「数論的関数いろいろ紹介」補足ノート

Sep. 15. 2023 （Sep. 20. 2023 一部追加）

1　数論的関数

$$n = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \cdots \times p_r^{e_r} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$$

（p_i は相異なる素数）と素因数分解する

- $\gcd(m,n)$: m,n の最大公約数
- $d \mid n$: d は n の約数
- $\omega(n) = r$: n の相異なる素因数の個数
- $\Omega(n) = e_1 + \cdots + e_r$: n の重複も数えた素因数の個数
- $\tau(n) = \prod_i (e_i + 1)$: n の約数の個数
- $\sigma(n) = \displaystyle\prod_i \frac{p_i^{e_i} - 1}{p_i - 1}$: n の約数の総和
- $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i - 1}(p_i - 1)$: 1 から n までで n と互いに素な整数の個数
- $\mu(n)$: Möbius 関数
- $n^* = \prod_{i=1}^{r} p_i$: n の素因数の積

例 1.

$$N = 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

について、

$$\omega(N) = 3,\ \Omega(N) = 3 + 1 + 1 = 5,\ \tau(N) = 4 \times 2 \times 2 = 16$$

となり、

$$\sigma(N) = 15 \times 4 \times 6 = 360,\ \varphi(N) = 4 \times 2 \times 4 = 32$$

となる。

表 1: $\sigma(n) = kn$

k	#	n	OEIS
1	1	1	N/A
2	≥ 50	$6, 28, 496, 8128, 33550336, \ldots$	A000396
3	$\simeq 6$	$120, 672, 523776, 459818240, 1476304896, 51001180160$	A005820
4	$\simeq 36$	$30240, 32760, \ldots, 275502900594021408$	A027867
5	$\simeq 65$	$14182439040, 31998395520, \ldots,$	A046040
6	$\simeq 245$	$154345556085770649600, \ldots$	A046041
7	≈ 516	$1.413 \cdots \times 10^{56}, \ldots$	N/A
8	≥ 1134	$8.268 \cdots \times 10^{132}, \ldots$	N/A
9	≥ 2095	$5.603 \cdots \times 10^{286}, \ldots$	N/A
10	≥ 1164	$4.485 \cdots \times 10^{638}, \ldots$	N/A
11	≥ 1	$2.518 \cdots \times 10^{1906}$	N/A

- 完全数: $\sigma(n) = 2n$
- k-完全数: $\sigma(n) = kn$
- 倍積完全数: $n \mid \sigma(n)$

2018 年 10 月の「第 11 回すうがく徒のつどい」講演「初等整数論、初等幾何学、離散数学における未解決問題」も参照

2　Dirichlet の約数問題

$$\sum_{n \le X} \tau(n) = X(\log X + 2\gamma - 1) + E(X)$$

Voronoïは 1903 年に初等的だが巧妙で複雑な議論により

$$E(X) = \frac{1}{4} + O^*\left(\frac{X^{1/3}(65\log X + 237)}{36} + \frac{3}{2}\right) \tag{1}$$

となることを示した。

翌1904年にVoronoïは解析的な方法で新しい加法公式を示して、$E(X) = O(X^{1/3}\log X)$ となることを改めて証明している。その後、$E(X)$ について、次のことが示されている。

$$\begin{array}{cl}
\text{van der Corput, 1922:} & E(X) = O(X^{33/100+\epsilon}), \\
\text{van der Corput, 1928:} & E(X) = O(X^{27/82+\epsilon}), \\
\text{Chih, 1950 / Richert, 1953:} & E(X) = O(X^{15/46+\epsilon}), \\
\text{Kolesnik, 1969:} & E(X) = O(X^{12/37+\epsilon}), \\
\text{Kolesnik, 1969:} & E(X) = O(X^{346/1067+\epsilon}), \\
\text{Kolesnik, 1969:} & E(X) = O(X^{35/108+\epsilon}), \\
\text{Iwaniec and Mozzochi, 1988:} & E(X) = O(X^{7/22+\epsilon}), \\
\text{Huxley, 2003:} & E(X) = O(X^{131/416+\epsilon}).
\end{array}$$

一方 Hardy は 1916 年に $c > 0$ が小さいとき $E(X) > cX^{1/4}$ となる X でいくらでも大きいものが存在し、$E(X) < -cX^{1/4}$ となる X でいくらでも大きいものが存在することを証明している。$\epsilon > 0$ のとき $E(X) = O(X^{1/4+\epsilon})$ と予想されているが、これはいまだに解決されていない。

3　素数の分布

階乗の大きさについてはStirlingの公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

が成り立つ。具体的には

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n+1)} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n)}$$

となることが知られている (Robbins, 1955)。

$$\gamma = 0.577215\cdots,$$
$$b = 0.261497\cdots,$$
$$E = -1.33258\cdots$$

Rosser and Schoenfeld, 1962 (*Ill. J. Math.* **6** (1962), 64–94):

$$\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{1}{2\log x}\right) < \pi(x)\ (x \geq 59),$$

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x}\left(1+\frac{3}{2\log x}\right)\ (x > 1),$$

$$x\left(1-\frac{1}{2\log x}\right) < \theta(x)\ (x \geq 563),$$

$$\theta(x) < x\left(1+\frac{1}{2\log x}\right)\ (x > 1).$$

$$\log x - E - \frac{1}{2\log x} < \sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}\ (x > 1),$$

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} < \log x - E + \frac{1}{2\log x}\ (x \geq 319),$$

$$\log\log x + b - \frac{1}{2\log^2 x} < \sum_{p\leq x}\frac{1}{p}\ (x > 1),$$

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} < \log x - b + \frac{1}{2\log x}\ (x \geq 286),$$

$$\frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1-\frac{1}{2\log^2 x}\right) < \prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\ (x \geq 285),$$

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) < \frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1+\frac{1}{2\log^2 x}\right)\ (x > 1),$$

$$e^{-\gamma}\log x\left(1-\frac{1}{2\log^2 x}\right) < \prod_{p\leq x}\frac{p}{p-1}\ (x > 1),$$

$$\prod_{p\leq x}\frac{p}{p-1} < e^{-\gamma}\log\left(1+\frac{1}{2\log^2 x}\right)\ (x \geq 286),$$

Broadbent, Kadiri, Lumley, Ng and Wilk, 2021 (*Math. Comp.* **90** (2021), 2281–2315):

$$|\theta(x)-x| < \frac{0.055316x}{\log x} \ (x \geq 10^5),$$
$$|\theta(x)-x| < \frac{4.4627\times 10^{-9}x}{\log x} \ (x \geq e^{60}),$$
$$|\theta(x)-x| < \frac{0.64673x}{\log^2 x} \ (x \geq 10^5),$$
$$|\theta(x)-x| < \frac{1.0376\times 10^{-5}x}{\log^2 x} \ (x \geq e^{60}),$$

Dusart, 2018 (*Ramanujan J.* **45** (2018), 227–251): （上記 BKLNW, 2021 によれば証明に誤りがあるらしい）

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x}\left(1+\frac{1}{\log x}+\frac{2}{\log^2 x}+O^*\left(\frac{7.32}{\log^3 x}\right)\right) \ (x \geq 4\times 10^9),$$
$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} = \log x - E + O^*\left(\frac{0.3}{\log^2 x}\right) \ (x \geq 912560),$$
$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log\log x + b + O^*\left(\frac{1}{5\log^3 x}\right) \ (x \geq 2278383),$$
$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1+O^*\left(\frac{1}{5\log^3 x}\right)\right) \ (x \geq 2278382),$$
$$\prod_{p\leq x}\frac{p}{p-1} = e^{\gamma}\log x\left(1+O^*\left(\frac{1}{5\log^3 x}\right)\right) \ (x \geq 2278382).$$

Rosser and Schoenfeld, 1962 (*Ill. J. Math.* **6** (1962), 64–94):

$$\frac{n}{\varphi(n)} < e^{\gamma}\log\log n + \frac{5}{2\log\log n} \ (n \geq 3, n \neq 223092870),$$
$$\frac{n}{\varphi(n)} < e^{\gamma}\log\log n + \frac{2.50637}{\log\log n} \ (n = 223092870).$$

Y, 2023 (arXiv2023.16853): $n \geq 19$ で $n = k\varphi(n)+1$ となる整数 k が存在するとき

$$k < 15.76515\log\log\log n.$$

$Q(x)$: x 以下の平方因数をもたない整数の個数, $R(x) = Q(x) - \frac{6}{\pi^2}x$

Cohen, Dress and Marraki(*Func. Approx. Comm. Math.* **37** (2007), 51–63):

$$|R(x)| \leq 0.02767\sqrt{x} \ (x \geq 438653).$$