Onsager 代数とその周辺

宇佐見 公輔

第 4 回 すうがく徒のつどい

自己紹介

- 宇佐見 公輔（うさみ こうすけ）
- 本業はプログラマー
- 大学院で数学専攻、修士卒業後は趣味としてやっている
- Lie 代数やその周辺を好む

今回は一般枠の講演として応募しましたが、入門枠のほうが適切だったかもしれません。

今日の話

- 背景
- Lie 代数とその関連用語
- Onsager 代数
- Onsager 代数の拡張

背景

Onsager 代数は、統計力学の数理模型である 2 次元 Ising 模型の厳密解を導く際に導入された代数構造です（Onsager 1944）。これは $\mathbb{C}$ 上の無限次元 Lie 代数です。

その後、Chiral Potts 模型の解法でも利用される（1980〜1990）など、他にもいくつかの数理模型の研究で用いられています。

Onsager 代数の一般化もいくつか研究されており、Generalized Onsager 代数、q-Onsager 代数、などがあります。これらも数理物理への応用が研究されています。

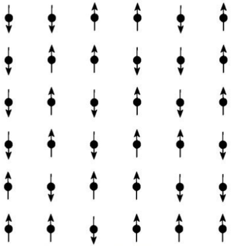
背景

- 2 次元 Ising 模型：$m \times n$ の格子模型
- 配置 $s = (s_{ij})$（ここで、$s_{ij} = \pm 1$）
- 周期境界条件 $s_{i+m,j} = s_{ij}$、$s_{i,j+n} = s_{ij}$
- エネルギー

$$E(s) = -J_1 \sum_{i,j} s_{ij} s_{i+1,j} - J_2 \sum_{i,j} s_{ij} s_{i,j+1}$$

- 分配関数

$$Z(T) = \sum_{s} \exp(-\beta E(s))$$



統計力学の模型を解くとは、$m, n \to \infty$ のときの分配関数 $Z(T)$ を求めることです。

背景

2 次元 Ising 模型の分配関数は、転送行列というものを導入することで、

$$Z(T) = \mathrm{tr}(V_1 V_2)^m$$

と書けます（ここで V_1、V_2 は $2^n \times 2^n$ 行列）。このため、2 次元 Ising 模型を解くことは、$V_1 V_2$ の固有値を求めることに帰着します。

転送行列は V_1 と V_2 は、ある行列 A_0、A_1 を用いて

$$V_1 = \exp(K_1 A_1), \quad V_2 = \exp(-K_2^* A_0)$$

と書けます。この A_0、A_1 で生成される Lie 代数を Onsager 代数と呼びます。これを詳しく調べることで、2 次元 Ising 模型の厳密解が得られます。

Lie 代数の定義

集合 L に、加法、スカラー倍、ブラケット積の 3 つの演算を考えます。

$$\begin{aligned} L \times L &\to L \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times L &\to L \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L \times L &\to L \\ (x, y) &\mapsto [x, y] \end{aligned}$$

Lie 代数の定義

Definition (Lie 代数)

集合 L が $\mathbb{C}$ 上の Lie 代数であるとは、以下を満たすことです。

- L は加法とスカラー倍で $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になる。
- （双線型性）$\forall x, y, z \in L$、$\forall \alpha \in \mathbb{C}$ について

$$[x+y, z] = [x, z] + [y, z], \quad [\alpha x, z] = \alpha[x, z]$$
$$[z, x+y] = [z, x] + [z, y], \quad [z, \alpha x] = \alpha[z, x]$$

- （交代性）$\forall x \in L$ について

$$[x, x] = 0$$

- （Jacobi 恒等式）$\forall x, y, z \in L$ について

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

Lie 代数の定義

なお、$[x, x] = 0$ から

$$[x, y] = -[y, x]$$

が導けます。

また、ブラケット積は結合法則 $[x, [y, z]] = [[x, y], z]$ を満たさず、代わりに

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

という関係が成り立ちます。

関連用語の定義

Definition (準同型写像)

L と M を Lie 代数とします。写像 $\phi : L \to M$ が Lie 代数の準同型写像であるとは、ϕ が線型写像であり、$\forall x, y \in L$ について

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$$

を満たすことです。

Definition (同型)

Lie 代数の準同型写像 $\phi : L \to M$ が線型同型写像であるとき、ϕ を Lie 代数の同型写像と呼びます。L から M への Lie 代数の同型写像が存在するとき、L と M は同型であるといいます。

関連用語の定義

Definition (部分 Lie 代数)

L を Lie 代数とします。L の部分集合 S が部分 Lie 代数であるとは、S が部分ベクトル空間であり、$\forall x, y \in S$ について $[x, y] \in S$ を満たすことです。

Definition (イデアル)

L を Lie 代数とします。L の部分集合 I がイデアルであるとは、I が部分ベクトル空間であり、$\forall x \in L$、$\forall y \in I$ について $[x, y] \in I$ を満たすことです。

関連用語の定義

Definition (商 Lie 代数)

L を Lie 代数、I をイデアルとします。商ベクトル空間 L/I にブラケット積を $[\overline{x}, \overline{y}] := \overline{[x, y]}$ で定めると、L/I は Lie 代数となります。これを商 Lie 代数と呼びます。

補足：I が単に部分 Lie 代数だとブラケット積が well-defined でないことに注意してください。

結合代数

Definition (結合代数)

集合 A が $\mathbb{C}$ 上の結合代数であるとは、加法、スカラー倍、乗法の 3 つの演算が定義されていて、以下の条件を満たすことです。

- A は加法とスカラー倍で $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になる。
- 乗法 $A \times A \to A$ は双線型写像となる。
- A は加法と乗法で環になる。すなわち、乗法は結合法則を満たし単位元を持つ（なお、交換法則は仮定しない）。

「結合代数」という言葉を使いましたが、通常はわざわざ「結合」と言わずに「代数」「多元環」と呼ばれることが多いです。今は Lie 代数の話をしていて結合法則を満たすことが当たり前ではないので、あえて「結合代数」と呼んでいます。

結合代数

結合代数が与えられたとき、ブラケット積を $[x, y] := xy - yx$ で定義すると、結合代数としての乗法を忘れて、加法とスカラー倍とブラケット積で Lie 代数となります。

Example (行列の Lie 代数)

$\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列全体の集合とします。これは通常の加法、スカラー倍、乗法で結合代数です。
$\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ にブラケット積を $[X, Y] := XY - YX$ で定めると Lie 代数となります。これは $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ と呼ばれます。

補足：このような結合代数と Lie 代数の関係から、$[x, y] = 0$ となることを「x と y が可換である」という言い方をします。

基底を使った Lie 代数の表示

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 L が与えられたとして、この L が Lie 代数となるようにブラケット積を定めることを考えます。

L の基底 $\{e_i\}_{i\in I}$ をひとつ取ります。基底同士のブラケット積 $[e_i, e_j]$ をすべて定めれば、L の元は基底の線型結合で書けますので、ブラケット積の双線型性から L 全体のブラケット積が定まります。

この際、ブラケット積が交代性を満たすためには $[e_i, e_i] = 0$、$[e_j, e_i] = -[e_i, e_j]$ が必要です。また、Jacobi 恒等式を満たすためには $[e_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_i]] + [e_k, [e_i, e_j]] = 0$ が必要です。これらの条件を満たすようにブラケット積を定めることができれば、L は Lie 代数となります。

この考え方で、いくつかの Lie 代数の具体例を挙げます。

基底を使った Lie 代数の表示

Example (A_1 型の単純 Lie 代数)

L を $\mathbb{C}$ 上の 3 次元ベクトル空間とします。基底 $\{h, e, f\}$ に対してブラケット積を

$$\begin{aligned} [h,h] &= 0, & [h,e] &= 2e, & [h,f] &= -2f, \\ [e,h] &= -2e, & [e,e] &= 0, & [e,f] &= h, \\ [f,h] &= 2f, & [f,e] &= -h, & [f,f] &= 0 \end{aligned}$$

と定めると、L は Lie 代数となります。

これは A_1 型の単純 Lie 代数として知られています。行列の Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) := \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ と同型です。

基底を使った Lie 代数の表示

$[h, e], [h, f], [e, f]$ だけ定めれば、残りは交代性を満たす必要から定まります。

Jacobi 恒等式を満たすことは別途確認します。たとえば

$$[h, [e, f]] + [e, [f, h]] + [f, [h, e]] = 0$$

は、$[h, [e, f]] = 0$、$[e, [f, h]] = 2h$、$[f, [h, e]] = -2h$ から成り立ちます。

基底を使った Lie 代数の表示

Example (A_2 型の単純 Lie 代数の部分 Lie 代数)

L を $\mathbb{C}$ 上の 3 次元ベクトル空間とします。基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に対してブラケット積を

$$\begin{aligned} &[e_1, e_1] = 0, && [e_1, e_2] = e_3, && [e_1, e_3] = 0, \\ &[e_2, e_1] = -e_3, && [e_2, e_2] = 0, && [e_2, e_3] = 0, \\ &[e_3, e_1] = 0, && [e_3, e_2] = 0, && [e_3, e_3] = 0 \end{aligned}$$

と定めると、L は Lie 代数となります。

これは A_2 型の単純 Lie 代数の部分 Lie 代数です。A_2 型の単純 Lie 代数は 8 次元であり、基底 $\{h_1, e_1, f_1\}$ からなる A_1 型と基底 $\{h_2, e_2, f_2\}$ からなる A_1 型に e_3 と f_3 を加えることで得られます。

生成元と関係式から定まる Lie 代数

ここまでは基底に対してブラケット積を定めることで Lie 代数を構成しました。

別の方法として、生成元と関係式によって Lie 代数を構成する方法を述べます。これは、他の代数構造の場合でもよく使われる方法です。

生成元と関係式から定まる Lie 代数

Definition (自由 Lie 代数)

集合 X を考えます。X 上の自由 Lie 代数 $L(X)$ とは、X を含む Lie 代数であって次の条件を満たすもののことです。
Lie 代数 M と写像 $\theta : X \to M$ が与えられたとき、次の図式を可換にするような Lie 代数の準同型 $\phi : L(X) \to M$ がただひとつ存在する。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\theta"] & \\ L(X) \arrow[r, "\exists\phi"'] & M \end{tikzcd}$$

生成元と関係式から定まる Lie 代数

Theorem (自由 Lie 代数の存在と一意性)

集合 X 上の自由 *Lie* 代数 $L(X)$ は同型を除いて一意に存在します。

自由 Lie 代数が存在すれば一意であることは、圏の言葉でいう普遍性で、証明は難しくありません。
自由 Lie 代数が存在することは実際に構成することで示せます。
たとえば次のようになります。

1. X を基底とするベクトル空間 V を考えます。
2. ベクトル空間 V からテンソル代数 $T(V)$ を考えます。これはテンソル積 $\otimes$ を乗法演算とする結合代数です。
3. テンソル代数 $T(V)$ にブラケット積を $[x, y] := x \otimes y - y \otimes x$ で定めると Lie 代数となります。
4. Lie 代数 $T(V)$ の部分 Lie 代数で X で生成されるものを L とします。L が自由 Lie 代数となります。

生成元と関係式から定まる Lie 代数

Definition (生成元と関係式から定まる Lie 代数)

集合 X 上の自由 Lie 代数 $L(X)$ を考えます。$L(X)$ の部分集合 $\{r_i\}_{i\in I}$ から生成されるイデアルを R とするとき、$L(X)/R$ を生成元 X と関係式 $\{r_i = 0\}_{i\in I}$ で定まる Lie 代数と呼びます。

この考え方で、いくつかの Lie 代数の具体例を挙げます。

生成元と関係式から定まる Lie 代数

Example (A_2 型の単純 Lie 代数の部分 Lie 代数)

生成元 $\{e_1, e_2\}$ と関係式

$$[e_1, [e_1, e_2]] = 0$$
$$[e_2, [e_2, e_1]] = 0$$

で定まる Lie 代数を考えます。これは先ほど基底を使った Lie 代数の表示で挙げた例と同型です。

e_3 は e_1 と e_2 から生成されるので、生成元としては不要になっています。

生成元と関係式から定まる Lie 代数

Example (A_2 型の単純 Lie 代数)

生成元 $\{h_1, h_2, e_1, e_2, f_1, f_2\}$ と関係式

$$
\begin{aligned}
&[h_1, h_2] = 0, && [h_1, e_1] = 2e_1, && [h_1, e_2] = -e_2, \\
& && [h_2, e_1] = -e_1, && [h_2, e_2] = 2e_2, \\
& && [h_1, f_1] = -2f_1, && [h_1, f_2] = f_2, \\
& && [h_2, f_1] = f_1, && [h_2, f_2] = -2f_2, \\
&[e_1, f_1] = h_1, && [e_1, f_2] = 0 && \\
&[e_2, f_2] = h_2, && [e_2, f_1] = 0 && \\
&[e_1, [e_1, e_2]] = 0, && [e_2, [e_2, e_1]] = 0 && \\
&[f_1, [f_1, f_2]] = 0, && [f_2, [f_2, f_1]] = 0 &&
\end{aligned}
$$

で定まる Lie 代数を考えます。これは A_2 型の単純 Lie 代数です。

これは $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) := \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ と同型です。

Onsager 代数

Lie 代数の言葉を準備したところで、Onsager 代数の定義を述べます。Onsager 代数は、生成元と関係式で定義できます。

Definition (Onsager 代数（生成元と関係式）)

生成元 $\{A_0, A_1\}$ と以下の関係式で定まる Lie 代数を Onsager 代数と呼びます。

$$[A_0,[A_0,[A_0,A_1]]] = 4[A_0,A_1]$$
$$[A_1,[A_1,[A_1,A_0]]] = 4[A_1,A_0]$$

この 2 つの関係式は Dolan-Grady 関係式と呼ばれています。

Onsager 代数

Onsager 代数は、基底とそのブラケット積を列挙できます。この方法でも定義できます。

Definition (Onsager 代数（基底）)

$\{A_k, G_m\}$（$k \in \mathbb{Z}$、$m \in \mathbb{Z}_{>0}$）を基底とし、ブラケット積を以下で定義した Lie 代数を Onsager 代数と呼びます。

$$\begin{aligned} [A_k, A_l] &= 2G_{k-l} \\ [G_m, A_k] &= A_{k+m} - A_{k-m} \\ [G_m, G_n] &= 0 \end{aligned}$$

ただし便宜上 $G_{-m} := -G_m$、$G_0 := 0$ とします。

この定義の場合、Jacobi 恒等式を満たすことは別途確認する必要があります。

Onsager 代数

Jacobi 恒等式を満たすことを示します。

G が 3 つの場合、

$$[G_l, [G_m, G_n]] + [G_m, [G_n, G_l]] + [G_n, [G_l, G_m]] = 0$$

G が 2 つ、A が 1 つの場合、

$$\begin{aligned}
&[G_m, [G_n, A_k]] + [G_n, [A_k, G_m]] + [A_k, [G_m, G_n]] \\
&= [G_m, A_{k+n} - A_{k-n}] - [G_n, A_{k+m} - A_{k-m}] + 0 \\
&= A_{k+n+m} - A_{k+n-m} - A_{k-n+m} + A_{k-n-m} \\
&\quad - A_{k+m+n} + A_{k+m-n} + A_{k-m+n} - A_{k-m-n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Onsager 代数

G が 1 つ、A が 2 つの場合、

$$
\begin{aligned}
&[G_m,[A_j,A_k]]+[A_j,[A_k,G_m]]+[A_k,[G_m,A_j]] \\
=&[G_m,2G_{j-k}]-[A_j,A_{k+m}-A_{k-m}]+[A_k,A_{j+m}-A_{j-m}] \\
=&0-2G_{j-k-m}+2G_{j-k+m}+2G_{k-j-m}-2G_{k-j+m} \\
=&-2G_{j-k-m}+2G_{j-k+m}-2G_{-k+j+m}+2G_{-k+j-m} \\
=&0
\end{aligned}
$$

A が 3 つの場合、$[A_i,[A_j,A_k]]=[A_i,2G_{j-k}]=2A_{i-j+k}-2A_{i+j-k}$ より、

$$
\begin{aligned}
&[A_i,[A_j,A_k]]+[A_j,[A_k,A_i]]+[A_k,[A_i,A_j]] \\
=&2A_{i-j+k}-2A_{i+j-k}+2A_{j-k+i}-2A_{j+k-i}+2A_{k-i+j}-2A_{k+i-j} \\
=&0
\end{aligned}
$$

Onsager 代数

Theorem (Onsager 代数の同型)

2 つの生成元と *Dolan-Grady* 関係式で定まる *Onsager* 代数と、基底で定義した *Onsager* 代数は同型になります。

Onsager 代数

Onsager 代数の基底は生成元 A_0、A_1 から次のように生成されます。

$$
\begin{aligned}
G_1 &:= \frac{1}{2}[A_1, A_0] \\
A_2 &:= A_0 + [G_1, A_1] \\
A_{-1} &:= A_1 - [G_1, A_0] \\
G_2 &:= \frac{1}{2}[A_2, A_0] \\
A_3 &:= A_0 + [G_1, A_2] \\
A_{-2} &:= A_0 - [G_1, A_{-1}] \\
G_3 &:= \frac{1}{2}[A_3, A_0] \\
A_3 &:= A_0 + [G_1, A_3] \\
A_{-2} &:= A_0 - [G_1, A_{-2}]
\end{aligned}
$$

Onsager 代数

同型の証明は計算量が多いので省略しますが、Dolan-Grady 関係式が効いてくる例を挙げます。

Lemma

$$[A_1, A_2] = [A_0, A_1]$$

Onsager 代数

$$
\begin{aligned}
[A_1, A_2] &= [A_1, A_0 + [G_1, A_1]] \\
&= [A_1, A_0] + [A_1, [G_1, A_1]] \\
[A_1, [G_1, A_1]] &= -[A_1, [A_1, G_1]] \\
&= -\frac{1}{2}[A_1, [A_1, [A_1, A_0]]] \\
&= -2[A_1, A_0]
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
[A_1, A_2] &= [A_1, A_0] - 2[A_1, A_0] \\
&= -[A_1, A_0] \\
&= [A_0, A_1]
\end{aligned}
$$

loop 代数

Onsager 代数の別の表示方法を述べます。

Definition (ローラン多項式)

多項式環 $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ をローラン多項式環と呼びます。
別の言い方をすると、

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i t^i$$

（ここで、$\alpha_i \in \mathbb{C}$、$\alpha_i \neq 0$ となる i は有限個）という形の多項式をローラン多項式と呼びます。

t^{-1}、t^{-2} など、負べきの項を許した多項式です。

loop 代数

Definition (loop 代数)

L を Lie 代数とします。$\mathbb{C}[t,t^{-1}]\otimes L$ について、ブラケット積を

$$[p\otimes x, q\otimes y] := pq\otimes[x,y]$$

と定義すると Lie 代数になります。これを L の loop 代数と呼びます。

スカラーの部分をローラン多項式に置き換えた形のものです。

loop 代数は Kac-Moody Lie 代数の実現に使われます。アフィン Lie 代数は、有限次元単純 Lie 代数の loop 代数の中心拡大で実現できます。

Onsager 代数と loop 代数

Onsager 代数は loop 代数を使って具体的に実現できます。

Definition ($\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ に対する Chevalley involution)

A_1 型単純 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ を考えます。自己同型写像 ω を

$$e \mapsto f, \quad f \mapsto e, \quad h \mapsto -h$$

で定義します。

Definition (loop 代数に対する Chevalley involution)

loop 代数 $L := \mathbb{C}[t,t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ を考えます。自己同型写像 ω を

$$p(t) \otimes x \mapsto -p(t^{-1}) \otimes \omega(x)$$

で定義します。

Onsager 代数と loop 代数

Definition (Chevalley involution による不変部分 Lie 代数)

loop 代数 $L := \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ に対して、L^{ω} を

$$L^{\omega} := \{x \in L \mid \omega(x) = x\}$$

で定義します。これは L の部分 Lie 代数になります。

Theorem (Onsager 代数と loop 代数の同型)

L^{ω} は *Onsager* 代数と同型になります。

Onsager 代数と loop 代数

$\{a_k, g_m\}$（$k \in \mathbb{Z}$、$m \in \mathbb{Z}_{>0}$）を

$$\begin{aligned} a_k &:= t^k \otimes e + t^{-k} \otimes f \\ g_m &:= \frac{1}{2}(t^m - t^{-m}) \otimes h \end{aligned}$$

で定義すると、L^ω の基底になります。

そして、Onsager 代数の基底 $\{A_k, G_m\}$ と対応します。実際に L^ω の基底同士のブラケット積が Onsager 代数の基底同士のブラケット積と一致することを確認します。

Onsager 代数と loop 代数

$$
\begin{aligned}
[a_k, a_l] &= [t^k \otimes e + t^{-k} \otimes f, t^l \otimes e + t^{-l} \otimes f] \\
&= t^{k+l} \otimes [e, e] + t^{k-l} \otimes [e, f] \\
&\quad + t^{-k+l} \otimes [f, e] + t^{-k-l} \otimes [f, f] \\
&= t^{k-l} \otimes h - t^{-k+l} \otimes h \\
&= 2g_{k-l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[g_m, a_k] &= \left[\frac{1}{2}(t^m - t^{-m}) \otimes h, t^k \otimes e + t^{-k} \otimes f\right] \\
&= \frac{1}{2}(t^{m+k} - t^{-m+k}) \otimes [h, e] + \frac{1}{2}(t^{m-k} - t^{-m-k}) \otimes [h, f] \\
&= t^{m+k} \otimes e - t^{-m+k} \otimes e + t^{m-k} \otimes f - t^{-m-k} \otimes f \\
&= a_{k+m} - a_{k-m}
\end{aligned}
$$

Onsager 代数の拡張

Onsager 代数は $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の部分 Lie 代数でした。この $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ を他の単純 Lie 代数に置き換えることで、Onsager 代数の拡張を考えることができます。

- Uglov と Ivanov による A 型への拡張（1996）
- Date と Usami による D 型への拡張（2004）
- Stokman による一般の Kac-Moody algebra への拡張（2019）

これらのそれぞれで、生成元と関係式による定義、基底による定義、loop 代数による定義が可能であり互いに同型になります。

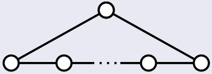
Onsager 代数の拡張

Definition (A 型 Onsager algebra)

生成元 $e_0, \dots, e_n$ と以下の関係式で生成される Lie 代数を $A_n^{(1)}$ 型 Onsager 代数と呼びます。

$$
\begin{aligned}
[e_i,[e_i,e_j]] &= e_j && \text{Dynkin 図形上で頂点が隣のとき} \\
[e_i,[e_i,e_j]] &= 0 && \text{otherwise}
\end{aligned}
$$

上記の Dynkin 図形は $A_n^{(1)}$ 型のもの。

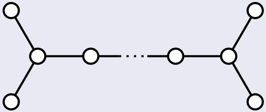


Definition (D 型 Onsager algebra)

生成元 $e_0, \ldots, e_n$ と以下の関係式で生成される Lie 代数を $D_n^{(1)}$ 型 Onsager 代数と呼びます。

$$[e_i,[e_i,e_j]] = e_j \qquad \text{Dynkin 図形上で頂点が隣のとき}$$
$$[e_i,[e_i,e_j]] = 0 \qquad \text{otherwise}$$

上記の Dynkin 図形は $D_n^{(1)}$ 型のもの。



Onsager 代数の拡張

Definition (Generalized Onsager Algebra)

$A = (a_{ij})$ を対称化可能な generalized Cartan matrix とします。生成元 $e_1, \ldots, e_n$ と以下の関係式で生成される Lie 代数を Generalized Onsager Algebra と呼びます。

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} c_s^{ij}[1-a_{ij}](\mathrm{ad}e_i)^s e_j = 0$$

- Cartax matrix が $A_1^{(1)}$ 型の場合は Dolan-Grady 関係式
- $A_n^{(1)}$ 型の場合は Uglov と Ivanov の定義
- $D_n^{(1)}$ 型の場合は Date と Usami の定義

に、それぞれ一致します。

参考文献

- The Onsager Algebra, Caroline El-Chaar, 2012
- Generalized Onsager Algebras, Jasper V. Stokman, 2019