「数論的関数いろいろ紹介」予稿

Sep. 15. 2023 （Sep. 20. 2023 一部追加）

1　はじめに

正の整数 n は素数の積

$$n = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \cdots \times p_r^{e_r}$$

（$p_1, \ldots, p_r$ は相異なる素数）に一意的に分解される。$n = 1$ のときは右辺は $r = 0$ の空積と考える。また、このような積を $\prod$ 記号を用いて

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$$

とあらわすことにする。

$\omega(n) = r$ により n の相異なる素因数の個数を、$\Omega(n) = e_1 + \cdots + e_r$ により n の（重複もこめた）素因数の個数をあらわす。

e_i がすべて 1 であるとき、n は平方因数をもたない。$n \geq 2$ について、これは $\omega(n) = \Omega(n)$ と同値である。Möbius 関数 $\mu(n)$ を n が平方因数をもつとき $\mu(n) = 0$, n が平方因数をもたないとき $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$ により定める。

$n^* = \prod_{i=1}^{r} p_i$ を、n の相異なる素数を 1 回ずつかけた積とする。$n^* = n$ は n が平方因数をもたないことと同値である。

整数 d が整数 n の約数であることを $d \mid n$ によりあらわす。n の正の約数 d は $0 \leq f_i \leq e_i$ となる整数 f_i により

$$d = p_1^{f_1} \times p_2^{f_2} \times \cdots \times p_r^{f_r}$$

と一意的にあらわせるので、n の正の約数の個数は $\tau(n) = (e_1 + 1) \cdots (e_r + 1)$ となる（$d(n)$ と表記するのが一般的だが、変数の d とまぎらわしいので $\tau(n)$ と表記することにする）。

n の約数の和は

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r}(1 + p_i + \cdots + p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

となる。

$\gcd(a, b)$ を 2 つの整数 a, b の最大公約数とする。$\gcd(a, b) = 1$ であるとき a と b は互いに素であるという。$1, 2, \ldots, n-1$ のうち、n と互いに素なものの個数を $\varphi(n)$ であらわす。

$\varphi(n)$ はどのようにあらわせるか。p が素数で $e \geq 1$ が整数ならば $\varphi(p^e) = p^e - p^{e-1} = p^{e-1}(p-1)$ であることがすぐにわかる。一般には、次のようにあらわせる。

定理 1.

$$n = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \cdots \times p_r^{e_r}$$

と素因数分解したとき

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i-1}(p_i - 1).$$

Proof. 示し方はいくつかある。n と互いに素であることは $p_1, \ldots, p_r$ のいずれでも割り切れないことと同値である。これは各 $p_i^{e_i}$ で割った余りが p_i で割り切れないことと同値であるから、n と互いに素な数について $p_i^{e_i}$ で割った余りの可能性は $\varphi(p_i^{e_i}) = p_i^{e_i-1}(p_i - 1)$ 個ある。中国式剰余定理から、n で割った余りの可能性は $\prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i-1}(p_i - 1)$ 個ある。$1, \ldots, n-1$ の範囲の数を n で割った商は 0 であるから、この範囲の数で n と互いに素なものの個数はやはり $\prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i-1}(p_i - 1)$ に一致する。 □

例 1.

$$N = 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

について、

$$\omega(N) = 3,\ \Omega(N) = 3 + 1 + 1 = 5,\ \tau(N) = 4 \times 2 \times 2 = 16$$

となり、

$$\sigma(N) = 15 \times 4 \times 6 = 360,\ \varphi(N) = 4 \times 2 \times 4 = 32$$

となる。

$\sigma(n) = 2n$ となる数 n を完全数、$n \mid \sigma(n)$ となる数を倍積完全数という（2018 年 10 月の「第 11 回すうがく徒のつどい」講演「初等整数論、初等幾何学、離散数学における未解決問題」も参照)。

表 1: $\sigma(n) = kn$

k	#	n	OEIS
1	1	1	N/A
2	≥ 50	$6, 28, 496, 8128, 33550336, \ldots$	A000396
3	$\simeq 6$	$120, 672, 523776, 459818240, 1476304896, 51001180160$	A005820
4	$\simeq 36$	$30240, 32760, \ldots, 275502900594021408$	A027867
5	$\simeq 65$	$14182439040, 31998395520, \ldots,$	A046040
6	$\simeq 245$	$154345556085770649600, \ldots$	A046041
7	≈ 516	$1.413 \cdots \times 10^{56}, \ldots$	N/A
8	≥ 1134	$8.268 \cdots \times 10^{132}, \ldots$	N/A
9	≥ 2095	$5.603 \cdots \times 10^{286}, \ldots$	N/A
10	≥ 1164	$4.485 \cdots \times 10^{638}, \ldots$	N/A
11	≥ 1	$2.518 \cdots \times 10^{1906}$	N/A

$\varphi(n) = n - 1$ となるのは n が素数であることと同値である。実際 n が合成数ならば $\varphi(n) < n - 1$ となる。しかし、$\varphi(n) \mid (n - 1)$ となる合成数 n が存在するか否かはいまだに解決されていない（2021 年 3 月の「第 1 回すうがく徒のつどい」講演「合成数はどこまで素数に近づけるか」を参照)。

$\tau(n)$ の平均的な大きさはどの程度のものになるだろうか？

1 から x までの範囲の整数での平均を考えると

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d \mid n} 1 \tag{1}$$

となるが、これを n についての和から d についての和に読み替える。すると

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d \mid n} 1 = \sum_{d} \sum_{n \leq x, d \mid n} 1$$

となるが、右辺の内側の和は x 以下の d の倍数の個数だから、

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{d \leq x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

となる。実数 z について $z - 1 < \lfloor z \rfloor \leq z$ となるから

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) \leq \sum_{d \leq x} \frac{x}{d} = x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d}$$

かつ

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) > \sum_{d \leq x} \left(\frac{x}{d} - 1 \right) = \left(x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \right) - \lfloor x \rfloor \geq x \left(-1 + \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \right)$$

となる。

$$\log\lfloor x\rfloor = \int_1^{\lfloor x\rfloor}\frac{dt}{t} < \sum_{d\le x}\frac{1}{d} \le 1+\int_1^x \frac{dt}{t} = 1+\log x \tag{2}$$

となるから、

$$x(-1+\log\lfloor x\rfloor) < \sum_{n\le x}\tau(n) \le x(1+\log x) \tag{3}$$

はほぼ $x\log x$ に等しいので、1 から x までの範囲の整数における $\tau(n)$ の平均はほぼ $\log x$ に等しいことがわかる。

このように、$\tau(n)$ の平均を考えるとき、(1) の和において、n についての和から、約数である d についての和へと読み替えることで単純な級数へと帰着することができた。こうした変形法はこの後も何度も使うことになる。

2　Abel の総和公式

ところで (2) の級数の近似は積分を用いた素朴な近似だが、実は積分法を用いてより精密な近似が可能となる。まず、つぎの等式を示す。

定理 2. 2 つの数列 a_n, b_n および整数 M, N に対して

$$B_N = \sum_{n=M+1}^{N} b_n, S_N = \sum_{n=M+1}^{N} a_n b_n$$

とおく（ただし $N \le M$ のときは $B_N = S_N = 0$ と定める）と

$$S_N = a_N B_N - \sum_{n=M+1}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)B_n.$$

Proof. $n = M+1, \ldots, N$ に対して $b_n = B_n - B_{n-1}$ となるので

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=M+1}^{N} a_n(B_n - B_{n-1}) \\ &= \sum_{n=M+1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=M+1}^{N} a_n B_{n-1} \\ &= \sum_{n=M+1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=M}^{N-1} a_{n+1} B_n \\ &= a_N B_N + \sum_{n=M+1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \\ &= a_N B_N - \sum_{n=M+1}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n. \end{aligned}$$

□

x_0 を任意の実数とする。a_n を x_0 より大きな整数において定義された数列とし、a_n の**総和関数** (*summatory function*) $A(x)$ を

$$A(x) = \sum_{x_0 < n \le x} a_n,$$

ただし $x \le x_0$ に対しては $A(x) = 0$ と定める。

たとえば a_n がすべての正の整数 n について 1 をとるとすると、$x > 0$ のとき $A(x) = \lfloor x \rfloor$ となる。また、このとき、正の実数において定義された関数 $f(x)$ について $a_n f(n)$ の総和関数は $f(n)$ の総和関数と一致する。

$A(x)$ が既知の場合、つぎの公式を用いることで、$a_n f(n)$ の形の項の総和を変形することができる。

定理 3 (Abel の総和公式 (Abel summation formula))**.** $x_0 < x < y$ となる実数 x, y をとったとき $f(t)$ は $x \le t \le y$ において連続な導関数をもつとする。このとき

$$\sum_{x < n \le y} a_n f(n) = A(y)f(y) - A(x)f(x) - \int_x^y A(t) f'(t) dt \tag{4}$$

が成り立つ。とくに x を x_0 に近づけ、y を x とおき直すと、$x > x_0$ に対して

$$\sum_{n \le x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_{\lfloor x_0+1 \rfloor}^{x} A(t) f'(t) dt \tag{5}$$

が成り立つ。ただし $\lfloor t \rfloor$ は t を超えない最大の整数をあらわす。

Proof. まず $x > x_0$ に対して (5) を示す。$M = \lfloor x_0 \rfloor, N = \lfloor x \rfloor$ とおくと Abel の級数変形法より

$$
\begin{aligned}
\sum_{x_0 < n \leq x} a_n f(n) &= \sum_{n=M+1}^{N} a_n f(n) \\
&= A(N)f(N) - \sum_{n=M+1}^{N-1} (f(n+1) - f(n))A(n) \\
&= A(N)f(x) - \int_N^x A(N)f(t)dt - \sum_{n=M+1}^{N-1} \int_n^{n+1} A(n)f'(t)dt
\end{aligned}
$$

となる。$n \leq t < n+1$ のとき

$$
A(t) = \sum_{x_0 < m \leq t} a_m = \sum_{x_0 < m \leq n} a_m
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\sum_{x_0 < n \leq x} a_n f(n) &= A(N)f(x) - \int_N^x A(N)f'(t)dt - \sum_{n=M+1}^{N-1} \int_n^{n+1} A(n)f'(t)dt \\
&= A(x)f(x) - \int_N^x A(t)f'(t)dt - \sum_{n=M+1}^{N-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)dt \\
&= A(x)f(x) - \int_{M+1}^x A(t)f'(t)dt
\end{aligned}
$$

が成り立つ。$M+1 = \lfloor x_0 + 1 \rfloor$ より (5) が成り立つ。よって $x_0 < x < y$ のとき

$$
\sum_{x < n \leq y} a_n f(n) = \sum_{x_0 < n \leq y} a_n f(n) - \sum_{x_0 < n \leq x} a_n f(n) = A(y)f(y) - A(x)f(x) - \int_x^y A(t)f'(t)dt
$$

より (2) も成り立つ。 □

Abel の総和公式は Riemann–Stieltjes 積分の部分積分の公式の特殊な場合であり、Riemann–Stieltjes 積分を用いて

$$
\int_x^y f dA = A(y)f(y) - A(x)f(x) - \int_x^y A df
$$

とあらわされる。それで、Abel の総和公式を用いた和の変形を部分積分になぞらえて部分和 (partial summation) と呼ぶこともある。

例 2. 正の整数 $n = 1, 2, \ldots$ について $a_n = 1$ とすると、$x > 0$ のとき $A(x) = \lfloor x \rfloor$ となる。よって $0 < y < 1$ となる実数 y をとると、

$$
\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n} = \sum_{y < n \leq x} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} - \frac{\lfloor y \rfloor}{y} + \int_y^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt
$$

となるが、$y \le t < 1$ のとき $\lfloor t \rfloor = 0$ だから

$$\sum_{1 \le n \le x} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt$$

となって、

$$\sum_{1 \le n \le x} \frac{1}{n} = \log x + 1 - \frac{\{x\}}{x} - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt$$

となる。ここで

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt$$

とおくと

$$\sum_{1 \le n \le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma - \frac{\{x\}}{x} + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt$$

となるが、

$$0 \le \frac{\{x\}}{x} < \frac{1}{x},\ 0 < \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt < \int_x^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}$$

であるから、

$$\sum_{1 \le n \le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \frac{\theta}{x},\ \ |\theta| < 1$$

となる実数 θ がとれる。これを

$$\sum_{1 \le n \le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O^*\left(\frac{1}{x}\right)$$

であらわす。

なお

$$\gamma = 0.577215\cdots$$

となることが知られている。この定数を *Euler-Mascheroni* 定数あるいは単に *Euler* 定数という。

3　約数の個数の平均

先の $\tau(n)$ の和であるが、もうひとつ双曲線の対称性を利用して改善が可能な部分がある。総和 $\sum_{n \le X} \tau(n)$ は、X 以下の整数 n について、約数 d の個数の総和だから x 以下の整数 n を $n = dm$ の形にあらわす方法の総数である。つまり、

$$\sum_{n \le X} \tau(n) = \sum_{n \le x} \sum_{d|n} 1 = \#\{(d, m) : 1 \le dm \le X\} \tag{6}$$

となるが、この右辺は曲線 $xy = X$ $(x, y > 0)$ と x 軸、y 軸で囲まれた領域

$$D = \{(x, y) : x, y > 0, xy \leq X\}$$

に含まれる正の整数点 $(x, y) = (d, m)$ の個数に一致する。この領域 D のうち、$x \leq \sqrt{X}$ となる部分を D_1, $y \leq \sqrt{X}$ となる部分を D_2 とおく。$xy \leq X$ で $x > \sqrt{X}$ ならば $y < \sqrt{X}$ だから、$D = D_1 \cup D_2$ となる。また $D_3 = D_1 \cap D_2$ とおくと

$$D_3 = \{(x, y) : 0 < x, y \leq \sqrt{X}\}$$

となる。D_1, D_2, D_3 に含まれる正の整数点の個数を s_1, s_2, s_3 とおくと

$$s_1 = \#\{(d, m) : 1 \leq dm \leq X, 1 \leq d \leq \sqrt{X}\},$$

$$s_2 = \#\{(d, m) : 1 \leq dm \leq X, 1 \leq m \leq \sqrt{X}\},$$

$$s_3 = \#\{(d, m) : 1 \leq d, m \leq \sqrt{X}\}$$

となる。

$$\sum_{n \leq X} \tau(n) = s_1 + s_2 - s_3$$

となるが、定義から $s_1 = s_2$ で、例??の近似式をつかうと

$$s_1 = \sum_{d \leq \sqrt{X}} \sum_{1 \leq m \leq X/d} 1 = \sum_{d \leq \sqrt{X}} \left\lfloor \frac{X}{d} \right\rfloor = X \left(\log \sqrt{X} + \gamma + O^* \left(\frac{1}{\sqrt{X}} \right) \right) - \sum_{d \leq \sqrt{X}} \left\{ \frac{X}{d} \right\},$$

$$X - 2\sqrt{X} < s_3 = \left\lfloor \sqrt{X} \right\rfloor^2 \leq X$$

より

$$\sum_{n \leq X} \tau(n) = X(\log X + 2\gamma - 1) + O^*(4\sqrt{X}) \tag{7}$$

となる。これは (3) よりもかなり精度の良い近似を与えている。

このことから、1 から x までの範囲の整数における $\tau(n)$ の平均値はほぼ $\log x + 2\gamma - 1$ に等しいということができる。また、

$$(x(\log x + 2\gamma - 1))' = \log x + 2\gamma$$

となるから n が x に近いときの $\tau(n)$ の平均値はほぼ $\log x + 2\gamma$ に等しいということもできる。

(7) は本質的には Dirichlet が 1849 年に示した。これよりもさらに精度の良い近似は可能だろうか？この問題を Dirichlet の約数問題という。

$$\sum_{n \leq X} \tau(n) = X(\log X + 2\gamma - 1) + E(X) \tag{8}$$

とおく。Voronoïは1903年に初等的だが巧妙で複雑な議論により

$$E(X) = \frac{1}{4} + O^*\left(\frac{X^{1/3}(65\log X + 237)}{36} + \frac{3}{2}\right) \tag{9}$$

となることを示した。これは

$$\sum_{n\leq X}\tau(n) = X(\log X + 2\gamma - 1) + \theta X^{1/3}\log X,\ \ |\theta| < C \tag{10}$$

となる定数 C が存在することを意味する。これを

$$\sum_{n\leq X}\tau(n) = X(\log X + 2\gamma - 1) + O(X^{1/3}\log X) \tag{11}$$

であらわす。翌1904年にVoronoïは解析的な方法で新しい加法公式を示して、$E(X) = O(X^{1/3}\log X)$ となることを改めて証明している。その後、$E(X)$ について、次のことが示されている。

van der Corput, 1922:	$E(X) = O(X^{33/100+\epsilon})$,
van der Corput, 1928:	$E(X) = O(X^{27/82+\epsilon})$,
Chih, 1950 / Richert, 1953:	$E(X) = O(X^{15/46+\epsilon})$,
Kolesnik, 1969:	$E(X) = O(X^{12/37+\epsilon})$,
Kolesnik, 1973:	$E(X) = O(X^{346/1067+\epsilon})$,
Kolesnik, 1982:	$E(X) = O(X^{35/108+\epsilon})$,
Iwaniec and Mozzochi, 1988:	$E(X) = O(X^{7/22+\epsilon})$,
Huxley, 2003:	$E(X) = O(X^{131/416+\epsilon})$.

一方Hardyは1917年に $c > 0$ が小さいとき $E(X) > cX^{1/4}$ となる X でいくらでも大きいものが存在し、$E(X) < -cX^{1/4}$ となる X でいくらでも大きいものが存在することを証明している。$\epsilon > 0$ のとき $E(X) = O(X^{1/4+\epsilon})$ と予想されているが、これはいまだに解決されていない。

4 Mertensの定理

まず、n の階乗 $n!$ がどのように素因数分解されるか考える。$v_p(N)$ を、整数 N が素数 p で割り切れる回数とすると

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k) = \sum_f f \times \#\{1 \leq k \leq n, p^f \mid\mid n\}$$

となるが、

$$v_p(n!) = \sum_f \#\{1 \leq k \leq n, p^f \mid n\} = \sum_{f=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{p^f} \right\rfloor$$

となるから、

$$v_p(n!) < \sum_{f=1}^{\infty} \frac{n}{p^f} = \frac{n}{p-1} \tag{12}$$

かつ

$$v_p(n!) \geq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor > \frac{n}{p} - 1 \tag{13}$$

となる。

$$\log(n!) = \sum_{k \leq n} \log k = n \log n - \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t} dt$$

となるので

$$n \log n - n + 1 - \log n < \log(n!) < n \log n - n + 1$$

が成り立つ。より精密に Stirling の公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

が成り立つ。具体的には

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n+1)} < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n)}$$

となることが知られている (Robbins, 1955)。

$n!$ の素因数はすべて p 以下だから、

$$\sum_{p \leq n} \frac{n}{p-1} \log p > \sum_{p \leq n} v_p(n!) \log p = \log(n!)$$

となるので、(12) より

$$\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p-1} > \log n - 1 - \frac{\log n}{n}$$

となることがわかる。これは、素数が無限に多く存在することの別証明を与えている。

$\pi(x)$ を x 以下の素数の個数とする。素数の個数は無限であるから

$$\lim_{x \to +\infty} \pi(x) = +\infty$$

である。より正確に**素数定理** (*prime number theorem*)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

が成り立つことが知られている。

$$\theta(x) = \sum_{p \le x} \log p$$

で定義される関数を **Chebyshev 関数** (*Chebyshev function*) という。

定理 4. 任意の整数 $m \ge 1$ について

$$\theta(2m+1) - \theta(m+1) < 2m \log 2 \tag{14}$$

が成り立つ。

Proof. M を二項係数

$$M = \binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$$

とする。$m+1 < p \le 2m+1$ のとき、p は $(2m+1)!$ を割り切るが $m!, (m+1)!$ を割り切らないから p は M を割り切る。よって素数の積 $\prod_{m+1<p\le 2m+1} p$ も M を割り切るので

$$\prod_{m+1<p\le 2m+1} p \le M$$

となり

$$\theta(2m+1) - \theta(m+1) = \sum_{m+1<p\le 2m+1} \log p \le \log M$$

が成り立つ。

$$M = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$$

なので

$$2M = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} < \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$$

であるから $M < 2^{2m}$ となり

$$\theta(2m+1) - \theta(m+1) \le \log M < 2m \log 2$$

となることがわかる。 □

定理 5. 任意の整数 $n \ge 1$ について

$$\theta(n) < 2n \log 2 \tag{15}$$

が成り立つ。また実数 $x \ge 2$ について

$$\pi(x) < \frac{Cx}{\log x} \tag{16}$$

となる定数 C が存在する。

Proof. まず (15) を帰納法により示す。$n=1$ のときは $\theta(1)=0$, $n=2$ のときは $\theta(2)=\log 2$ だから、(15) は成り立つ。$1\le n\le k-1$ のとき、(5) が成り立つとする。$n=k=2m+1$ が奇数のとき、定理 4 より

$$\theta(2m+1)<\theta(m+1)+2m\log 2$$

なので、帰納法の仮定から

$$\theta(2m+1)<2(m+1)\log 2+2m\log 2=2(2m+1)\log 2$$

となり、(12) は成り立つ。$n=k=2m\ge 4$ が偶数のとき、k は素数ではないので

$$\theta(2m)=\theta(2m-1)<2(2m-1)\log 2<4m\log 2$$

となり、(12) は成り立つ。よって帰納法より (15) は任意の整数 $n\ge 1$ について成り立つ。

つぎに (16) を示す。 $x\ge 2$ について、$\delta=\log\log x/\log x$ とおくと

$$\begin{aligned}\pi(x)&\le x^{1-\delta}+\sum_{x^{1-\delta}<p\le x}1\le x^{1-\delta}+\frac{\theta(x)}{(1-\delta)\log x}\\&<\frac{x}{\log x}+\frac{2x\log 2}{\left(1-\frac{\log\log x}{\log x}\right)\log x}\\&<\frac{Cx}{\log x}\end{aligned}$$

となる定数 C がとれるので (16) が成り立つ。 □

さらに $n\ge 2$ のとき $\theta(n)>An$ となる正の定数 A が存在することも二項係数の素因数分解を利用して示すことができるが、やや難しい。結局 $n\ge 2$ のとき

$$An<\theta(n)<Bn$$

となる正の定数 A,B が存在するわけだが、このことは Chebyshev が証明し、後に Erdös が二項係数の素因数分解を利用した簡単な証明を与えた。実際には

$$\theta(n)/n\to 1$$

となることが知られている（これは素数定理と本質的に同値である）。

さて、定理 5から、素数を含む和について次のような近似式が得られる。

定理 6. 任意の実数 $x\ge 1$ について

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1),\tag{17}$$

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log\log x + b + O\left(\frac{1}{\log x}\right), \tag{18}$$

が成り立ち、また

$$\prod_{p \le n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{C_0}{\log n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) \tag{19}$$

となる定数 $C_0 > 0$ が存在する。

これらの不等式を順に Mertens の第一定理から第三定理とよぶ。

第一定理の証明. 先に見たことから、

$$\sum_{p \le n} \frac{\log p}{p-1} > \log n - C_{1,1}$$

となる定数 $C'_{1,1}$ が存在する。一方、すべての素数にわたる和

$$C_{1,2} = \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)}$$

は収束する。よって

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} > \log\lfloor x\rfloor - C_{1,1} - C_{1,2}$$

となるが、$x \ge 1$ のとき

$$\log\lfloor x\rfloor > \log(x/2) > \log x - \log 2$$

となるから、

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} > \log x - C_1$$

が成り立つ。

また

$$\begin{aligned}
\log n! &= \sum_{p} v_p(n!) \log p \\
&> \sum_{p \le n} \log p \left(\frac{n}{p} - 1\right) \\
&= \sum_{p \le n} \frac{n \log p}{p} - \theta(n)
\end{aligned}$$

となるから定理5より

$$\log n! > \sum_{p\leq n} \frac{n\log p}{p} - 2n\log 2$$

が成り立つ。一方で

$$\log n! < n\log n - n + \log n$$

となるから

$$\sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} < \frac{1}{n}\log(n!) + 2\log 2 < \log n + C_2$$

となる定数 C_2 が存在する。 □

第二定理の証明.

$$S(x) = \sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p}, E(x) = S(x) - \log x$$

とおくと第一定理より $E(x) = O(1)$ であることがわかる。よって積分

$$\int_2^x \frac{E(t)dt}{t\log^2 t}$$

は $x \to \infty$ のとき収束するので、Abelの総和法より

$$\begin{aligned}
\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} &= \frac{S(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{S(t)}{t\log^2 t}dt \\
&= 1 + \frac{E(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{t\log t} + \int_2^x \frac{E(t)dt}{t\log^2 t} \\
&= 1 + \log\log x - \log\log 2 + \frac{E(x)}{\log x} + \int_2^\infty \frac{E(t)dt}{t\log^2 t} - \int_x^\infty \frac{E(t)dt}{t\log^2 t}
\end{aligned}$$

となるので

$$b = 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{Edt}{t\log^2 t}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} &= \log\log x + b + \frac{E(x)}{\log x} + O\left(\int_x^\infty \frac{dt}{t\log^2 t}\right) \\
&= \log\log x + b + O\left(\frac{1}{\log x}\right)
\end{aligned}$$

により、第二定理は成り立つ。 □

第三定理の証明.

$$\sum_{p\leq x} -\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} + \sum_{p\leq x}\sum_{m\geq 2} \frac{1}{mp^m}$$

および

$$\sum_{p>x}\sum_{m\ge 2}\frac{1}{mp^m}=O\left(\sum_{p>x}\frac{1}{p^2}\right)=O\left(\frac{1}{x}\right)$$

から、第二定理より

$$\sum_{p\le x}-\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=\log\log x+C_3+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

となる定数 C_3 が存在する。よって

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-C_3}}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)$$

となる。 □

なお

$$C_0=e^{-\gamma}=0.561459\cdots$$

となることが知られている。これも初等的に証明できるが、やや複雑な議論が必要となる。また

$$b=0.261497\cdots$$

を Mertens の定数という。さらに、第一定理より強く

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}-\log x=E=-1.33258\cdots \tag{20}$$

となることも知られている。

$\pi(x)$, $\theta(x)$ など素数に関する関数や和積について、つぎのような近似値が示されている。

Rosser and Schoenfeld, 1962 (*Ill. J. Math.* **6** (1962), 64–94):

$$\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{1}{2\log x}\right)<\pi(x)\ (x\ge 59),$$

$$\pi(x)<\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{3}{2\log x}\right)\ (x>1),$$

$$x\left(1-\frac{1}{2\log x}\right)<\theta(x)\ (x\ge 563),$$

$$\theta(x)<x\left(1+\frac{1}{2\log x}\right)\ (x>1).$$

$$\log x-E-\frac{1}{2\log x}<\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}\ (x>1),$$

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} < \log x - E + \frac{1}{2\log x} \ (x \ge 319),$$

$$\log\log x + b - \frac{1}{2\log^2 x} < \sum_{p \le x} \frac{1}{p} \ (x > 1),$$

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} < \log x - b + \frac{1}{2\log x} \ (x \ge 286),$$

$$\frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1 - \frac{1}{2\log^2 x}\right) < \prod_{p \le x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \ (x \ge 285),$$

$$\prod_{p \le x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1 + \frac{1}{2\log^2 x}\right) \ (x > 1),$$

$$e^{-\gamma}\log x\left(1 - \frac{1}{2\log^2 x}\right) < \prod_{p \le x}\frac{p}{p-1} \ (x > 1),$$

$$\prod_{p \le x}\frac{p}{p-1} < e^{-\gamma}\log\left(1 + \frac{1}{2\log^2 x}\right) \ (x \ge 286),$$

Broadbent, Kadiri, Lumley, Ng and Wilk, 2021 (*Math. Comp.* **90** (2021), 2281–2315):

$$|\theta(x)-x|<\frac{0.055316x}{\log x}\ (x\ge 10^5),$$

$$|\theta(x)-x|<\frac{4.4627\times 10^{-9}x}{\log x}\ (x\ge e^{60}),$$

$$|\theta(x)-x|<\frac{0.64673x}{\log^2 x}\ (x\ge 10^5),$$

$$|\theta(x)-x|<\frac{1.0376\times 10^{-5}x}{\log^2 x}\ (x\ge e^{60}),$$

Dusart, 2018 (*Ramanujan J.* **45** (2018), 227–251): （上記BKLNW, 2021によれば証明に誤りがあるらしい）

$$\pi(x)=\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{1}{\log x}+\frac{2}{\log^2 x}+O^*\left(\frac{7.32}{\log^3 x}\right)\right)\ (x\ge 4\times 10^9),$$

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}=\log x-E+O^*\left(\frac{0.3}{\log^2 x}\right)\ (x\ge 912560),$$

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log\log x+b+O^*\left(\frac{1}{5\log^3 x}\right)\ (x\ge 2278383),$$

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1+O^*\left(\frac{1}{5\log^3 x}\right)\right)\ (x\ge 2278382),$$

$$\prod_{p\le x}\frac{p}{p-1}=e^{\gamma}\log x\left(1+O^*\left(\frac{1}{5\log^3 x}\right)\right)\ (x\ge 2278382).$$

これらの近似式はζ関数（次の節で紹介する）の零点に関する結果を用いたもので、複素関数論と複雑な計算を必要とする。

一方、初等的なMertensの定理から、$\omega(n)$, $\Omega(n)$の総和について、つぎのような近似式がえられる。

定理 7. $x\ge 2$のとき

$$\sum_{n\le x}\omega(n)=x(\log\log x+b)+O\left(\frac{x}{\log x}\right) \tag{21}$$

が成り立ち、さらに

$$\sum_{n\le x}\Omega(n)=x(\log\log x+C_4)+O\left(\frac{x}{\log x}\right) \tag{22}$$

が成り立つ定数$C_4=1.03465\cdots$が存在する。

それで、n が x に近いとき、n の素因数の個数の平均値は概ね $\log\log x$ に等しいということができる。

Proof.

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\omega(n) &= \sum_{n\le x}\sum_{p\mid n}1 = \sum_{p}\sum_{n\le x, p\mid n}1\\ &= \sum_{p}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\end{aligned}$$

となるので、Mertens の第二定理から

$$\sum_{n\le x}\omega(n) \le \sum_{p\le x}\frac{x}{p} < x(\log\log x + b) + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \tag{23}$$

となる。また

$$\sum_{n\le x}\omega(n) > \sum_{p\le x}\left(\frac{x}{p}-1\right) > x(\log\log x + b) + O\left(\frac{x}{\log x}\right) - \pi(x)$$

となるが定理 5 より $\pi(x) = O(x/\log x)$ なので

$$\sum_{n\le x}\omega(n) > x(\log\log x + b) + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \tag{24}$$

となる。(23), (24) より (21) が成り立つ。

つぎに $\Omega(n)$ の和であるが、$n = p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ と素因数分解されるとき

$$e_i = \sum_{1\le m\le e_i}1 = \sum_{p^m\mid n}1$$

となるので

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\Omega(n) &= \sum_{n\le x}\sum_{p^m\mid n}1 = \sum_{p}^{m}\sum_{n\le x, p^m\mid n}1\\ &= \sum_{p^m}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor \\ &= \sum_{p}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor + \sum_{p\le\sqrt{x}}\sum_{m\ge 2}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor\end{aligned} \tag{25}$$

となる。最後の和は $m \le \log x/\log p$ のときのみ 0 でない値をとるから

$$\begin{aligned}\sum_{p\le\sqrt{x}}\sum_{m\ge 2}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor &= \sum_{p\le\sqrt{x}}\sum_{2\le m\le \log x/\log p}\left(\frac{x}{p^m}+O^*(1)\right)\\ &= \sum_{p\le\sqrt{x}}\left(\sum_{m}\frac{x}{p^m}-\sum_{m>\log x/\log p}\frac{x}{p^m}+O(\log x)\right)\\ &= \sum_{p\le\sqrt{x}}\left(\frac{x}{p(p-1)}+O(\log x)\right)\\ &= x\left(\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p(p-1)}\right)+O(x^{1/2}\log x)\end{aligned} \tag{26}$$

となる。

$$C_4' = \sum_p \frac{1}{p(p-1)} = 0.773156\cdots$$

とおくと

$$\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p(p-1)} = C_4' - \sum_{p>\sqrt{x}}\frac{1}{p(p-1)}$$

となるが

$$0 < \sum_{p>\sqrt{x}}\frac{1}{p(p-1)} < \sum_{n>\sqrt{x}}\frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

となるから (26) より

$$\sum_{p\le\sqrt{x}}\sum_{m\ge 2}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor = C_4'x + O(x^{1/2}\log x)$$

となる。$C_4 = b + C_4'$ とおくと (21) より

$$\sum_{n\le x}\Omega(n) = x(\log\log x + C_4) + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

となって (22) が成り立つ。 □

5 乗法的関数

数論的関数 $f(n)$ が乗法的であるとは、$\gcd(a,b)=1$ のとき $f(ab)=f(a)f(b)$ となることをいう。それで、$\sigma(n), \varphi(n)$ は乗法的関数である。また $\mu(n)$ も乗法的関数である。

定理 8. $f(n)$ が乗法的関数のとき、$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ について

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{i=1}^{r} (f(1) + f(p_i) + \cdots + f(p_i^{e_i}).$$

Proof. $r = 1$ のときは明らかなので、r に関する帰納法で示す。$r = s$ のとき定理が正しいとして、$M = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, $n = Mp_{s+1}^{e_{s+1}}$ とおくと

$$\sum_{d|n} f(d) = (f(1) + f(p_{s+1}) + \cdots + f(p_{s+1}^{e_{s+1}})) \sum_{d|M} f(d) = \prod_{i=1}^{s+1} (f(1) + f(p_i) + \cdots + f(p_i^{e_i})$$

となるから、$r = s + 1$ のときも定理が正しい。よって、r に関する帰納法で定理が示された。 □

例 3. $f(n) = n$ は乗法的関数であるから、$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ について

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \prod_{i=1}^{r} (1 + p_i + \cdots + p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

となる。

例 4. $\mu(n)$ は乗法的関数で、$e \geq 2$ のとき $\mu(p^e) = 0$ だから、$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} \geq 2$ について

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \prod_{i=1}^{r} (1 + \mu(p_i)) = 0$$

となる。一方、

$$\sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1$$

となる。よって $\sum_{d|n} \mu(d)$ は $n = 1$ のとき 1 となり、それ以外の正の整数で 0 となる。

例 5. $\mu(n)/n$ は乗法的関数である。$\mu(p) = -1$ だが $e \geq 2$ のとき $\mu(p^e) = 0$ だから

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

となる。

例*4*で述べたことから

$$\varphi(n) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{d|\gcd(m,n)} \mu(d)$$

となるが、

$$1 \leq m \leq n, d \mid \gcd(m,n) \iff d \mid n, 1 \leq m \leq n, d \mid m$$

であるから

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{1\le m\le n,d|m}1=n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

となって、定理 *1*の別証明が得られる。

一般的に、乗法的関数の無限和について、つぎの事実が知られている。

定理 9. $f(n)$ が乗法的関数で、$\sum_n f(n)$ が絶対収束するとき、すべての素数に関する積

$$\prod_p(1+f(p)+f(p^2)+\cdots)$$

は収束し、$\sum_n f(n)$ に一致する。とくに $f(n)$ が完全乗法的ならば

$$\sum_n f(n)=\prod_p\frac{1}{1-f(p)}$$

となる。

この右辺の積を **Euler 積** (*Euler product*) という。

Proof. 各素数 p について

$$1+f(p)+f(p^2)+\cdots$$

は絶対収束する。実際、整数 $e\ge 1$ について

$$\left|\sum_{f\ge e}f(p^f)\right|\le\sum_{f\ge e}\left|f(p^f)\right|\le\sum_{n\ge p^e}|f(n)|$$

となり、$e\to\infty$ のとき、右辺は 0 に収束する。

$$P(x)=\prod_{p\le x}(1+f(p)+f(p^2)+\cdots)$$

とおく。また、x 以下の素数を $p_1,\ldots,p_r$ とおいて、

$$Q(x,y)=\sum_{p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}\le y}f(p_1^{e_1})f(p_2^{e_2})\cdots f(p_r^{e_r})$$

とおく。先に記したことから $1\le i\le r$ について $1+f(p_i)+f(p_i^2)+\cdots$ は絶対収束するので

$$\lim_{y\to+\infty}Q(x,y)=P(x)\tag{27}$$

となる。

$A(x,y)=\{n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}\le y\}$ とおくと、

$$Q(x,y)=\sum_{p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}\le y} f(p_1^{e_1})f(p_2^{e_2})\cdots f(p_r^{e_r})=\sum_{p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}\le y} f(p_1^{e_1}p_2^{e_2}p_r^{e_r})=\sum_{n\in A(x,y)} f(n)$$

となる。$y\ge x$ のとき $A(x,y)$ は x 以下の整数をすべて含んでいるから $S=\sum_n f(n)$ とおくと

$$|S-Q(x,y)|\le\sum_{n\notin A(x,y)}|f(n)|\le\sum_{n>x}|f(n)|$$

となる。(27) より

$$|S-P(x)|\le\sum_{n>x}|f(n)|$$

となるが、$\sum_n f(n)$ は絶対収束するから、右辺は 0 に収束する。つまり $P(x)$ は $S=\sum_n f(n)$ に収束する。 □

例 6.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

で定義される級数は $s>1$ で収束し、

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

となる。積は全ての素数にわたる。また

$$M(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$$

で定義される級数も $s>1$ で収束し、

$$M(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s)}$$

となる。やはり積は全ての素数にわたる。

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

となることが知られており、より一般に $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ は有理数となることが知られているが、この証明はやや難しい。これを用いると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}$$

となることがわかる。

例 7. $Q(x)$ を、x 以下の平方因数をもたない整数の個数とすると、

$$Q(x) = \sum_{n \le x} \sum_{d^2 | n} \mu(d) = \sum_{d} \mu(d) \sum_{d^2 | n, n \le x} 1 = \sum_{d} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d^2} \right\rfloor$$

となる。最後の和の各項の絶対値は 1 より小さいから

$$\begin{aligned} Q(x) =& \sum_{d} \mu(d) \frac{x}{d^2} - \sum_{d > \sqrt{x}} \mu(d) \frac{x}{d^2} - O^* \left(\sum_{d \le \sqrt{x}} 1 \right) \\ =& \sum_{d} \mu(d) \frac{x}{d^2} + O^* \left(x \sum_{d > \sqrt{x}} \frac{1}{d^2} + \sqrt{x} \right) \\ =& x \sum_{d} \frac{\mu(d)}{d^2} + O^*(2\sqrt{x} + 1) \\ =& \frac{6}{\pi^2} x + O^*(2\sqrt{x} + 1) \end{aligned}$$

となる。

一般的に、A が整数からなる集合で、平方因数をもたない整数 $d \ge 1$ について A_d が A の部分集合で、$A_{mn} = A_m \cap A_n$ が成り立つとき、A の要素のうち、A_1 以外のどの A_d にも属さないもの全体の集合を S とおくと

$$\#S = \sum_{d} \mu(d) \# A_d$$

となる（包含と除去の原理）。

この原理は、与えられた整数の集合のうち素数などの特殊な性質をもった数の個数を数える篩の理論の基礎をなすものである。この形のままでは素数の個数についてはあまり良い結果は得られないが、その変形と、素数の分布に関する他の結果を組み合わせることで様々な結果が得られる。A_d は d の倍数（あるいは d で割った余りが与えられた数となるもの）の集合とすることが多いが、上記の例では A_d を d^2 の倍数からとっている。このような形での篩の議論は平方因数をもたない整数の個数を数えるのに役に立つが、近年では概均質ベクトル空間の理論と組み合わせることで、代数体の個数を数えることなどにも応用されている。

6 $\sigma(n)$, $\varphi(n)$ の平均値

定理 10.

$$\sum_{n \le x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O^* \left(\frac{x(\log x + \gamma + 1) + 2}{2} \right).$$

Proof.

$$\sum_{n\le x}\sigma(n)=\sum_{(d,n):n\le x,d|n}d=\sum_{(d,m):dm\le x}d=\sum_{m=1}^{x}\sum_{d\le x/m}d=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{x}\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor+1\right)$$

となる。

$$z(z-1)<\lfloor z\rfloor(\lfloor z\rfloor+1)\le z(z+1)$$

より $\lfloor z\rfloor(\lfloor z\rfloor+1)=z^2+O^*(z)$ となるから

$$\sum_{n\le x}\sigma(x)=\frac{x^2}{2}\sum_{m=1}^{x}\frac{1}{m^2}+O^*\left(\frac{x}{2}\sum_{m=1}^{x}\frac{1}{m}\right)$$

となるが、$\sum_{m>x}m^{-2}<x^{-1}+x^{-2}$ なので

$$\sum_{n\le x}\sigma(x)=\frac{\zeta(2)x^2}{2}+O^*\left(\frac{x+1}{2}+\frac{x(\log x+\gamma)+1}{2}\right)$$

となる。 □

定理 11.

$$\sum_{n\le x}\varphi(x)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O^*\left(\frac{x(\log x+\gamma+1)+2}{2}\right).$$

Proof. 例 5より $\varphi(n)=\sum_{m|n}\mu(m)\frac{n}{m}$ となるから

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\varphi(n)&=\sum_{(m,n):n\le x,m|n}\mu(m)\frac{n}{m}=\sum_{(d,m):dm\le x}\mu(m)d=\sum_{m=1}^{x}\mu(m)\sum_{d\le x/m}d\\&=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{x}\mu(m)\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor+1\right)\end{aligned}$$

となる。

$$\sum_{n\le x}\sigma(x)=\frac{x^2}{2}\sum_{m=1}^{x}\frac{\mu(m)}{m^2}+O^*\left(\frac{x}{2}\sum_{m=1}^{x}\frac{1}{m}\right)$$

となるが、$\sum_{m>x}m^{-2}<x^{-1}+x^{-2}$ なので

$$\sum_{n\le x}\sigma(x)=\frac{x^2}{2}\sum_{m}\frac{\mu(m)}{m^2}+O^*\left(\frac{x+1}{2}+\frac{x(\log x+\gamma)+1}{2}\right)$$

となる。例より

$$\sum_{n\le x}\sigma(x)=\frac{3x^2}{\pi^2}+O^*\left(\frac{x+1}{2}+\frac{x(\log x+\gamma)+1}{2}\right)$$

となる。 □

このことは $1 \leq m \leq n \leq x$ となる整数の組 (m,n) のうち、互いに素であるものの個数はほぼ $\dfrac{3}{\pi^2}x^2$ となることを意味する。よって $1 \leq m,n \leq x$ となる整数の組 (m,n) のうち、互いに素であるものの個数はほぼ $\dfrac{6}{\pi^2}x^2$ となる。つまり、与えられた 2 つの数が互いに素である確率はほぼ $\dfrac{6}{\pi^2}$ に一致すると考えることができる。

定理 12.

$$C_5 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1.9435964\cdots$$

とおくと $x > 1$ のとき

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} < C_5 \left(\log x + \gamma + \frac{1}{x}\right).$$

Proof. $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ と素因数分解であらわされているとき $n^* = \prod_{i=1}^r p_i$ を、n の相異なる素因数を 1 回ずつかけた積とする。

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \cdots\right) = \sum_{f_1,\ldots,f_r \geq 0} \frac{1}{p_1^{f_1} \cdots p_r^{f_r}}$$

となるが、右辺は $p_1, \ldots, p_r$ のみを素因数にもつ（これらの素数すべてを素因数にもつ必要はない）数の逆数全体の和だから

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d : d^* | n} \frac{1}{d}$$

とあらわせる。よって

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \sum_{d : d^* | n} \frac{1}{d} = \sum_{d} \frac{1}{d} \sum_{n : n \leq x, d^* | n} \frac{1}{n}$$

となる。

$$\sum_{n : n \leq x, d^* | n} \frac{1}{n} = \frac{1}{d^*} \sum_{m \leq x/d^*} \frac{1}{m} \leq \frac{1}{d^*} \sum_{m \leq x} \frac{1}{m}$$

なので

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} < \sum_{d} \frac{1}{dd^*} \left(\log x + \gamma + \frac{1}{x}\right) \tag{28}$$

となる。$f(n) = nn^*$ とおくと、$f(n)$ は乗法的関数で $f(p^e) = p^{e+1}$ となるので、Euler 積により

$$\sum_{d} \frac{1}{dd^*} = \prod_{p} \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots\right) = \prod_{p} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right)$$

となる。

$$1+\frac{1}{p(p-1)}=\frac{p^2-p+1}{p(p-1)}=\frac{p^6-1}{(p^3-1)(p+1)p(p-1)}=\frac{p^6-1}{p^6}\times\frac{p^3}{p^3-1}\times\frac{p^2}{p^2-1}$$

より

$$\sum_d \frac{1}{dd^*}=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}=C_5$$

となるから、(28) に代入して定理が成り立つ。 □

定理 13.

$$C_5(x-\log x-3)<\sum_{n\le x}\frac{n}{\varphi(n)}<C_5x.$$

Proof.

$$\frac{n}{\varphi(n)}=\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)=\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{\varphi(p)}\right)=\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$$

だから

$$\sum_{n\le x}\frac{n}{\varphi(n)}=\sum_{n\le x}\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}=\sum_d\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor \tag{29}$$

となる。よって

$$\sum_{n\le x}\frac{n}{\varphi(n)}<x\sum_d\frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)}$$

となるが、$f(d)=\mu^2(d)/(d\varphi(d))$ とおくと、$f(p)=1/p(p-1)$ かつ $e\ge 2$ のとき $f(p^e)=0$ なので Euler 積をとると

$$\sum_d\frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right)=C_5$$

となるから、

$$\sum_{n\le x}\frac{n}{\varphi(n)}<C_5x \tag{30}$$

が成り立つ。

一方、

$$\sum_{n\le x}\frac{n}{\varphi(n)}>\sum_{d\le x}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}\left(\frac{x}{d}-1\right)>x\left(\sum_d\frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)}-\sum_{d>x}\frac{1}{d\varphi(d)}\right)-\sum_{d\le x}\frac{1}{\varphi(d)}$$

となるが、先の定理より

$$\sum_{d\le x}\frac{1}{\varphi(d)}<C_5(1+\log x) \tag{31}$$

となる。さらに $A(x) = \sum_{n \le x} n/\varphi(n)$ とおくと、今しがた示したことから $A(x) < C_5 x$ なので Abel の総和公式と (30) から

$$\sum_{d>x} \frac{1}{d\varphi(d)} < \int_x^\infty \frac{2A(t)}{t^3} dt < \frac{2C_5}{x} \tag{32}$$

となる。(31), (32) を (29) に挿入して

$$\sum_{n \le x} \frac{n}{\varphi(n)} > C_5(x - \log x - 3)$$

となるから、定理が成り立つ。 □

定理 11 から $\varphi(n)/n$ の期待値は $6/\pi^2 = 0.607927\cdots$ となる一方、定理 13 から $n/\varphi(n)$ の期待値は $C_5 = 1.9435964\cdot$ となることがわかる。

$\sigma(n)/n$, $n/\varphi(n)$ の比については、Rosser and Schoenfeld, 1962 (*Ill. J. Math.* **6** (1962), 64–94):

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{n}{\varphi(n)} < e^\gamma \log\log n + \frac{5}{2\log\log n} \ (n \ge 3, n \ne 223092870),$$

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{n}{\varphi(n)} < e^\gamma \log\log n + \frac{2.50637}{\log\log n} \ (n = 223092870).$$

となることが知られている。なお、$n > 5040$ のとき

$$\frac{\sigma(n)}{n} < e^\gamma \log\log n$$

となると予想されているが、実はこれは Riemann 予想と同値の未解決問題である (Robin, 1984)。

一方 $n \ge 19$ で $\varphi(n)$ が $n-1$ を割り切るとき $n = k\varphi(n) + 1$ とおくと

$$k < 15.76515 \log\log\log n$$

となる (Y, 2023, arXiv2023.16853)。

参考文献

[1] D. Berkane, O. Bordellès, and O. Ramaré, Explicit upper bounds for the remainder terms in the divisor problem, *Math. Comp.* **81** (2012), 1025–1051.

[2] Samuel Broadbent, Habiba Kadiri, Allysa Lumley, Nathan Ng, and Kirsten Wilk, Sharper bounds for the Chebyshev function $\theta(x)$, *Math. Comp.* **90** (2021), 2281–2315.

[3] Chih, Tsung-Tao, A divisor problem, *Acad. Sinica Sci. Rec.* **3** (1950) 177–182.

[4] Henri Cohen, Francois Dress and Mohamed El Marraki, Explicit estimates for summatory functions linked to the Möbius μ-function, *Funct. Approx. Comm. Math.* **37** (2007), 51–63.

[5] J. G. van der Corput, Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem, *Math. Ann.* **87** (1922), 39–65.

[6] J. G. van der Corput, Zum Teilerproblem, *Math. Ann.* **98** (1928), 697–716.

[7] Pierre Dusart, Explicit estimates of some functions over primes, *Ramanujan J.* **45** (2018), 227–251.

[8] G. H. Hardy, On Dirichlet's divisor problem, *Proc. London Math. Soc.* **15** (1917), 1–25.

[9] M. N. Huxley, Exponential sums and lattice points III, *Proc. London Math. Soc.* **87** (2003), 591–609.

[10] H. Iwaniec and C. J. Mozzochi, On the divisor and circle problems, *J. Number Theory* **29** (1988), 60–93.

[11] G. Kolesnik, The improvement of the error term in the divisor problem (Russian), *Mat. Zametki* **6** (1969), 545–554.

[12] G. Kolesnik, On the estimation of certain trigonometric sums (Russian), *Acta Arith.* **25** (1973), 7–30.

[13] G. Kolesnik, On the order of $\zeta(1/2+it)$ and $\Delta(R)$, *Pacific J. Math.* **98** (1982), 107–122.

[14] H.-E. Richert, Verschärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem, *Math. Z.* **58** (1953), 204–218.

[15] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.* **6** (1962), 64–94.

[16] H. Robbins, A remark on Stirling's formula, *Amer. Math. Monthly* **62** (1955), 26–29.

[17] Guy Robin, Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hyptheèse de Riemann, *J. Math. Pures Appl.* (9) **63** (1984), 187–213.

[18] Georges Voronoï, Probleme du calcul des fonctions asymptotiques, **J. reine Angew. Math. 126** (1903), 241–282. Ann. École Normale **21** (3) (1904), 207–268, 459–534.

[19] Georges Voronoï, Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries, *Ann. École Normale* **21** (3) (1904), 207–268, 459–534.

[20] Tomohiro Yamada, Quasiperfect numbers with the same exponent, *Integers* **19** (2019), #A35.

[21] Tomohiro Yamada, On the divisibility of odd perfect numbers, quasiperfect numbers and amicable numbers by a high power of a prime, *Integers* **20** (2020), #A91.