

アフィンスキームの幾何から見る可換環論

立腹層

2024年3月

「アフィンスキーム」とは、(単位的)可換環に付随して生じる、あるいは更に言えば可換環と「等価」な幾何学的対象(非常に大雑把に言うと、ある種の位相空間)のことであり、代数幾何学や数論幾何学で重要な「スキーム」の材料となるものでもある。スキームの理論ではやや高度な可換環論も用いられるため、先に可換環論をある程度勉強してから、そのあとでアフィンスキームを初めて学ぶ人も多いようである(知らないけどたぶん)。

しかし、アフィンスキームは可換環と「等価」でありながらも、可換環の定義を見ただけではわからない隠された構造を見事に暴き出している概念であるため、「(アフィン)スキーム論を基礎として可換環論を理解する」という(従来の「主従関係」とは反対の)立場も十分に可能であり、妥当である。そこで本講演では、(アフィン)スキームに関する知識は一切仮定せずに、その幾何学の入門的概説を与え、その上、その観点から可換環論の理解を整理できることを、実際の例によって観察したい。講演時間の都合上、どこまで話せるかわからないが、現時点で念頭にある例は、中国剰余定理、Artin 環構造定理、Noether 局所環の次元論、Cohen-Macaulay 環の定義、等である。

前提知識としては、準同型定理、剰余環や局所化、それらによるイデアルの対応定理、極大イデアル、素イデアル、局所環、Noether 環、等の入門的な可換環論の理解を仮定する。また、「開集合」「閉集合」といった単語の意味が分かる程度の、ごく初歩的な位相空間の知識も仮定する。しかし、以上のような知識が十分でない方にも、「可換環論を幾何学的に理解する」とはどういうことなのか、なるべくその考え方の雰囲気が伝わるように心がけて話すつもりである。