arcsin\left(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\right)\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$

この被積分関数の形は連立一次方程式の非負整数解の数え上げが絡んでいるに違いない!!!



$$6 = 1 + 2 + 3$$

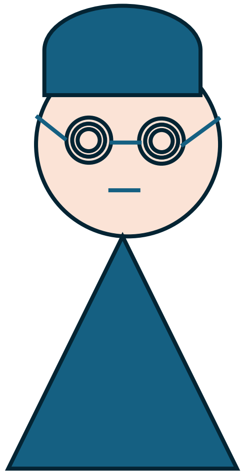
$$11 = 2 + 3 + 6$$

$$16 = 3 + 5 + 8$$

$$76 = 14 + 23 + 39$$

$$e > 1$$

$$\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3\ -\arcsin(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}})\ -\arcsin(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}})\ -\arcsin(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}})\ \}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$

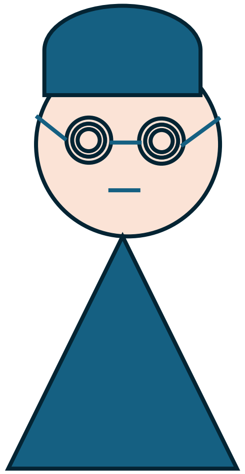


問題の積分は $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\3&6&8\end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix}14\\23\\39\end{pmatrix}$

としたときの $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

非負整数解の個数かも!!!?

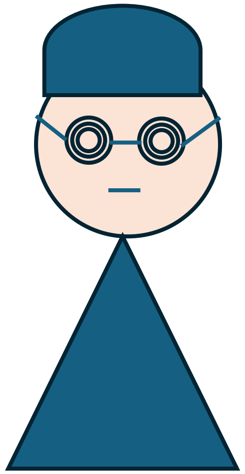
$$\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3-\arcsin(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}})-\arcsin(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}})-\arcsin(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}})\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$



$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\3&6&8\end{pmatrix}$$

は正則なので【条件】を満たしているからたしかにそうだ!!

$$\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3\ -\arcsin(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}})\ -\arcsin(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}})\ -\arcsin(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}})\ \}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$

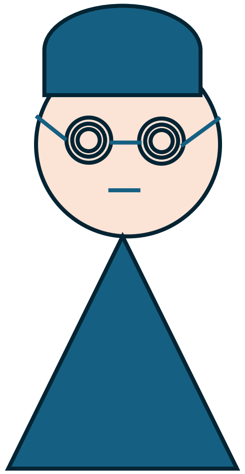


方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 23 \\ 39 \end{pmatrix}$ の解は

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ なので,

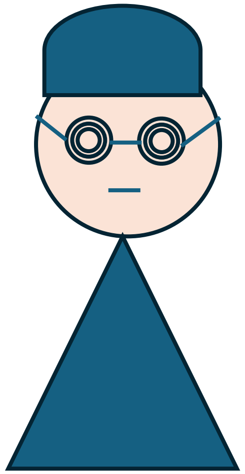
$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3\ -\arcsin(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}})\ -\arcsin(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}})-\arcsin(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}})\ \}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\,dt_1dt_2dt_3$$

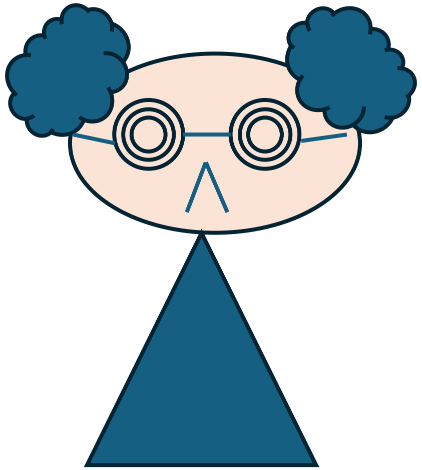
$$=1$$



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3 - \arcsin\left(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}\right) - \arcsin\left(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}\right) - \arcsin\left(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\right)\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\,dt_1\,dt_2\,dt_3$$

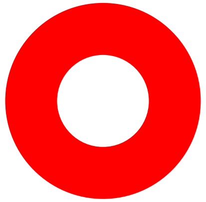
$$= 8\pi^3$$

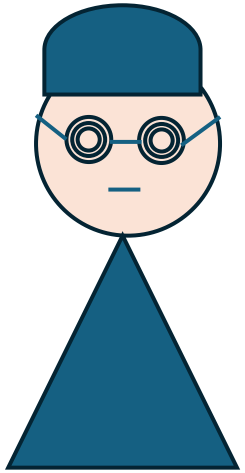


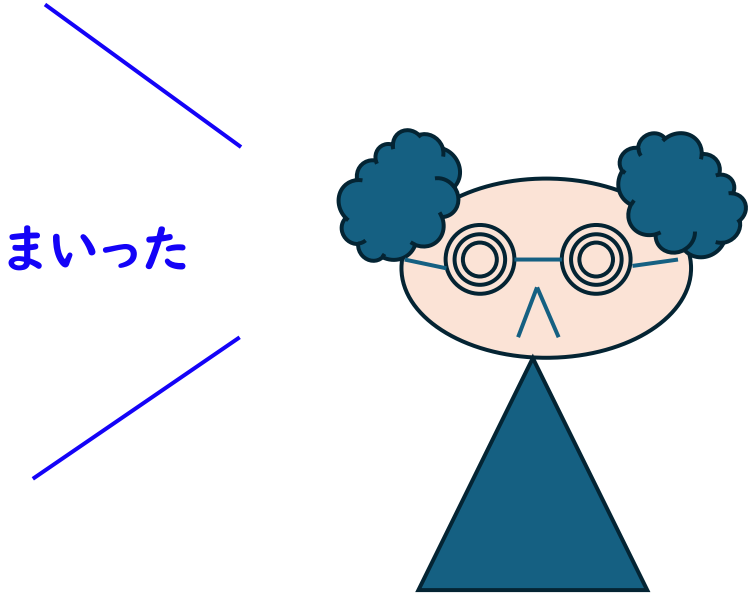


$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3 -\arcsin(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}) -\arcsin(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}) -\arcsin(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}})\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\,dt_1\,dt_2\,dt_3$$

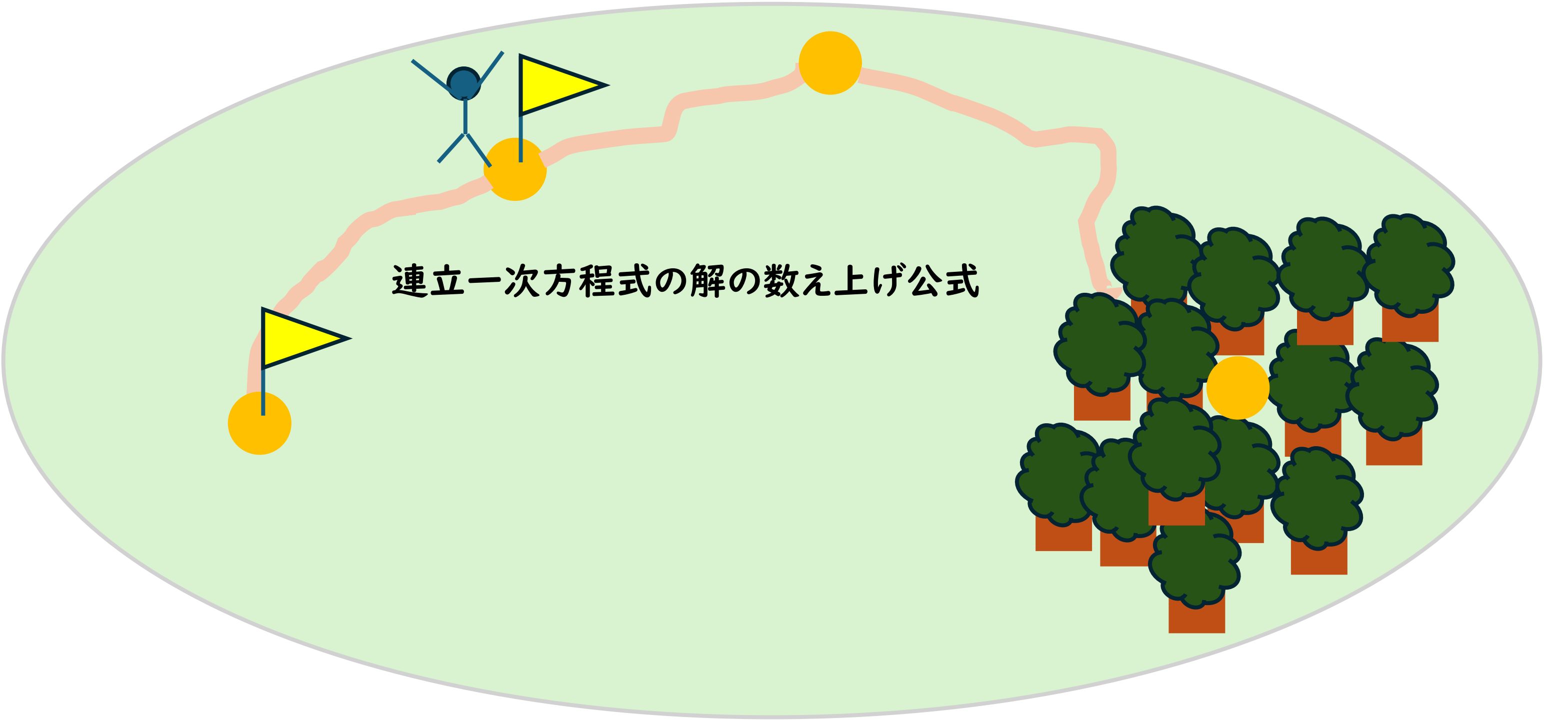
$$= 8\pi^3$$



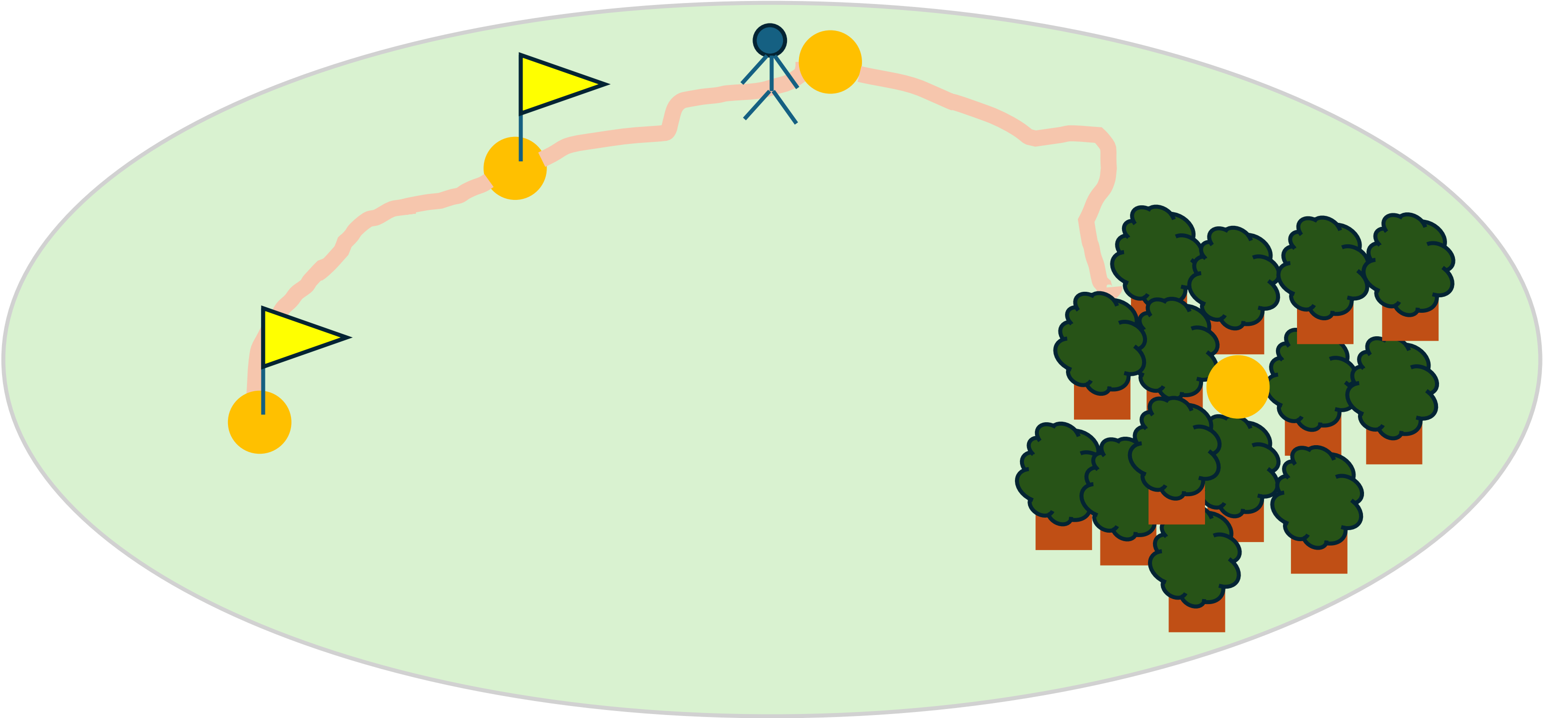




STAGE CLEAR！



連立二次方程式の解の数え上げ



二次の連立ディオファントス方程式

$$\begin{cases} \sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(1)} x_k = c^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i,j} a_{ij}^{(m)} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(m)} x_k = c^{(m)} \end{cases} \quad \cdots (☆)$$

$(a_{ij}^{(l)}, b_k^{(l)}, c^{(l)} \in \mathbb{Z})$

を考える.

この(☆)に対応して

非負整数値パラメータ$k_1, \ldots, k_n$をfixした連立一次方程式

$$\begin{cases} \sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(1)} x_k = c^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i,j} a_{ij}^{(m)} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(m)} x_k = c^{(m)} \\ x_1 = k_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n = k_n \end{cases}$$

を考えて無理やり一次方程式の話に帰着させる.

係数行列が【条件】を満たすように
もう少し補正を加えたい.

$$a'^{(l)}_{ij} = a^{(l)}_{ij} + \alpha^{(l)}_{ij} > 0,\ b'^{(l)}_{k} = b^{(l)}_{k} + \beta^{(l)}_{k} > 0$$

になるように$\alpha^{(l)}_{ij}, \beta^{(l)}_{k} > 0$をとっておいて,

$$\begin{cases} \sum_{i,j} a'^{(1)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b'^{(1)}_{k} x_k = c^{(1)} + u^{(1)} \\ . \\ . \\ \sum_{i,j} a'^{(m)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b'^{(m)}_{k} x_k = c^{(m)} + u^{(m)} \\ x_1 = k_1 \\ . \\ . \\ x_n = k_n \\ \sum_{i,j} \alpha^{(1)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta^{(1)}_{k} x_k = u^{(1)} \\ . \\ . \\ \sum_{i,j} \alpha^{(m)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta^{(m)}_{k} x_k = u^{(m)} \end{cases} \quad \cdots(\mathrm{O})$$

を考えるとよさそう

(〇)の係数行列を考える

$$
\begin{cases}
\sum_{i,j} a_{ij}'^{(1)} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k'^{(1)} x_k = c^{(1)} + u^{(1)} \\
. \\
. \\
\sum_{i,j} a_{ij}'^{(m)} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k'^{(m)} x_k = c^{(m)} + u^{(m)} \\
x_1 = k_1 \\
. \\
. \\
x_n = k_n \\
\sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(1)} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(1)} x_k = u^{(1)} \\
. \\
. \\
\sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(m)} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(m)} x_k = u^{(m)}
\end{cases}
$$

(〇)の係数行列を考える

$$\begin{cases} \sum_{i,j} \underline{a'^{(1)}_{ij} k_i} x_j + \sum_{k=1}^{n} \underline{b'^{(1)}_k} x_k = c^{(1)} + u^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i,j} a'^{(m)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b'^{(m)}_k x_k = c^{(m)} + u^{(m)} \\ x_1 = k_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n = k_n \\ \sum_{i,j} \alpha^{(1)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta^{(1)}_k x_k = u^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i,j} \alpha^{(m)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta^{(m)}_k x_k = u^{(m)} \end{cases}$$

$$g_{lj} = \sum_{i=1}^{n} a'^{(l)}_{ij} k_i + b'^{(l)}_j$$

(〇)の係数行列を考える

$$
\begin{cases}
\sum_{i,j} \underline{a_{ij}'^{(1)}} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \underline{b_k'^{(1)}} x_k = c^{(1)} + u^{(1)} \\
. \\
. \\
\sum_{i,j} a_{ij}'^{(m)} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k'^{(m)} x_k = c^{(m)} + u^{(m)} \\
x_1 = k_1 \\
. \\
. \\
x_n = k_n \\
\sum_{i,j} \underline{\alpha_{ij}^{(1)}} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \underline{\beta_k^{(1)}} x_k = u^{(1)} \\
. \\
. \\
\sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(m)} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(m)} x_k = u^{(m)}
\end{cases}
$$

$$g_{lj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}'^{(l)} k_i + b_j'^{(l)}$$

$$h_{lj} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^{(l)} k_i + \beta_j^{(l)}$$

(〇)の係数行列を考える

$$
\begin{cases}
\sum_{i,j} \underline{a'^{(1)}_{ij}} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \underline{b'^{(1)}_{k}} x_k = \underline{c^{(1)} + u^{(1)}} \\
\cdot \\
\cdot \\
\sum_{i,j} a'^{(m)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b'^{(m)}_{k} x_k = c^{(m)} + u^{(m)} \\
x_1 = \underline{k_1} \\
\cdot \\
\cdot \\
x_n = k_n \\
\sum_{i,j} \underline{\alpha^{(1)}_{ij}} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \underline{\beta^{(1)}_{k}} x_k = \underline{u^{(1)}} \\
\cdot \\
\cdot \\
\sum_{i,j} \alpha^{(m)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta^{(m)}_{k} x_k = u^{(m)}
\end{cases}
$$

$$g_{lj} = \sum_{i=1}^{n} a'^{(l)}_{ij} k_i + b'^{(l)}_{j}$$

$$h_{lj} = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{(l)}_{ij} k_i + \beta^{(l)}_{j}$$

$$\delta = (c^{(1)} + u^{(1)}, \dots, c^{(m)} + u^{(m)}, k_1, \dots, k_n, u^{(1)}, \dots, u^{(m)})^{\top}$$

係数行列は

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \Lambda(k_1, \ldots, k_n) \\
&= \begin{pmatrix}
g_{11} & \cdots & g_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
g_{m1} & \cdots & g_{mn} \\
1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 \\
h_{11} & \cdots & h_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
h_{m1} & \cdots & h_{mn}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

方程式(〇)は

$$\Lambda\mathbf{x} = \delta$$

となり,$2m + n$行n列の係数行列Λは【条件】を満たす.

これに数え上げ公式を適用すると以下が得られる.

定理

rを1より大きい実数とし,

$$C_r(k_1, \ldots, k_n, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{2m+n}} \int_{|z_1|=r} \cdots \int_{|z_m|=r} \frac{z_1^{c^{(1)}+u^{(1)}-1} \cdots z_m^{c^{(1)}+u^{(1)}-1} z_{m+1}^{k_1-1} \cdots z_{m+n}^{k_n-1} z_{m+n+1}^{u^{(1)}-1} \cdots z_{2m+n}^{u^{(m)}-1}}{\prod_{j=1}^{n}(1-z_1^{-g_{1j}} \cdots z_m^{-g_{mj}} z_{m+j}^{-1} z_{m+n+1}^{-h_{1j}} \cdots z_{2m+n}^{-h_{mj}})} dz_1 \cdots dz_{2m+n}$$

とする.

このとき, もともと考えていた2次連立方程式(☆)が非負整数解$(x_1, \ldots, x_n)^\top$をもつ.

$$\Leftrightarrow \exists k_1, \ldots, k_n, u^{(1)}, \cdots, u^{(m)} \in \mathbb{N} \ \ C_r(k_1, \ldots, k_n, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}) \geq 1$$

$X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$
を非負整数値をとる独立同分布な確率変数とし,その確率関数を
$P(X = x) = p(x)$ $(\forall x \in \mathbb{N}\ p(x) > 0)$とする.

非負整数値をとる確率分布としては例えばポアソン分布などがある.
ポアソン分布の場合,$p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$である.

$X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$

を非負整数値をとる独立同分布な確率変数とし,その確率関数を

$P(X = x) = p(x)\ (\forall x \in \mathbb{N}\ \ p(x) > 0)$とする.

非負整数値をとる確率分布としては例えばポアソン分布などがある.

ポアソン分布の場合,$p(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$である.

$r > 1$を固定し,確率変数C'を$C' = \dfrac{C_r(X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m)}{p(X_1)\cdots p(X_n)p(Y_1)\cdots p(Y_m)}$

で定めると以下が成り立つ.

定理

・「連立方程式(☆)の非負整数解の個数」$= \mathbb{E}[C']$
(解が無数にある場合は期待値は∞になる.)
・「連立方程式(☆)が非負整数解をもつ」$\Leftrightarrow \mathbb{V}[C'] = \infty$
(ただし期待値が∞になる場合は分散は∞とする.)

定理

・「連立方程式(☆)の非負整数解の個数」$= \mathbb{E}[C']$
(解が無数にある場合は期待値は∞になる.)
・「連立方程式(☆)が非負整数解をもつ」$\Leftrightarrow \mathbb{V}[C'] = \infty$
(ただし期待値が∞になる場合は分散は∞とする.)

確率変数C'は**解の個数の不偏推定量になっている**

(証明)

前半は

$$\mathbb{E}[C'] = \sum_{k_1,\ldots,k_n,u^{(1)},\ldots,u^{(m)}\in\mathbb{N}} \frac{C_r(X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m)}{p(X_1)\cdots p(X_n)p(Y_1)\cdots p(Y_m)} p(X_1)\cdots p(X_n)p(Y_1)\cdots p(Y_m)$$
$$= \sum_{k_1,\ldots,k_n,u^{(1)},\ldots,u^{(m)}\in\mathbb{N}} C_r(X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m)$$

から得られる.

(証明)

後半についても,

解がない場合はC'は0しか値を取らないので,

$\mathbb{E}[C']$が0でない自然数μをとる場合のみを考えればよい.

しかし,$C_r(k_1, \ldots, k_n, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)})$が0になる$(k_1, \ldots, k_n, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)})$

が無数にあるので,分散の計算中で$\dfrac{\mu^2}{p(X_1)\cdots p(X_n)p(Y_1)\cdots p(Y_m)}$が無限個足される

から主張が得られる. $\square$

積分曲線の半径もX_i, Y_jと同じ分布で独立な確率変数からサンプリングすることを考える.

$$C''(R, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m) = \frac{C_{R+2}(X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m)}{p(R)p(X_1)\cdots p(X_n)p(Y_1)\cdots p(Y_m)}$$

で定めると期待値が有限かどうかで解の有無が判定できる.

系

「連立方程式(☆)が非負整数解をもつ」$\Leftrightarrow \mathbb{E}[C''] = \infty$

(解をもたない場合の期待値は0である)

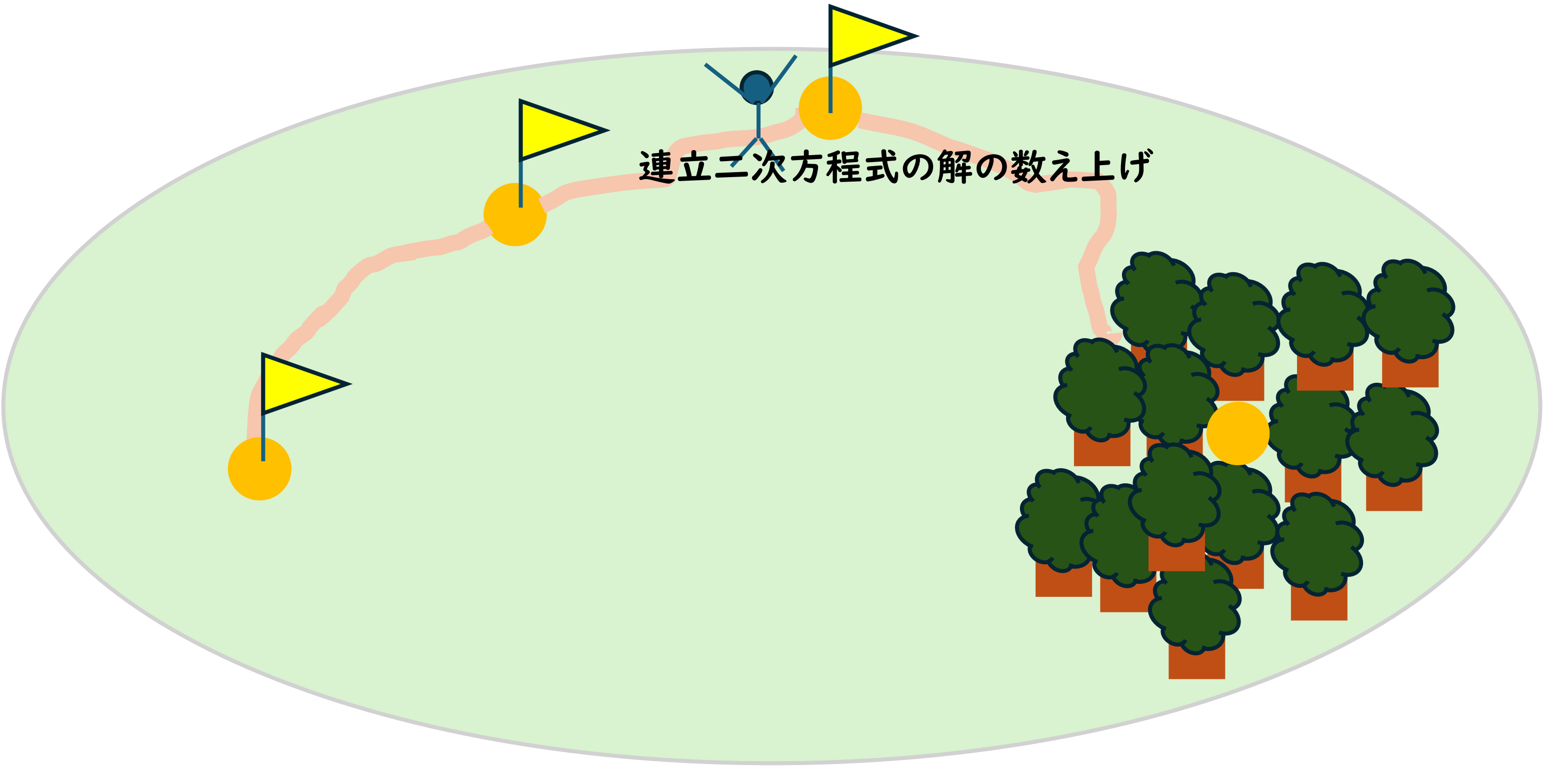
(証明)

$C_{R+2}(k_1, \ldots, k_n, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)})$

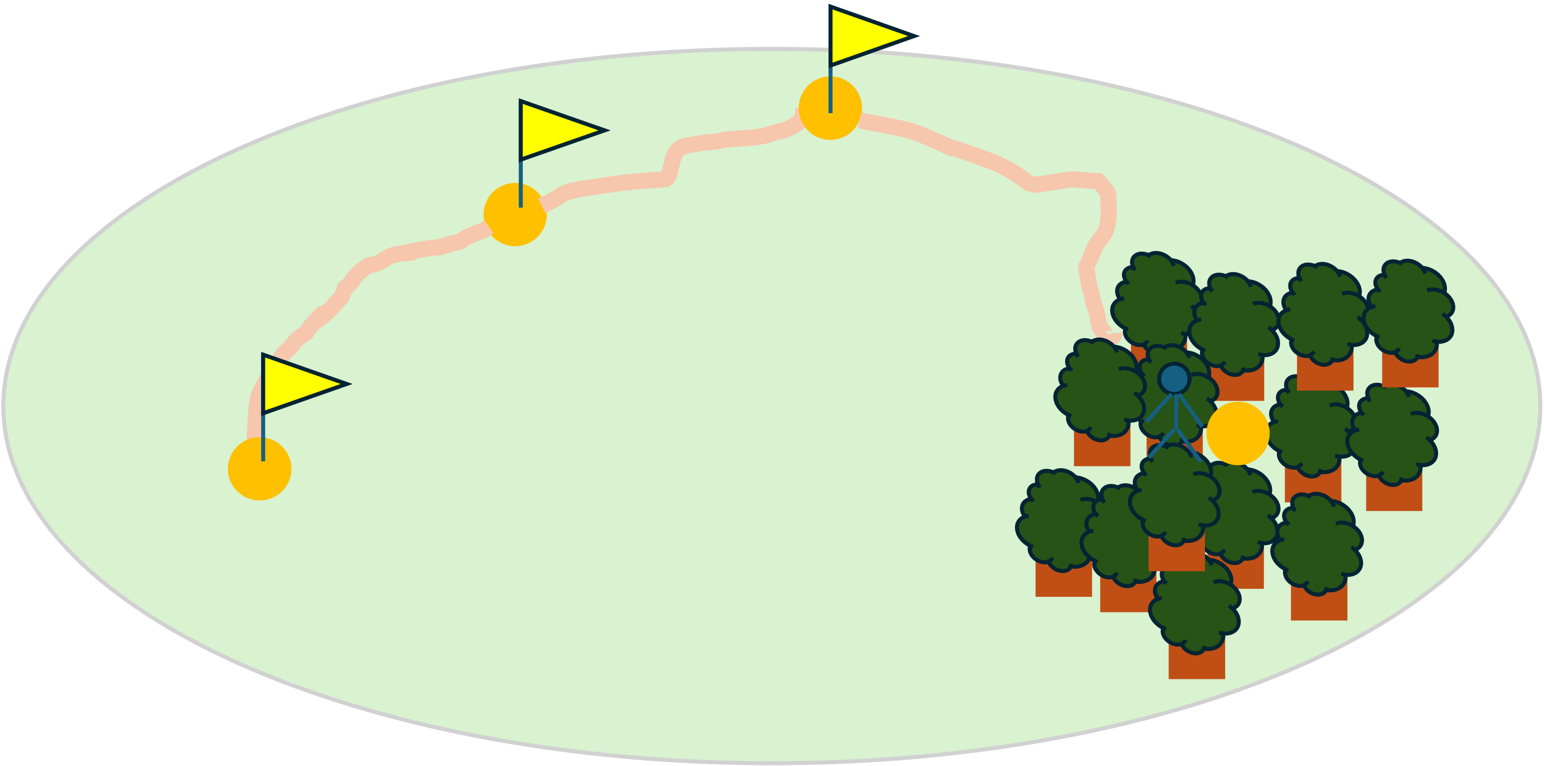
が1になる$(k_1, \ldots, k_n, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)})$が

ひとつでもあれば,C_{R+2}が1になる半径は無数にとれるから. □

STAGE CLEAR !



Future workに向けた取り組み

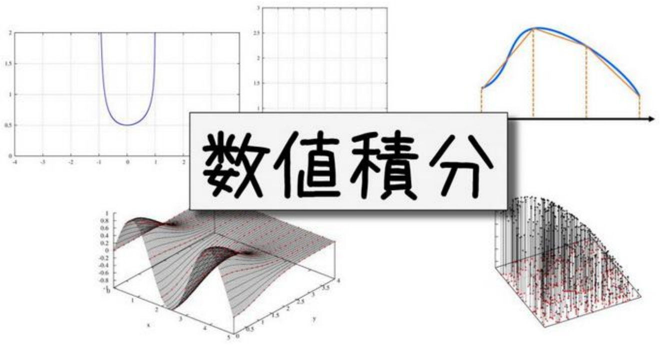


ここまでで示した数え上げの公式は$0 \sim 2\pi$
という有界矩形領域の高次元積分で
で作られた確率変数の期待値で
評価するものであった.

ここまでで示した数え上げの公式は$0 \sim 2\pi$
という有界矩形領域の高次元積分で
で作られた確率変数の期待値で
評価するものであった.

→ なんかいい数値積分の評価不等式が知りたい

わたしは解析も数値計算も素人なので，
「数値積分の種類」というタイトルのこちら
https://slpr.sakura.ne.jp/qp/numerical-integration/
のブログを調べてみた



プログラミングと数値計算

数値積分の種類

2018年1月28日 SIKINO 2件のコメント

ある関数の数値積分を考えます。
解析的に積分を行う事をまず考えましょう。1回の関数の評価で、全桁一致するからです。

https://slpr.sakura.ne.jp/qp/numerical-integration/
(ref. 2024/3/29)

多次元（6,7次元以上）の積分を行いたい場合

この場合はモンテカルロ積分が良いです。

https://slpr.sakura.ne.jp/qp/numerical-integration/
(ref. 2024/3/29)

→ 高次元の積分はモンテカルロ積分がいいらしい

多次元（6,7次元以上）の積分を行いたい場合

この場合はモンテカルロ積分が良いです。

https://slpr.sakura.ne.jp/qp/numerical-integration/
(ref. 2024/3/29)

→ 高次元の積分はモンテカルロ積分がいいらしい

今回の数え上げ公式は高次元になりやすいので
ひとまずモンテカルロ積分について調べてみる.

fは$[a, b]^m$で連続として，

$[a, b]^m$での積分$\int_a^b \cdots \int_a^b f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \cdots dx_m$

を考える．

fは$[a, b]^m$で連続として，
$[a, b]^m$での積分$\int_a^b \cdots \int_a^b f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \cdots dx_m$
を考える．

$[a, b]$間に値をとる連続一様分布の確率密度関数は

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \cdots \int_a^b f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \cdots dx_m \\
&= \int_a^b \cdots \int_a^b \frac{f(x_1, \ldots, x_m) dx_1}{p(x_1) \cdots p(x_m)} p(x_1) \cdots p(x_m) dx_1 \cdots dx_m \\
&= (b-a)^m \int_a^b \cdots \int_a^b f(x_1, \ldots, x_m) p(x_1) \cdots p(x_m) dx_1 \cdots dx_m \\
&= (b-a)^m \ \mathbb{E}[f(X_1, \ldots, X_m)]
\end{aligned}
$$

分散についても，

$$\int_a^b \cdots \int_a^b \{f(x_1, \ldots, x_m) - \mathbb{E}[f(X_1, \ldots, X_m)]\}^2 p(x_1) \cdots p(x_m) dx_1 \cdots dx_m$$

は閉矩形領域で連続な関数の積分なので有限の値で存在

分散についても，

$$\int_a^b \cdots \int_a^b \{f(x_1, \ldots, x_m) - \mathbb{E}[f(X_1, \ldots, X_m)]\}^2 p(x_1) \cdots p(x_m) dx_1 \cdots dx_m$$

は閉矩形領域で連続な関数の積分なので有限の値で存在

→ 標本平均 $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(X_1^{(k)}, \ldots, X_m^{(k)})$
で近似できる!!!!(大数の法則)

分散についても,

$$\int_a^b \cdots \int_a^b \{f(x_1, \ldots, x_m) - \mathbb{E}[f(X_1, \ldots, X_m)]\}^2 p(x_1) \cdots p(x_m) dx_1 \cdots dx_m$$

は閉矩形領域で連続な関数の積分なので有限の値で存在

→ 標本平均 $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(X_1^{(k)}, \ldots, X_m^{(k)})$

で近似できる!!!!(大数の法則)

平均,分散がともに有限の値である場合における
大数の法則の証明を見てみよう.

補題(チェビチェフの不等式)

Xを平均μ分散σ^2で確率密度関数が$p(x)$

である連続分布に従う確率変数とするとき,

$$\mathrm{P}(|X - \mu| \geq \kappa\sigma) \leq \frac{1}{\kappa^2}$$

証明

$I = \{x : |x - \mu| \geq \kappa\sigma\}$とおくと，

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx \\
&\geq \int_I (x - \mu)^2 p(x) dx \\
&\geq (\kappa\sigma)^2 \int_I p(x) dx \\
&= (\kappa\sigma)^2 \mathrm{P}(|X - \mu| \geq \kappa\sigma)
\end{aligned}
$$

あとは両辺を$(\kappa\sigma)^2$で割ればよい． □

定理(大数の弱法則)

平均μ分散σ^2で確率密度関数が$p(x)$

である連続分布に従う独立同じ分布な確率変数

$X_1, \ldots, X_N$の標本平均$\bar{X_N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k$

を考える.

このとき.任意の$\epsilon > 0$に対して

$$\mathrm{P}(|\bar{X_N} - \mu| < \epsilon) \to 1 \; (N \to \infty)$$

証明

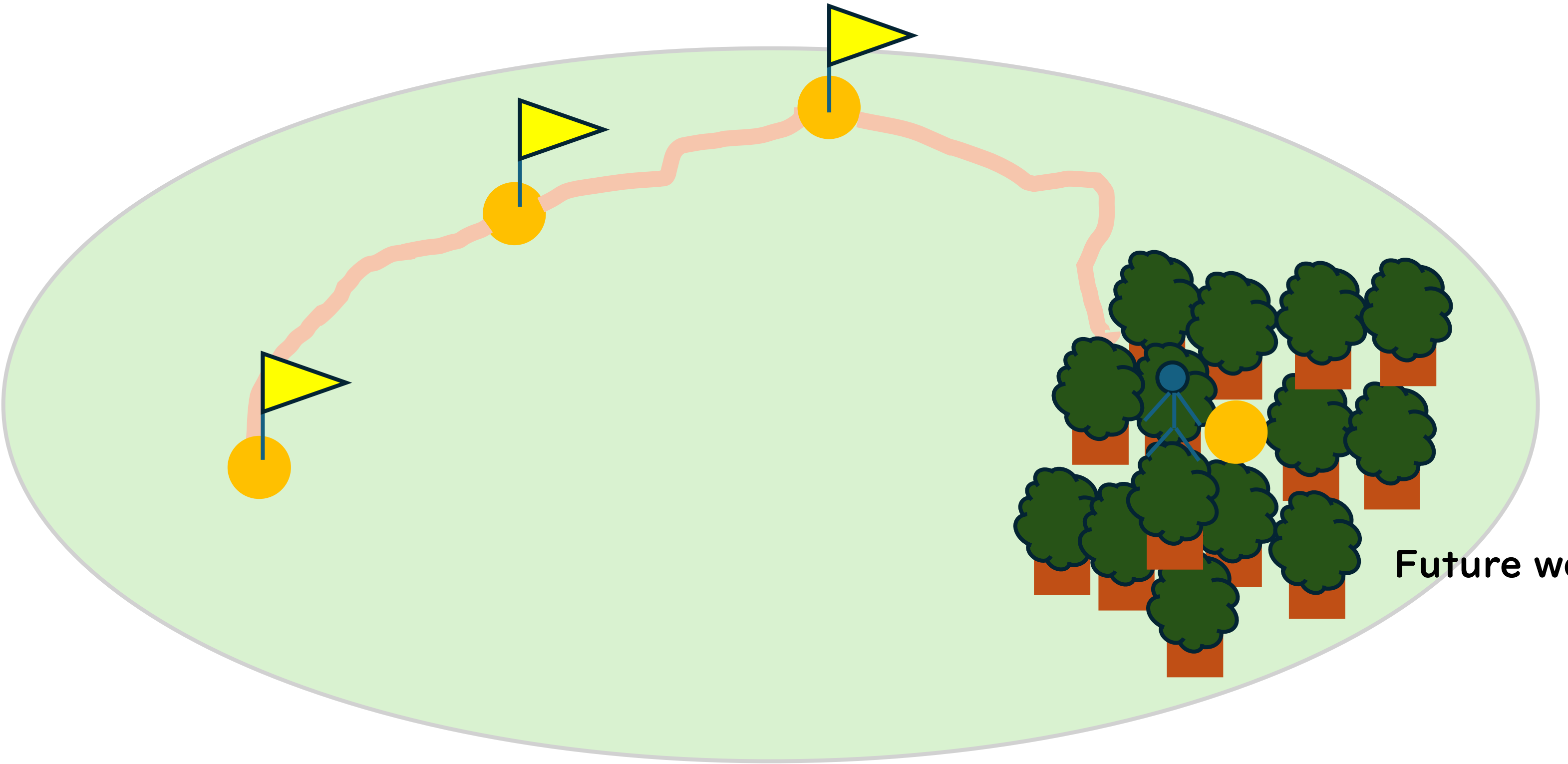
$\bar{X_N}$は平均μ分散$\frac{\sigma^2}{N}$なので，
$\bar{X_N}$にチェビチェフの不等式を適用すると．

$\mathrm{P}(|\bar{X_N} - \mu| \geq \kappa\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}) \leq \frac{1}{\kappa^2}$

なので，ϵに対して，$\kappa = \frac{\sqrt{N}}{\sigma}\epsilon$とおくと，

$\mathrm{P}(|\bar{X_N} - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{N\epsilon^2} \to 0\ (N \to \infty) \qquad \square$

STAGE CLEAR ?



Future workに向けた取り組み

まとめ

今回できたこと

今回できたこと

・先行研究の結果として,連立一次方程式の非負整数解の個数を積分を使って数え上げる公式を紹介した

今回できたこと

・先行研究の結果として,連立一次方程式の非負整数解の個数を積分を使って数え上げる公式を紹介した

・その結果を利用し,連立二次方程式について,非負整数解の個数を評価する確率変数を導出した

今回できなかったこと

今回できなかったこと

- Future workに向けてモンテカルロ積分について調べたが,具体的にサンプルサイズをいくつ以上にすれば誤差を抑えられるのかの細かい評価には至っていない

今回できなかったこと

- Future workに向けてモンテカルロ積分について調べたが,**具体的にサンプルサイズ**をいくつ以上にすれば誤差を抑えられるのかの細かい評価には至っていない

- ほかにも調べたい**関数近似公式や数値積分公式**があった

ほかにも調べたい**関数近似公式や数値積分公式**があった

- $C_r(k_1, \ldots, k_n, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)})$ に出てくる被積分関数をWeierstrassの多項式近似定理で近似して項別積分する

- **表面積分を行いたい場合**

  表面積分

  $$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\theta, \varphi) \sin\theta \approx 4\pi \sum_i w_i f(\theta_i, \varphi_i)$$

  を行う場合、Lebedev求積法かGaussian-quadrature(ガウス-ルジャンドル求積法と台形則の組み合わせ)が良いです。
  lebedev求積法は、球面調和関数の直交性を利用した求積法で、$f(\theta, \varphi)$が最大$l = 131$までの球面調和関数で展開されるのであれば、厳密な値を返すという積分法です。

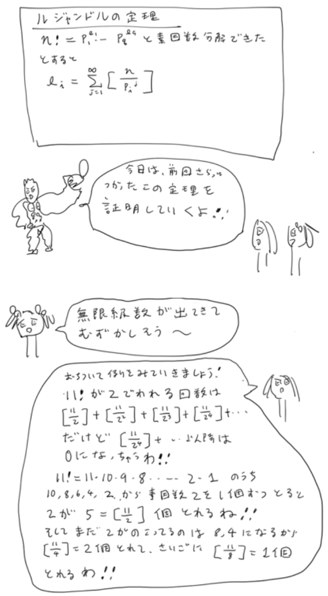
Lebedev求積法も面白そう.

今回できなかったこと

- Future workに向けてモンテカルロ積分について調べたが,具体的にサンプルサイズをいくつ以上にすれば誤差を抑えられるのかの細かい評価には至っていない
- ほかにも調べたい関数近似公式や数値積分公式があった
- Hilbertの第10問題との関係も調べたい.

宣伝

・漫画を連載しています



→ジャンプルーキー

https://rookie.shonenjump.com/users/11844546810164711117

・pixivにも同じ漫画を投稿しています．
X(@N_Y_Big_Apple)プロフからアクセスできます．


講演の準備期間は短いってわかってたのに・・・
どうしてもっと前もってちゃんと準備しようと思わなかったんだろう・・・

END

参考文献

[Lasserre2001] Lasserre, Zeron, 2001 “On counting integral points in a convex rational polytope”, Mathematics of Operations Research Vol. 28, No. 4 (Nov., 2003), pp. 853-870
[東大1991] 東京大学教養学部統計学教室 (編集), 1991 “統計学入門 (基礎統計学Ⅰ) ”, 東京大学出版会
[小寺 1982]小寺 平治, 1982 “明解演習 線形代数 ”, 共立出版
[小寺 1984]小寺 平治, 1984 “明解演習 微分積分 ”, 共立出版
[SIKINO 2018] SIKINO, 2018“数値積分の種類”, https://slpr.sakura.ne.jp/qp/numerical-integration/
[山田 2020]山田 鐘人 (原著), アベ ツカサ (イラスト), 2020 “葬送のフリーレン”,小学館サービス