2つの封筒問題の整備と発展

ちひろ (@chihiro314)

確率に関するパラドックスは、誕生日のパラドックス，サンクトペテルブルクのパラドックス，モンティ・ホール問題などたくさん知られている。ここで紹介する2つの封筒問題は期待値に関するパラドックスであり、完全には解決していないとされてしまっている問題である。

2つの封筒問題

お金の入った2つの封筒があり、片方にはもう片方の2倍の金額が入っているが、どちらにいくら入っているかはわからない。無作為に封筒を1つ選んで中を確認すると1万円が入っていたとき、どちらの封筒を受け取ることが得であるか？

無作為に選んで確認した封筒が低額，高額である確率はどちらも $\frac{1}{2}$ なので、もう片方の封筒の金額の期待値は12500円となり、交換するほうが得であるという考察が得られる。

しかし、この問題の考察は次のように続く。確認した封筒の金額が偶数であれば、交換すると金額の期待値が同様に $\frac{5}{4}$ 倍になるので得である。確認した封筒の金額が奇数であれば、その封筒は必ず低額なので交換する方が得である。確認した金額に依らずもう片方の封筒が得であるということになり、対称的だったはずの2つの封筒に差が生まれてしまうのである。

このパラドックスは、封筒の金額を決める確率分布が設定されていないことを解決の糸口にされることが多く、都合のいい確率分布の設定で矛盾を回避されて終わってしまう。しかし、この問題の根幹はそこではなく、次のように整備することで再び提起できるのである。

整備された2つの封筒問題

コインを裏が出るまで投げ続けて、それまでに表が出た回数を n とする。2つの封筒にそれぞれ 3^n 円と 3^{n+1} 円が入れられるが、n の値やどちらにいくら入っているかはわからない。無作為に封筒を1つ選んで中を確認したとき、どちらの封筒を受け取ることが得であるか？

最後に、2つの封筒問題の発展として、期待値による損得勘定が不可能なゲームを紹介する。

得かつ損なゲーム

はじめにコインを裏が出るまで投げ続けて、それまでに表が出た回数を n とする。最後にもう1度コインを投げて、表が出たら $5^n + 1$ 円獲得し，裏が出たら 5^n 円支払う。このゲームに参加することは得であるか損であるか？

このゲームは次のような相反する考察を持つパラドックスである。まず、表がはじめに n 回出た場合を考えると賞金の期待値が常に $\frac{1}{2}$ 円なので、このゲームは得であるといえる。一方で、表が全部で0回出た場合は1円の支払いなので損であり、表が全部で $m(>0)$ 回出た場合は賞金の期待値が $-5^{m-1} + \frac{2}{3}$ 円なので、このゲームは損であるともいえるのである。