モノイダル圏における代数としての八元数

第四回すうがく徒のつどい
yohhey

2023 年 9 月 17 日

八元数の具体的構成

モノイダル圏における代数

八元数の緩やかな結合性・可換性について

八元数の擬行列表現

概要その 1

- 実数，複素数の概念を更に拡張した四元数は，1843 年に Hamilton により発見された．四元数は積に関して非可換である．
- 四元数のさらなる拡張である八元数は，1843 年に Graves により発見された．八元数は積に関して非可換なだけでなく，非結合的でもある．

概要その 2

- 非結合的な代数は理論的に取り扱いにくいものであるが，1998 年に Albuquerque と Majid により八元数はあるブレイドモノイダル圏 (braided monoidal category)（$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ で次数づけられたベクトル空間の圏を $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ の 3-cocycle でひねったもの）の中ではある意味可換でかつ結合律を満たす代数 (量子可換な代数) であると解釈することができることが示された．
- これにより，通常の結合的な代数と同じような代数的手法を八元数にも用いることができる．（例えば八元数上の加群のなす圏を定義できたり，八元数の「擬行列」表現を考えることができる.）

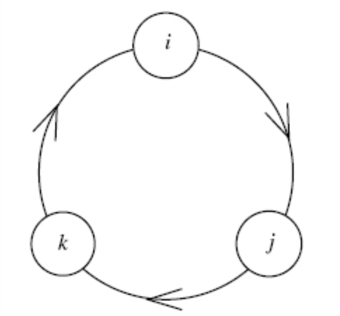
概要その 3

- 本日の講演の構成は大きく 2 つのパートに分かれる．
- 前半部分は Cayley-Dickson process という手法を用いて実数→複素数→四元数→八元数→十六元数→・・・を機械的に構成していく．
- この内容は知られたよく知られた結果である．
- 後半部分は，（ブレイド）モノイダル圏とその代数を定義し，その例として群 G とその abelian 3-cocycle $(\phi, \mathcal{R})$ を用いて，G で次数づけられたベクトル空間のなすブレイドモノイダル圏 $\mathbf{Vect}_{\phi,\mathcal{R}}^{G}$ を定義する．特に G として $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ とし，適切な $(\phi, \mathcal{R})$ を用意すると八元数は $\mathbf{Vect}_{\phi,\mathcal{R}}^{G}$ における量子可換な代数となることを確認する．

八元数の具体的構成

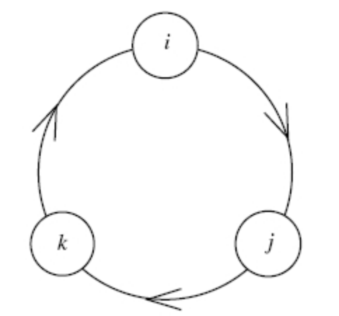
四元数

- 2 乗すると -1 になる数 i, j, k が関係式 $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, ik = -j, kj = -i$ を満たすとする．このとき実数 a, b, c, d を用いて $a + bi + cj + dk$ の形で表される数を四元数といい，四元数全体の集合を $\mathbb{H}$ で表す．
- 四元数の積は交換可能でない．例えば $ij = k, ji = -k$ より $ij \neq ji$ である．



四元数の具体的な計算

- 以下の計算を実行してみよう．
- $(1+i-j+2k)(2-i+j+k) = 2-i+j+k+2i-i^2+ij+ik-2j+ji-j^2-jk+4k-2ki+2kj+2k^2 = (2+1+1-2)+(-1+2-1-2)i+(1-1-2-2)j+(1+1-1+4)k = 2-2i-4j+5k$



定義 2.1 (non-associative k-algbera)

k を体，A をベクトル空間とし，$\mu_A\colon A\otimes A\to A, \eta_A\colon k\to A$ を k-線型写像とする．(A,μ_A,η_A) が以下の可換図式を満たすとき，非結合的 k-代数 (non-associative k-algebra)という．

$$\begin{tikzcd}
k\otimes A \arrow[r, "\eta_A\otimes id_A"] \arrow[dr, "l_A"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu_A"] & A\otimes k \arrow[l, "id_A\otimes\eta_A"'] \arrow[dl, "r_A"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

- 非結合的 k-代数は結合律を満たすとは限らない k-代数という意味である．(結合律を満たしてもよい)
- $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ は全て非結合的 $\mathbb{R}$-代数である．また後に出てくる八元数 $\mathbb{O}$ も非結合的 $\mathbb{R}$-代数である．

定義 2.2 (非結合的 k-代数の準同型)

A, B を非結合的 k-代数とし，$f\colon A \to B$ を k-線型写像とする．f が以下の条件を満たすとき，f は非結合的 k-代数の準同型であるという．

- 任意の A の元 a, b に対して，$f(ab) = f(a)f(b)$
- $f(1_A) = 1_B$

また f が，上記の 2 番目の条件の代わりに次の条件を満たすとき，f は非結合的 k-代数の反準同型であるという．

- 任意の A の元 a, b に対して，$f(ab) = f(b)f(a)$

involution k-algebra

定義 2.3 (involution k-algebra)

A を非結合的 k-代数とし，$\sigma\colon A \to A$ を非結合的 k-代数の反準同型とする．組 (A, σ) が任意の A の元 a に対して，$\sigma^2(a) = a$ を満たすとき，(A, σ) は involution k-algebra であるという．

例 2.4

$A = \mathbb{R}$，$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(a) = a$ とするとき，$(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ は involution $\mathbb{R}$-algebra である．

例 2.5

$A = \mathbb{C}$，$\sigma(a + bi) = a - bi$ とするとき，$(\mathbb{C}, \sigma)$ は involution $\mathbb{R}$-algebra である．

命題 2.6

(A, σ) を *involution k-algebra* とする．$A' = A \times A$ とし A' の積を $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - d\sigma(b), \sigma(a)d + cb)$，$A'$ の単位元を $(1_A, 0_A)$ とする．また $\sigma' \colon A' \to A'$ を $\sigma'((a, b)) = (\sigma(a), -b)$ で定める．このとき，(A', σ') は *involution k-algebra* である．

- 上記の命題を証明するには A' が非結合的 k-代数であること，$\sigma'^2((a, b)) = (a, b)$，$\sigma'((1_A, 0_A)) = (1_A, 0_A)$，$\sigma'((a, b) \cdot (c, d)) = \sigma'((c, d)) \cdot \sigma'((a, b))$ を示せばよい．（確かめてみよう）
- involution k-algebra (A, σ) から，新たに involution k-algebra (A', σ') を作り出す操作を Cayley-Dickson process という．

Cayley-Dickson process による複素数の構成

- $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ は involution $\mathbb{R}$-algebra より，Cayley-Dickson process により新しい involution $\mathbb{R}$-algebra を構成できる．
- こうしてできた involution $\mathbb{R}$-algebra に対して，さらに Cayley-Dickson process を適用することで，involution $\mathbb{R}$-algebra の無限列を得ることができる．
- $(1, 0)$ を 1，$(0, 1)$ を i と読み替え，$\sigma(a + bi) = a - bi$ とすると，$(\mathbb{C}, \sigma)$ が得られる．（確かめてみよう）

Cayley-Dickson process による四元数の構成

- 次に $(\mathbb{C}, \sigma)$ に対して Cayley-Dickson process を適用すると何ができるか？
- $(1,0)=1, (i,0)=i, (0,1)=j, (0,-i)=k$ とおいて，i, j, k の積を計算してみよう．
- $(a,0)\cdot(b,0)=(ab,0), (a,0)\cdot(0,b)=(0,\sigma(a)b)$, $(0,a)\cdot(b,0)=(0,ba), (0,a)\cdot(0,b)=(-b\sigma(a),0)$ をうまく使う．
- $j\cdot k=(0,1)\cdot(0,-i)=(-(-i)\sigma(1),0)=(i,0)=i$ などのように計算する．
- こうして構成される $(\mathbb{C}', \sigma')$ は，$\sigma'(a+bi+cj+dk)=a-bi-cj-dk$ で $\mathbb{C}'=\mathbb{H}$ である．（確かめてみよう）

Cayley-Dickson process による八元数の構成

- 四元数 $\mathbb{H}$ に対して，Cayley-Dickson process を適用すると $\mathbb{H}', \sigma''$ が得られる．
- $\mathbb{H}'$ を $\mathbb{O}$ と書き，<u>八元数</u>という．
- $\boldsymbol{e}_0 = (1,0), \boldsymbol{e}_1 = (i,0), \boldsymbol{e}_5 = (j,0), \boldsymbol{e}_6 = (k,0), \boldsymbol{e}_4 = (0,1), \boldsymbol{e}_2 = (0,i), \boldsymbol{e}_7 = (0,j), \boldsymbol{e}_3 = (0,k)$ として，これらの積の演算表を作ってみよう．
- $(a,0)\cdot(b,0) = (ab,0), (a,0)\cdot(0,b) = (0,\sigma'(a)b)$, $(0,a)\cdot(b,0) = (0,ba), (0,a)\cdot(0,b) = (-b\sigma'(a),0)$, $\sigma'(a+bi+cj+dk) = a-bi-cj-dk$ をうまく使う．
- $\boldsymbol{e}_6\cdot\boldsymbol{e}_7 = (k,0)\cdot(0,j) = (0,\sigma'(k)j) = (0,-kj) = (0,i) = \boldsymbol{e}_2$ などのように計算する．

八元数の演算表から読み取れること

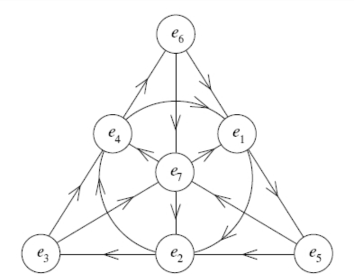
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

- $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4 \cdot \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$ のように $ab \neq ba$ となる元がある．（積の非可換性）
- $(\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_4) \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_7, \boldsymbol{e}_2 \cdot (\boldsymbol{e}_4 \cdot \boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_2 \cdot (-\boldsymbol{e}_6) = -\boldsymbol{e}_7$ のように $(ab)c \neq a(bc)$ となる元がある．（積の非結合性）

八元数の演算表の早見表

ファノ平面と呼ばれるグラフを用いると積の演算が見やすい．

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_4$	$\boldsymbol{e}_5$	$\boldsymbol{e}_6$	$\boldsymbol{e}_7$
$\boldsymbol{e}_1$	-1	$\boldsymbol{e}_4$	$\boldsymbol{e}_7$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_6$	$-\boldsymbol{e}_5$	$-\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_4$	-1	$\boldsymbol{e}_5$	$\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_7$	$-\boldsymbol{e}_6$
$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_7$	$-\boldsymbol{e}_5$	-1	$\boldsymbol{e}_6$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_4$	$\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_4$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_6$	-1	$\boldsymbol{e}_7$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_5$
$\boldsymbol{e}_5$	$-\boldsymbol{e}_6$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_7$	-1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_4$
$\boldsymbol{e}_6$	$\boldsymbol{e}_5$	$-\boldsymbol{e}_7$	$\boldsymbol{e}_4$	$-\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1$	-1	$\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_7$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_6$	$-\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_5$	$-\boldsymbol{e}_4$	$-\boldsymbol{e}_2$	-1



モノイダル圏における代数

定義 3.1 (自然変換)

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とし，$F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．$X \in \mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{D}$ の射 $\alpha_X\colon F(X) \to G(X)$ が定まっているとする．(これを $\alpha\colon F \to G$ と書く) 任意の $\mathcal{C}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対して以下の図式が可換となるとき，α は自然変換 (natural transformation)であるという.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ {\scriptstyle \alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ G(X) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(Y) \end{array}$$

また，任意の X に対して，α_X が同型射となるとき，α は自然同型 (natural isomorphism)であるという

定義 3.2 (モノイダル圏)

$\mathcal{C}$ を圏，$\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ を関手，$a\colon (-\otimes -)\otimes - \to - \otimes(-\otimes -)$ を自然同型とする．また，I を $\mathcal{C}$ の対象，$l\colon I\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, r\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\otimes I\to\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ を自然同型とする．$(\mathcal{C},\otimes,a,I,l,r)$ が以下の 2 条件を満たすとき，<u>モノイダル圏 (monoidal category)</u>であるという．また a を<u>結合子 (associator)</u>，l,r をそれぞれ<u>左単位子 (left unit)</u>，<u>右単位子 (right unit)</u>，I を<u>単位対象 (unit object)</u>という．

(pentagon axiom)

任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y, Z, W に対して以下の図式が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y, Z, W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X, Y \otimes Z, W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \otimes a_{Y,Z,W}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

(triangle axiom)

任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y に対して以下の図式が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,I,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes \mathrm{id}_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{id}_X \otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

$\otimes$ の関手性が意味すること

注意 3.3

$\mathcal{C}$ の射 $f_1\colon X_1 \to Y_1, f_2\colon X_2 \to Y_2, g_1\colon Y_1 \to Z_1, g_2\colon Y_2 \to Z_2$（$(f_1, f_2), (g_1, g_2)$ は $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の射とみなせる）を任意にとる．$\otimes$ は $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の射 (f_1, f_2) に対して，$\mathcal{C}$ の射 $f_1 \otimes f_2\colon X_1 \otimes X_2 \to Y_1 \otimes Y_2$ を対応させる関手で，$\mathrm{id}_{X \otimes X} = \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_X$ および，$(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)$ を満たす．

$$\begin{tikzcd} X_1 \otimes X_2 \arrow[r, "f_1 \otimes f_2"] \arrow[rr, bend right, "(g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)"'] & Y_1 \otimes Y_2 \arrow[r, "g_1 \otimes g_2"] & Z_1 \otimes Z_2 \end{tikzcd}$$

a の自然変換性が意味すること

注意 3.4

$(- \otimes -) \otimes -, - \otimes (- \otimes -)$ は $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への関手で，$a\colon (- \otimes -) \otimes - \to - \otimes (- \otimes -)$ はその間の自然同型である．$\mathcal{C}$ の任意の射の組 $f_1\colon X_1 \to Y_1, f_2\colon X_2 \to Y_2, f_3\colon X_3 \to Y_3$（これは $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の射とみなせる）に対して，a は以下の図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3 \arrow[r, "(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3"] \arrow[d, "a_{X_1,X_2,X_3}"'] & (Y_1 \otimes Y_2) \otimes Y_3 \arrow[d, "a_{Y_1,Y_2,Y_3}"] \\
X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3) \arrow[r, "f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3)"'] & Y_1 \otimes (Y_2 \otimes Y_3)
\end{tikzcd}$$

l, r の自然変換性が意味すること

注意 3.5

$I \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \otimes I, \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への関手で，
$l\colon I \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}, r\colon\ \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \otimes I \to \mathcal{C}$ はその間の自然同型である．$\mathcal{C}$ の任意の射 $f\colon X \to Y$ に対して，l, r はそれぞれ左と右の図式を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes X \arrow[r, "\mathrm{id}_I \otimes f"] \arrow[d, "l_X"'] & I \otimes Y \arrow[d, "l_Y"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \otimes I \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}_I"] \arrow[d, "r_X"'] & Y \otimes I \arrow[d, "r_Y"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

例 3.6

Set を集合と写像のなす圏とする．このとき以下のようにして，**Set** にモノイダル圏の構造が入る．

- $\times\colon \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を集合の直積をとる関手とする．
- 集合 X, Y, Z に対して，
  $a_{X,Y,Z}\colon (X \times Y) \times Z \ni ((x, y), z) \mapsto (x, (y, z)) \in X \times (Y \times Z)$
  として結合子を定める．
- $I = \{*\}$（一点集合）とし，集合 X に対して，
  $r_X\colon X \times I \ni (x, *) \mapsto x \in X, l_X\colon I \times X \ni (*, x) \mapsto x \in X$ として左単位子，右単位子を定める．

例 3.7

k-ベクトル空間の圏を $\mathbf{Vect}_k$ と書くことにする．このとき，以下のようにして，$\mathbf{Vect}_k$ にモノイダル圏の構造が入る．

- $\otimes_k \colon \mathbf{Vect}_k \times \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Vect}_k$ を k 上のテンソル積をとる関手とする．
- ベクトル空間 X, Y, Z に対して，
  $a_{X,Y,Z} \colon (X \otimes_k Y) \otimes_k Z \ni (x \otimes_k y) \otimes_k z \mapsto x \otimes_k (y \otimes_k z) \in X \otimes_k (Y \otimes_k Z)$ として結合子を定める．
- $I = k$ とし，ベクトル空間 X に対して，
  $r_X \colon X \otimes_k k \ni x \otimes_k \alpha \mapsto \alpha x \in X, l_X \colon k \otimes_k X \ni \alpha \otimes_k x \mapsto \alpha x \in X$ として左単位子，右単位子を定める．

定義 3.8 (モノイダル圏における代数)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏とする．$\mathcal{C}$ の対象 A と，射 $\mu_A \colon A \otimes A \to A, \eta_A \colon I \to A$ により以下の図式が可換となるとき，(A, μ_A, η_A) は $\mathcal{C}$ の代数 (algebra)であるという．

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[rr, "a_{A,A,A}"] \arrow[d, "\mu_A \otimes \mathrm{id}_A"'] & & A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \mu_A"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu_A"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "\mu_A"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes A \arrow[r, "\eta_A \otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "l_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"'] & A \otimes I \arrow[l, "\mathrm{id}_A \otimes \eta_A"'] \arrow[dl, "r_A"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Set における代数

例 3.9

Set における代数は，よく知られた対象である．

- Set の対象 A で，$\mu_A\colon A \times A \to A, \eta_A\colon \{*\} \to A$ という写像を持つものを考える．$\eta_A(*) = 1_A$ と表記することにする．また，$\mu_A((a,b)) = a \bullet b$ と表記することにする．
- (A, μ_A, η_A) が Set における代数となるには，任意の $a, b, c \in A$ に対して，$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c), 1_A \bullet a = a \bullet 1_A = a$ が成り立てばよい．
- これらの条件より，A が Set における代数であるとは，A がモノイドであることと等しい．

例 3.10

$\mathbf{Vect}_k$ における代数も，よく知られた対象である．

- $\mathbf{Vect}_k$ の対象 A で，$\mu_A \colon A \otimes A \to A, \eta_A \colon k \to A$ という k-線型写像を持つものを考える．$\eta_A(1_k) = 1_A$ と表記することにする．また，$\mu_A(a \otimes b) = ab$ と表記することにする．
- (A, μ_A, η_A) が $\mathbf{Vect}_k$ における代数となるには，任意の $a, b, c \in A$ に対して，$(ab)c = a(bc), 1_A a = a 1_A = a$ が成り立てばよい．
- これらの条件より，A が $\mathbf{Vect}_k$ における代数であるとは，A が k-代数であることと等しい．

定義 3.11 (G-graded vector space)

G を群とし，その単位元を e とする．G の元で添え字づけられた k-ベクトル空間 V_g の直和 $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ を対象とし，$V = \bigoplus_{g\in G} V_g, W = \bigoplus_{g\in G} W_g$ に対して，k 線型写像 $f\colon V \to W$ で $f(V_g) \subset W_g$ を満たすものを射とすると圏をなす．この圏を G-graded vector space のなす圏といい，$\mathbf{Vect}^G$ と書く．また $v \in V$ が $v \in V_g$ であるとき，$|v| = g$ と表記する．

注意 3.12

$\mathbf{Vect}^G$ において，$V \otimes W = \bigoplus_{\sigma\tau=g} V_\sigma \otimes W_\tau$ とし，射のテンソル積は $\mathbf{Vect}_k$ ものと同じとする．また k を $k_e = k, k_g = 0 \quad (g \neq e)$ として *G-graded vector space* とみなし，これを単位対象とする．また a, l, r は $\mathbf{Vect}_k$ と同じものを取ると，$\mathbf{Vect}^G$ はモノイダル圏の構造を持つ．

定義 3.13 (G 加群)

G を群，M をアーベル群とし，
$\mu_M : G \times M \ni (g, m) \mapsto g \cdot m \in M$ とする．任意の G の元 g, h と，任意の M の元 m, n に対して以下が成立するとき，(M, μ_M) は G 加群であるという．

$$(gh) \cdot m = g \cdot (h \cdot m), \quad 1_G \cdot m = m, \quad g \cdot (m + n) = g \cdot m + g \cdot n$$

定義 3.14 (群のコホモロジー)

G を群，M を G 加群とする．0 以上の整数 n に対して，
$C^n(G,M)$ を G^n から M への写像全体とし，（$G^0 = \{*\}$ とする）
$\psi \in C^n(G,M), (g_1, \cdots g_{n+1}) \in G^{n+1}$ に対して，
$d^n \colon C^n(G,M) \to C^{n+1}(G,M)$ を以下の式で定めると，
$(C^n(G,M), d^n)$ はコチェイン複体となる．このコチェイン複体から定まるコホモロジーをM に係数を持つ群 G のコホモロジー群という．

$$d^n(\psi)(g_1, \cdots, g_n) = g_1 \cdot \psi(g_2, \cdots, g_{n+1}) +$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \psi(g_1, \cdots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1}) +$$
$$(-1)^{n+1}\psi(g_1, \cdots, g_n)$$

定義 3.15 (群の 3-cocycle)

G を群，e を G の単位元とし，$\phi\colon G\times G\times G\to k^\times$ とする．任意の G の元 x,y,z,w に対して以下の式が成立するとき，ϕ は G の 3-cocycle という．

$$\phi(y,z,w)\phi(x,yz,w)\phi(x,y,z)=\phi(x,y,zw)\phi(xy,z,w)$$

また，群 G の 3-cocycle ϕ が，任意の $x,y\in G$ に対して $\phi(x,e,y)=1$ が成立するとき，ϕ は G の normalized 3-cocycle であるという．

(定義より容易に $\phi(e,x,y)=\phi(x,y,e)=1$ が導かれる．)

例 3.16

$G=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ とし，G の元 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ に対して，$\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(-1)^{|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}|}$ は G の normalized 3-cocycle である．

定義 3.17 ($\mathbf{Vect}_\phi^G$)

G を群，e を G の単位元とし，$\phi\colon G \times G \times G \to k^\times$ を G の normalized 3-cocycle とする．対象，射，テンソル積，単位対象，左単位子，右単位子は，$\mathbf{Vect}^G$ のモノイダル圏構造と同じで，結合子を以下の式で与えるとモノイダル圏となる．このモノイダル圏を $\mathbf{Vect}_\phi^G$ と表記する．

$$a_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \ni (x \otimes y) \otimes z \mapsto \phi(|x|, |y|, |z|) x \otimes (y \otimes z) \in X \otimes (Y \otimes Z)$$

定義 3.18 (ブレイドモノイダル圏)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$\tau\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ を第一成分と第二成分を入れ替える関手，$c\colon - \otimes - \to (- \otimes -) \circ \tau$ を自然同型とする．$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r, c)$ が
ブレイドモノイダル圏 (braided monoidal category)であるとは，$\mathcal{C}$ の任意の対象 X, Y, Z, W に対して，以下の図式が可換になることをいう．また c を braiding という．

(hexagon axiom)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "c_{X,Y\otimes Z}"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[dr, "a_{Y,Z,X}"] & \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "c_{X,Y}\otimes 1_Z"'] & & & Y \otimes (Z \otimes X) \\
& (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a_{Y,X,Z}"'] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[ur, "1_Y \otimes c_{X,Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "c_{X\otimes Y,Z}"] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[dr, "a^{-1}_{Z,X,Y}"] & \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ur, "a^{-1}_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,Z}"'] & & & (Z \otimes X) \otimes Y \\
& X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Z,Y}"'] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[ur, "c_{X,Z}\otimes \mathrm{id}_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

例 3.19

$\mathcal{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Vect}_k$ において，$\tau\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ を第一成分と第二成分を入れ替える関手とする．このとき，τ を braiding とすると，$\mathcal{C}$ はブレイドモノイダル圏となる．(特に対称モノイダル圏と呼ばれる構造を持っている．)

上記の例はある意味で自明な braiding を持つブレイドモノイダル圏構造といえる．$\mathbf{Vect}_\phi^G$ に非自明な braiding を用いてブレイドモノイダル圏の構造を入れたい．

定義 3.20 (abelian 3-cocycle)

G をアーベル群，ϕ を G 上の normalized 3-cocycle とし，$\mathcal{R}\colon G \times G \to k^{\times}$ とする．任意の G の元 x, y, z について以下の式が成立するとき，$(\phi, \mathcal{R})$ は abelian 3-cocycle であるという．

$$\mathcal{R}(xy, z)\phi(x, z, y) = \phi(x, y, z)\mathcal{R}(x, z)\phi(z, x, y)\mathcal{R}(y, z)$$

$$\phi(x, y, z)\mathcal{R}(x, yz)\phi(y, z, x) = \mathcal{R}(x, y)\phi(y, x, z)\mathcal{R}(x, z)$$

実は abelian 3-cocycle によりブレイドモノイダル圏を構成することができる．

abelian 3-cocycle とブレイドモノイダル圏

命題 3.21

G をアーベル群，$(\phi, \mathcal{R})$ を G 上の *abelian 3-cocycle* とする．$\mathbf{Vect}_{\phi}^{G}$ に以下のように c を定めると，$\mathbf{Vect}_{\phi}^{G}$ は c を *braiding* としてブレイドモノイダル圏となる．このブレイドモノイダル圏を $\mathbf{Vect}_{\phi,\mathcal{R}}^{G}$ と表記する．（X, Y は $\mathbf{Vect}_{\phi}^{G}$ の対象）

$$c_{X,Y} \colon X \otimes Y \ni x \otimes y \mapsto \mathcal{R}(|x|, |y|) y \otimes x \in Y \otimes X$$

実は normalized 2-cochain があれば，abelian 3-cocycle を作ることができるため，normalized 2-cochain からブレイドモノイダル圏を構成することができる．

定義 3.22 (normalized 2-cochain)

G を単位元を e とする群，$F\colon G\times G\to k^\times$ とする．F が任意の G の元 x,y に対して $F(e,x)=F(y,e)=1$ を満たすとき，F は G 上のnormalized 2-cochainであるという．

命題 3.23

G を群，F を G 上の *normalized 2-cochain* とする．G の元 x,y,z に対して，以下のように $\phi_{F^{-1}}$ を定めると，*normalized 3-cocycle* となる．特に G がアーベル群のとき，以下のように $\mathcal{R}_{F^{-1}}$ を定めると，$(\phi_{F^{-1}},\mathcal{R}_{F^{-1}})$ は *abelian 3-cocycle* となる．

$$\phi_{F^{-1}}(x,y,z)=F(y,z)^{-1}F(xy,z)F(x,yz)^{-1}F(x,y)$$

$$\mathcal{R}_{F^{-1}}(x,y)=F(x,y)F(y,x)^{-1}$$

定義 3.24 (braided commutative)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r, c)$ をブレイドモノイダル圏とし，(A, μ_A, η_A) を $\mathcal{C}$ の代数とする．以下の図式が可換となるとき A は braided commutative であるという．

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "c_{A,A}"] \arrow[dr, "\mu_A"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

命題 3.25

G を群，F を G 上の *normalized 2-cochain* とする．群環 $k[G]$ は自然に G*-graded vector space* の構造を持つ．G の元 x, y に対し，$x \bullet y = F(x,y)xy$ とし，これを k 線型に拡張して $k[G]$ の積を定める．$k[G]$ にこの積を定めたものを $k_F[G]$ と書くと，$k_F[G]$ は $\mathbf{Vect}^G_{\phi_{F^{-1}}}$ における代数である．特に，G がアーベル群のとき，$k_F[G]$ は $\mathbf{Vect}^G_{\phi_{F^{-1}}, \mathcal{R}_{F^{-1}}}$ における *braided commutative* な代数である．

- アーベル群 G とその abelian 3-cocycle $(\phi, \mathcal{R})$ からブレイドモノイダル圏 $\mathbf{Vect}_{\phi}^{G}$ が構成できる．
- アーベル群 G とその normalized 2-cochain F から abelian 3-cocycle $(\phi_{F^{-1}}, \mathcal{R}_{F^{-1}})$ が構成できる．つまり，G と F からブレイドモノイダル圏 $\mathbf{Vect}_{\phi_{F^{-1}}, \mathcal{R}_{F^{-1}}}^{G}$ が構成できる．
- 群環 $k[G]$ に F により定まる積を入れて，これを $k_F[G]$ とする．$k_F[G]$ は $\mathbf{Vect}_{\phi_{F^{-1}}, \mathcal{R}_{F^{-1}}}^{G}$ における braided commutative な代数である．

定義 3.26 (standard involution algebra)

G をアーベル群，F を G 上の normalized 2-cochain とする．G の元 x に対し，$\sigma_F(x) = F(x,x)x$ とし，これを k-線型に拡張することで，$\sigma_F\colon k_F[G] \to k_F[G]$ を定義する．$(k_F[G], \sigma_F)$ が involution algebra となるとき，$(k_F[G], \sigma_F)$ を standard involution algebraという．

定理 3.27

G をアーベル群，F を G 上の *normalized 2-cochain* でかつ，$\left(k_F\left[G\right], \sigma_F\right)$ は *standard involution algebra* であるとする．
$\tilde{G} = G \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とし，$\tilde{F}$ を以下のように定義すると，$\tilde{F}$ は $\tilde{G}$ 上の *normalized 2-cochain* となり，$(k_{\tilde{F}}[\tilde{G}], \sigma_{\tilde{F}})$ と $\left(k_F\left[G\right], \sigma_F\right)'$ は *involution algebra* として同型である．

$$\tilde{F}((x,\bar{0}),(y,\bar{0})) = F(x,y), \quad \tilde{F}((x,\bar{0}),(y,\bar{1})) = F(x,x)F(x,y)$$

$$\tilde{F}((x,\bar{1}),(y,\bar{0})) = F(y,x), \quad \tilde{F}((x,\bar{1}),(y,\bar{1})) = -F(x,x)F(y,x)$$

standard involution algebra まとめ

- アーベル群 G とその上の normalized 2-cochain F から，$\mathbf{Vect}^{G}_{\phi_{F^{-1}},\mathcal{R}_{F^{-1}}}$ における braided commutative な代数 $k_F\left[G\right]$ が構成できる．
- 特に $\left(k_F\left[G\right], \sigma_F\right)$ が standard involution algebra となるとき，前頁の操作により，アーベル群 $\tilde{G}$，$\tilde{G}$ 上の normalized 2-cochain $\tilde{F}$， standard involution algebra $(k_{\tilde{F}}[\tilde{G}], \sigma_{\tilde{F}})$ が得られる．
- このとき，$k_{\tilde{F}}[\tilde{G}]$ は $\mathbf{Vect}^{\tilde{G}}_{\phi_{\tilde{F}^{-1}},\mathcal{R}_{\tilde{F}^{-1}}}$ における braided commutative な代数である．
- このプロセスは無限に繰り返すことができ，その結果は Cayley-Dickson process により得られる代数と同型で，この代数はあるブレイドモノイダル圏における braided commutative な代数である．

八元数の緩やかな結合性・可換性について

実数から複素数の構成

- $G = \{\bar{0}\}$ はアーベル群で，$F(\bar{0}, \bar{0}) = 1$ とすると，F は G 上の normalized 2-cochain となる．
- $\mathbb{R}_F[G] \cong \mathbb{R}$ は $\phi_{F^{-1}} = 1, \mathcal{R}_{F^{-1}} = 1$ より，$\mathbf{Vect}^G_{\phi_{F^{-1}}, \mathcal{R}_{F^{-1}}}$ は $\mathbf{Vect}_k$ と一致する．
- よって $\mathbb{R}$ は $\mathbf{Vect}_k$ の braided commutative な代数で，$\sigma_F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ となる standard involution algebra である．
- $\mathbb{R}$ に対して定理 3.27 の構成を行うと，$\tilde{G} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \tilde{F}(\bar{0}, \bar{0}) = F(\bar{0}, \bar{0}) = 1, \tilde{F}(\bar{0}, \bar{1}) = F(\bar{0}, \bar{0})F(\bar{0}, \bar{0}) = 1, \tilde{F}(\bar{1}, \bar{0}) = F(\bar{0}, \bar{0}) = 1, \tilde{F}(\bar{1}, \bar{1}) = -F(\bar{0}, \bar{0})F(\bar{0}, \bar{0}) = -1$ となる．
- このとき，$\phi_{\tilde{F}^{-1}} = 1, \mathcal{R}_{\tilde{F}^{-1}} = 1$ となり，$\mathbb{R}_{\tilde{F}^{-1}}[G] \cong \mathbb{C}$ は $\mathbf{Vect}^{\tilde{G}}$ の braided commutative な代数となる．また，$\sigma_{\tilde{F}^{-1}}(a + bi) = a - bi$ であった．

- 前頁の $G, F, \phi_{F^{-1}}, \mathcal{R}_{F^{-1}}$ を $G_0, F_0, \phi_0, \mathcal{R}_0$ とし，$G_n = \tilde{G}_{n-1}, F_n = \tilde{F}_{n-1}, \phi_n = \phi_{F_n^{-1}}, \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{F_n^{-1}}, \sigma_n = \sigma_{F_n}$ と定める．また，F_n の構成法を見ると，F_n は $1, -1$ の値しか取らないことが分かる．$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値を取る関数 f_n を，$F_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (-1)^{f_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$ を満たす関数として定義する．
- $F_{n+1}((\boldsymbol{x}, \bar{0}), (\boldsymbol{y}, \bar{0})) = F_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (-1)^{f_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$
  $F_{n+1}((\boldsymbol{x}, \bar{0}), (\boldsymbol{y}, \bar{1})) = F_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})F_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (-1)^{f_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + f_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$
  $F_{n+1}((\boldsymbol{x}, \bar{1}), (\boldsymbol{y}, \bar{0})) = F_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (-1)^{f_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$
  $F_{n+1}((\boldsymbol{x}, \bar{1})(\boldsymbol{y}, \bar{1})) = -F_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})F_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (-1)^{f_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + f_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \bar{1}}$
  であり，ここから
  $f_{n+1}((\boldsymbol{x}, x_{n+1}), (\boldsymbol{y}, y_{n+1})) = f_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\bar{1} - x_{n+1}) + f_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})x_{n+1} + f_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})y_{n+1} + x_{n+1}y_{n+1}$
  となることが分かる．

複素数から四元数の構成

- $f_1(x_1, y_1) = x_1 y_1$ と書けるので，$f_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1(\bar{1} - x_2) + y_1 x_1 x_2 + {x_1}^2 y_2 + x_2 y_2 = x_1 y_1 + (x_1 + x_2) y_2$ である．
- 上記の式を用いて計算を行うと，$\phi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 1, \mathcal{R}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (-1)^{x_1 y_2 + y_1 x_2} = (-1)^{|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|}$ となる．
- 上記の式より，四元数は結合的であるが，非可換であることが読み取れる．
- $\mathbb{R}_{F_2}[G_2] \cong \mathbb{H}$ の対応は $(\bar{0}, \bar{0})$ と 1，$(\bar{1}, \bar{0})$ と i，$(\bar{0}, \bar{1})$ と j，$-(\bar{1}, \bar{1})$ と k が対応する．このとき，$|(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})| = \bar{1}$ で i と j の積が非可換なことが確かめられる．

四元数から八元数の構成

- 前頁の f_2 を用いて f_3 を計算すると，

$$f_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} x_i y_j + y_1 x_2 x_3 + x_1 y_2 x_3 + x_1 x_2 y_3$$

であることが分かる．

- 上記の式を用いて計算を行うと，

$\phi_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (-1)^{|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}|}$

$\mathcal{R}_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (-1)^{\sum_{i \neq j} x_i y_j + y_1 x_2 x_3 + x_1 y_2 x_3 + x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 y_3 + y_1 x_2 y_3 + y_1 y_2 x_3}$

となる．

四元数から八元数の構成

- $\mathbb{R}_{F_3}[G_3] \cong \mathbb{O}$ の対応は

  $(\bar{0},\bar{0},\bar{0}) \leftrightarrow \boldsymbol{e}_0, (\bar{1},\bar{0},\bar{0}) \leftrightarrow \boldsymbol{e}_1, (\bar{1},\bar{0},\bar{1}) \leftrightarrow \boldsymbol{e}_2, -(\bar{1},\bar{1},\bar{1}) \leftrightarrow \boldsymbol{e}_3$，$(\bar{0},\bar{0},\bar{1}) \leftrightarrow \boldsymbol{e}_4, (\bar{0},\bar{1},\bar{0}) \leftrightarrow \boldsymbol{e}_5, -(\bar{1},\bar{1},\bar{0}) \leftrightarrow \boldsymbol{e}_6, (\bar{0},\bar{1},\bar{1}) \leftrightarrow \boldsymbol{e}_7$ が対応する．例えば，$|\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_5| = \bar{1}$ で，

  $$(\boldsymbol{e}_3 \bullet \boldsymbol{e}_4) \bullet \boldsymbol{e}_5 = \boldsymbol{e}_6 \bullet \boldsymbol{e}_5 = -\boldsymbol{e}_1$$

  $$\boldsymbol{e}_3 \bullet (\boldsymbol{e}_4 \bullet \boldsymbol{e}_5) = \boldsymbol{e}_3 \bullet \boldsymbol{e}_7 = \boldsymbol{e}_1$$

  より，

  $$(\boldsymbol{e}_3 \bullet \boldsymbol{e}_4) \bullet \boldsymbol{e}_5 = (-1)^{|\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_5|} \boldsymbol{e}_3 \bullet (\boldsymbol{e}_4 \bullet \boldsymbol{e}_5)$$

四元数から八元数の構成

- また $|\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3| = \bar{0}$ で，

$$(\boldsymbol{e}_3 \bullet \boldsymbol{e}_4) \bullet \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_6 \bullet \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_4$$

$$\boldsymbol{e}_3 \bullet (\boldsymbol{e}_4 \bullet \boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3 \bullet (-\boldsymbol{e}_6) = \boldsymbol{e}_4$$

  より，

$$(\boldsymbol{e}_3 \bullet \boldsymbol{e}_4) \bullet \boldsymbol{e}_3 = (-1)^{|\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3|} \boldsymbol{e}_3 \bullet (\boldsymbol{e}_4 \bullet \boldsymbol{e}_3)$$

- $\mathcal{R}_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を計算すると，
  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{y} = 0$ のとき $\mathcal{R}_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \bar{0}$，
  $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ のとき，$\mathcal{R}_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \bar{1}$ となる．
- $\mathbb{O}$ は $\mathbf{Vect}^{G_3}_{\phi_3, \mathcal{R}_3}$ における quantum commutative な代数であることが確認できる．

世の中に存在する結合子が非自明なモノイダル圏における代数の例

準ホップ代数 H があると，H 加群の圏 ${}_H\mathcal{M}$ は結合子が非自明なモノイダル圏の構造を持つ．準ホップ代数のハイゼンベルグダブルの候補の一つ $\mathcal{H}_1(H)$ は ${}_H\mathcal{M}$ における代数である．

$$((p_1\#p_2^*)\cdot(p_0\#p_1^*))\cdot(p_1\#p_2^*) \neq (p_1\#p_2^*)\cdot((p_0\#p_1^*)\cdot(p_1\#p_2^*))$$

より $\mathcal{H}_1(H(3))$ が非結合的代数であることが確認できる．

$\mathcal{H}_1(H(3))$	$p_0\#p_0^*$	$p_0\#p_1^*$	$p_0\#p_2^*$	$p_1\#p_0^*$	$p_1\#p_1^*$	$p_1\#p_2^*$	$p_2\#p_0^*$	$p_2\#p_1^*$	$p_2\#p_2^*$
$p_0\#p_0^*$	$p_0\#p_0^*$	$p_0\#p_1^*$	$p_0\#p_2^*$	0	0	0	0	0	0
$p_0\#p_1^*$	0	0	0	$p_0\#p_1^*$	$p_0\#p_2^*$	$p_0\#p_0^*$	0	0	0
$p_0\#p_2^*$	0	0	0	0	0	0	$p_0\#p_2^*$	$p_0\#p_0^*$	$p_0\#p_1^*$
$p_1\#p_0^*$	0	0	0	$p_1\#p_0^*$	$p_1\#p_1^*$	$p_1\#p_2^*$	0	0	0
$p_1\#p_1^*$	0	0	0	0	0	0	$p_1\#p_1^*$	$\omega^2 p_1\#p_2^*$	$\omega p_1\#p_0^*$
$p_1\#p_2^*$	$p_1\#p_2^*$	$\omega p_1\#p_0^*$	$\omega^2 p_1\#p_1^*$	0	0	0	0	0	0
$p_2\#p_0^*$	0	0	0	0	0	0	$p_2\#p_0^*$	$p_2\#p_1^*$	$p_2\#p_2^*$
$p_2\#p_1^*$	$p_2\#p_1^*$	$\omega p_2\#p_2^*$	$\omega^2 p_2\#p_0^*$	0	0	0	0	0	0
$p_2\#p_2^*$	0	0	0	$p_2\#p_2^*$	$\omega^2 p_2\#p_0^*$	$\omega p_2\#p_1^*$	0	0	0

八元数の擬行列表現

リジッドモノイダル圏

定義 5.1 (リジッドモノイダル圏)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏とする．$X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対して，$X^* \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ の射 $\mathrm{ev}_X \colon X^* \otimes X \to I, \mathrm{coev}_X \colon I \to X \otimes X^*$ が存在して，以下の図式が可換となるとき，X^* は X の<u>左双対 (left dual)</u>であるという．X の<u>右双対</u>も同様に定義する．
モノイダル圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象に対して，左双対 (右双対) が存在するとき，$\mathcal{C}$ は<u>左 (右) リジッド (left(right) rigid)</u>であるという．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "l_X^{-1}"] \arrow[rrrrr, bend right=10, "\mathrm{id}_X"'] & I \otimes X \arrow[r, "\mathrm{coev}_X \otimes \mathrm{id}_X"] & (X \otimes X^*) \otimes X \arrow[r, "a_{X,X^*,X}"] & X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{ev}_X"] & X \otimes I \arrow[r, "r_X"] & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X^* \arrow[r, "r_{X^*}^{-1}"] \arrow[rrrrr, bend right=10, "\mathrm{id}_{X^*}"'] & X^* \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}_X"] & X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[r, "a_{X^*,X,X^*}^{-1}"] & (X^* \otimes X) \otimes X^* \arrow[r, "\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}"] & I \otimes X^* \arrow[r, "l_{X^*}"] & X^*
\end{tikzcd}$$

左リジッドモノイダル圏の例

注意 5.2

左（右）リジッドモノイダル圏 $\mathbf{C}$ において，$\mathcal{C}$ の対象 X の左（右）双対は同型を除いて一意に定まる．

例 5.3

- 以降有限次元 k-ベクトル空間のなす圏を $\mathbf{vect}_k$ と表記する．$\mathbf{vect}_k$ は $\mathbf{Vect}_k$ の部分モノイダル圏であり，左リジッドである．（実は右リジッドでもある．）
- 任意の $\mathbf{vect}_k$ の対象 V に対して，V^* をその双対空間とする．$\{\boldsymbol{e}_i\}$ を V の基底とし，$\{\boldsymbol{e}^i\}$ をその双対基底とする．
- $\mathrm{ev}_V : V^* \otimes V \ni f \otimes v \mapsto f(v) \in I$,
  $\mathrm{coev}_V : 1_k \mapsto \sum_{i \in I} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^i \in V \otimes V^*$
  とすると，V^* は V の左双対である．

$\mathbf{vect}_\phi^G$ の左リジッド構造

命題 5.4

G を群とし，ϕ を G の *normalized 3-cocycle* とする．このとき，$\mathbf{vect}_\phi^G$ は左リジッドモノイダル圏の構造を持つ．

任意の $\mathbf{vect}_\phi^G$ の対象 $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ に対して，$\boldsymbol{e}_i$ がある V_g に含まれるような基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ を用意する．また，$|i|$ で $|\boldsymbol{e}_i|$ を表すことにする．$\boldsymbol{e}^i$ で生成される空間 V^* を，$|\boldsymbol{e}^i| = |i|^{-1}$ として G-graded vector space とみなす．このとき，

$$\mathrm{ev}_V \colon V^* \otimes V \ni f \otimes v \mapsto f(v) \in k$$

$$\mathrm{coev}_V \colon k \ni 1_k \mapsto \textstyle\sum_i \phi^{-1}(|i|, |i|^{-1}, |i|)\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^i \in V \otimes V^*$$

とすると，$\mathbf{vect}_\phi^G$ に左リジッド構造が入ることが確かめられる．

リジッドモノイダル圏の対象から作られる代数

命題 5.5

$\mathcal{C}$ を左リジッドモノイダル圏とし，V をその対象とする．このとき $V \otimes V^*$ に対して $\mu_{V\otimes V^*}, \eta_{V\otimes V^*}$ を以下のように定めると，$(V \otimes V^*, \mu_{V\otimes V^*}, \eta_{V\otimes V^*})$ は $\mathcal{C}$ における代数である．

$$\mu_{V\otimes V^*} = (\mathrm{id}_V \otimes(\mathrm{ev}_V \otimes \mathrm{id}_{V^*})) \circ (\mathrm{id}_V \otimes a^{-1}_{V^*,V,V^*}) \circ a_{V,V^*,V\otimes V^*}$$

$$\eta_{V\otimes V^*} = \mathrm{coev}_V$$

「Graphical」な議論により簡単に示すことができる．

モノイダル圏上の代数に対してその加群が以下のように自然に定義できる．

定義 5.6 (モノイド対象上の加群)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，(A, μ_A, η_A) を $\mathcal{C}$ 上の代数，M を $\mathcal{C}$ の対象，$\mu_M\colon A \otimes M \to M$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の図式が可換となるとき (M, μ_M) は A 上の左加群(left A-module) であるという．A 上の右加群についても同様に定義する．

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes M \arrow[rr, "a_{A,A,M}"] \arrow[d, "\mu_A \otimes 1_M"'] & & A \otimes (A \otimes M) \arrow[d, "1_A \otimes \mu_M"] \\
A \otimes M \arrow[r, "\mu_M"'] & A & A \otimes M \arrow[l, "\mu_M"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes M \arrow[r, "\eta_A \otimes 1_M"] \arrow[dr, "l_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\mu_A"] \\
 & M
\end{tikzcd}$$

モノイダル圏における代数上の加群の射

モノイダル圏における代数 A 上の加群の射も以下のように自然に定義することができ，これにより，左（右）A 加群の圏も定義できる．

定義 5.7 (モノイド対象上の加群の射)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，(A, μ_A, η_A) を $\mathcal{C}$ 上の代数，$(M, \mu_M), (N, \mu_N)$ を A 上の左加群，$f\colon M \to N$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の左の図式が可換となるとき f は A 上の左加群の射(morphism of left A-modules) であるという．右加群の射についても同様に定義する．

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{1_A \otimes f} & A \otimes N \\ {\scriptstyle \mu_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_N} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

命題 5.8

$\mathcal{C}$ を左リジッドモノイダル圏とし，A を $\mathcal{C}$ における代数とする．
このとき，左 A 加群 $(\triangleright, V)$ と，$\mathcal{C}$ における代数の射
$\rho\colon A \to V \otimes V^*$ は一対一に対応する．

左 A 加群 $\triangleright\colon A \otimes V \to V$ に対して，代数の射 $\Phi(\triangleright)$ を

$$\Phi(\triangleright) = (\triangleright \otimes \mathrm{id}_{V^*}) \circ a^{-1}_{A,V,V^*} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{coev}_V)$$

代数の射 $\rho\colon A \to V \otimes V^*$ に対して，左 A 作用 $\Psi(\rho)$ を

$$\Psi(\rho) = (\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{ev}_V) \circ a_{V,V^*,V} \circ (\rho \otimes \mathrm{id}_V)$$

で定めればよい．この命題も「Graphical」な議論により示すことができる．

八元数の擬行列表現

- $\mathbb{O}$ は $\mathbf{vect}^{G_3}_{\phi_3,\mathcal{R}_3}$ における代数であり，$(\mathbb{O},\mu_{\mathbb{O}})$ は左 $\mathbb{O}$ 加群である．
- 前頁の命題より，$\mathbf{vect}^{G_3}_{\phi_3,\mathcal{R}_3}$ における代数の射 $\Phi(\mu_{\mathbb{O}})\colon \mathbb{O}\to\mathbb{O}\otimes\mathbb{O}^*$ が得られる．
- 計算により $\Phi(\mu_{\mathbb{O}})(\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i=0}^{7}(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i)\otimes\boldsymbol{e}^i$ であることが分かる．
- $\mathbb{O}\otimes\mathbb{O}^*$ の積は $(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^j)\cdot(\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}^l)=\delta^j_k\dfrac{\phi(|i|,|j|^{-1},|k||l|^{-1})}{\phi(|j|^{-1},|k|,|l|^{-1})}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^l$ と書ける．
- 特に $\alpha=\alpha^j_i\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^j,\beta=\beta^j_i\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^j$ とすると，

$$(\alpha\cdot\beta)^j_i=\sum_{k=0}^{7}\frac{\phi(|i|,|k|^{-1},|k||j|^{-1})}{\phi(|k|^{-1},|k|,|j|^{-1})}\alpha^k_i\beta^j_k=\sum_{k=0}^{7}||i|,|k|,|k|+|j||\,\alpha^k_i\beta^j_k$$

八元数の擬行列表現の具体的表示

$$
\boldsymbol{e}_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0 \end{pmatrix}
$$

八元数の擬行列表現の具体的表示

$$
\boldsymbol{e}_6 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_7 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&-1\\
0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
$$

$\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}^*$ における八元数の行列表現の積を具体的に計算してみると以下のようになる．

$$
\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}
0&-1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1\\
0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1\\
0&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1\\
0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0
\end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_4
$$

参考文献

- H. Albuquerque, S. Majid, *Quasialgebra Structure of the Octonions*, Journal of Algebra, **220**(1), 188-224, (1999)
- D. Bulacu, *The weak braided Hopf algebra structure of some Cayley-Dickson algebras*, Journal of Algebra,**322**(7), 2404-2427, (2009).
- F. Panaite, and F. V. Oystaeyen, *Quasi-Hopf algebras and representations of octonions and other quasialgebras*, J. Math. Phys., **45**(10), 3912-3929, (2004).

ご清聴ありがとうございました！