ポントリャーギン双対とフーリエ変換

ちょーさん

2023/9/16

位相群の定義

定義 1.1 (位相群)

G が群かつ位相空間で群の演算

- 積 $G \times G \to G$
- 逆元 $G \to G$

が連続のとき G を位相群という.

例 1.2

- 実直線 $\mathbb{R}$
- 複素平面 $\mathbb{C}$
- 円周 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

位相群の性質

命題 1.3

位相群の部分群は開集合ならば閉集合である．

命題 1.4

G を位相群とする．部分群 H について

(1) H が閉 $\Leftrightarrow$ G/H がハウスドルフ

(2) H が開 $\Leftrightarrow$ G/H が離散

位相群の性質

命題 1.5

G を位相群とする．点 $a \in G$ と部分集合 $A \subset G$ に対し次は同値.

(1) a が A の内点

(2) ある単位元近傍 N があって $aN \subset A$

命題 1.6

G を位相群とする．単位元 $e \in G$ の近傍系 $\mathcal{N}(e)$ は以下を満たす.

(1) $\forall N \in \mathcal{N}(e) \quad e \in N$

(2) $\forall N \in \mathcal{N}(e) \quad N^{-1} \in \mathcal{N}(e)$

(3) $\forall N \in \mathcal{N}(e)\ \exists M \in \mathcal{N}(e) \quad M^2 \subset N$

位相群の性質

これらの命題から距離空間と類似の議論ができる.

定理 1.7

位相群において T_0, T_1, ハウスドルフは同値.

Proof) $T_0 \Rightarrow$ ハウスドルフを示せばよい. 位相群 G 上で $x \neq y$ とする. G が T_0 ならば $x \in U, y \notin U$ なる開集合 U が存在するとしてよい. すると前命題よりある単位元開近傍 V があって $xV^2 \subset U$ となる. このとき xV と yV^{-1} は交わらない開集合で x と y を分離する. □

注意

実は完全正則まで同値になることが知られている.

位相群の射

位相群の間の射としては連続準同型を考える．

定理 1.8 (準同型定理)

$f\colon G \to G'$ を位相群の間の連続準同型とするとき，全単射連続準同型 $\bar{f}\colon G/\mathrm{Ker}\ f \to \mathrm{Im}\ f$ が誘導される．

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G' \\ G/\mathrm{Ker}\ f \arrow[r, dashed, "\bar{f}"'] & \mathrm{Im}\ f \arrow[u] \end{tikzcd}$$

さらに f が開写像ならば $\bar{f}$ は同相写像である．

位相群の射

定理 1.9 (ハウスドルフ化)

G を位相群とする．このときあるハウスドルフ位相群 $\tilde{G}$ と連続準同型 $\pi\colon G \to \tilde{G}$ が存在して，G から任意のハウスドルフ位相群への任意の連続準同型は $\tilde{G}$ を通して一意に分解する．

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ \tilde{G} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

定理 1.10 (開写像定理)

G を局所コンパクト σ-コンパクト位相群，G' を局所コンパクトハウスドルフ位相群とする．このとき連続準同型 $f\colon G \to G'$ は全射ならば開写像である．

一様連続性

定義 1.11 (一様連続)

G, G' を位相群とする．写像 $f\colon G \to G'$ について

$$\forall U \in \mathcal{N}_{G'}(e)\ \exists V \in \mathcal{N}_G(e)\ \forall x, y \in G\ xy^{-1} \in V \Rightarrow f(x)f(y)^{-1} \in U$$

が成り立つとき f は一様連続であるという．

命題 1.12

(1) 一様連続写像は連続写像である．
(2) コンパクト位相群上の連続写像は一様連続である．
(3) 連続準同型は一様連続である．

指標群

定義 2.1 (指標群)

G を位相群とする．S^1 への連続準同型 $\chi\colon G \to S^1$ を G の指標といい，指標全体の集合

$$\hat{G} = \{\chi\colon G \to S^1 \mid \text{連続準同型}\}$$

を G の指標群という．

指標群は点ごとの演算とコンパクト開位相によって位相群となる．

命題 2.2

G を位相群とする．写像 $\omega\colon G \to \hat{\hat{G}}$ を以下のように定める．

$$\omega(x)(\alpha) = \alpha(x)$$

このとき ω は連続準同型である．

考えている群を強調して ω を ω_G と書くこともある．

Pontrjagin 双対

位相群 G の指標群 $\hat{G}$ について以下が成り立つ．

- G: 局所コンパクト $\Rightarrow \hat{G}$: 局所コンパクト
- $\hat{G}$ は常にハウスドルフかつアーベル群

実は逆にこのような位相群は指標群により復元可能である．

定理 2.3 (Pontrjagin 双対)

G を局所コンパクトハウスドルフアーベル位相群とする．このとき写像 $\omega\colon G \to \hat{\hat{G}}$ は同相同型写像である．とくに

$$G \cong \hat{\hat{G}}$$

Pontrjagin 双対

局所コンパクトハウスドルフアーベル位相群と連続準同型の圏 $\mathbf{LCA}$ を考える．局所コンパクトハウスドルフアーベル位相群 G の指標群は以下のように書ける．

$$\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, S^1)$$

よって指標群の構成は反変関手 $\mathbf{LCA} \to \mathbf{LCA}^{\mathrm{op}}$ を与える．このとき Pontrjagin 双対定理は以下のように書きなおせる．

定理 2.4 (Pontrjagin 双対)

指標群の構成は以下の圏同値を与える．

$$\mathbf{LCA} \simeq \mathbf{LCA}^{\mathrm{op}}$$

Pontrjagin 双対

Pontrjagin 双対の特殊な場合としてコンパクト-離散双対が知られている.

命題 2.5

位相群 G の指標群 $\hat{G}$ について以下が成り立つ.

- G: コンパクト $\Rightarrow \hat{G}$: 離散
- G: 離散 $\Rightarrow \hat{G}$: コンパクト

コンパクトハウスドルフアーベル位相群の圏を $\mathbf{CA}$, 離散アーベル位相群の圏を $\mathbf{DA}$ とすると Pontrjagin 双対より以下を得る.

定理 2.6 (コンパクト-離散双対)

指標群の構成は以下の圏同値を与える.

$$\mathbf{CA} \simeq \mathbf{DA}^{\mathrm{op}}$$

Pontrjagin 双対

コンパクト-離散双対から直ちにわかるように離散有限アーベル群の圏 $\mathbf{FDA}$ も自己双対となる.

定理 2.7 (有限 Pontrjagin 双対)

指標群の構成は以下の圏同値を与える.

$$\mathbf{FDA} \simeq \mathbf{FDA}^{\mathrm{op}}$$

以上をまとめると以下のようになっている.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{LCA} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & \mathbf{LCA} \arrow[d, dash] \\
\mathbf{CA} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & \mathbf{DA} \arrow[d, dash] \\
\mathbf{FDA} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathbf{FDA}
\end{tikzcd}$$

Pontrjagin 双対の証明

Pontrjagin 双対の証明は大きく 2 つの方法が知られている．

(1) 特殊な局所コンパクト群の構造定理を用いる方法
(2) 局所コンパクト群上の Fourier 変換を用いる方法

このうち (2) の方法については次の章で触れることにして，ここでは (1) の方法による証明の概略を説明する．

群の構造定理を用いた Pontrjagin 双対の証明

この方法では以下のように段階的に証明をしていく.

(1) コンパクト-離散双対
(2) コンパクト生成芽をもつ群に対する Pontrjagin 双対
(3) 局所コンパクト位相群に対する Pontrjagin 双対

(1) コンパクト-離散双対の証明については今回は略.

群の構造定理を用いたPontrjagin双対の証明

定義 2.8 (コンパクト生成芽)

G を位相群とする．単位元の近傍 V が

- 相対コンパクト
- G を生成する

を満たすとき，V は G のコンパクト生成芽であるという．

容易にわかるように，コンパクト生成芽をもつ位相群は局所コンパクトかつ σ-コンパクトである．

例 2.9

- 実数体 $\mathbb{R}$ はコンパクト生成芽をもつ
- 離散有限生成群はコンパクト生成芽をもつ
- コンパクト群はコンパクト生成芽をもつ

群の構造定理を用いた Pontrjagin 双対の証明

定理 2.10 (コンパクト生成芽をもつアーベル群の構造定理)

G がコンパクト生成芽をもつハウスドルフアーベル位相群であるとする．このときある自然数 n, m とコンパクト群 M があって G は以下のように同相同型に分解できる．

$$G \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{Z}^m \oplus M$$

位相群 G_1, G_2 については直和と指標群が交換することがわかる．

$$\widehat{G_1 \oplus G_2} \cong \hat{G}_1 \oplus \hat{G}_2$$

よって上の定理の状況で以下の同相同型が成り立つ．

$$\hat{\hat{G}} \cong \hat{\hat{\mathbb{R}}}^n \oplus \hat{\hat{\mathbb{Z}}}^m \oplus \hat{\hat{M}}$$

$\omega_{\mathbb{Z}}$ と ω_M はコンパクト-離散双対より同型であり，$\omega_{\mathbb{R}}$ も同型であることが個別に示せる（後述）ので ω_G の同型性が示される．

群の構造定理を用いた Pontrjagin 双対の証明

ここまででコンパクト生成芽をもつハウスドルフアーベル位相群に対しては Pontrjagin 双対が示せた．ここから一般の Pontrjagin 双対を示す．以下，G を局所コンパクトハウスドルフアーベル位相群とする．

補題 2.11

任意の局所コンパクト位相群はコンパクト生成芽をもつ開部分群をもつ．さらに任意の $x \in G$ に対してこのような部分群 H を $x \in H$ となるようにとれる．

補題 2.12

$H \subset G$ を開部分群とする．このとき H の指標は G の指標に拡張できる．

群の構造定理を用いた Pontrjagin 双対の証明

以下の定理は ω の単射性を意味する.

定理 2.13

任意の G の元 $x \neq e$ に対してある指標 $\chi \in \hat{G}$ が存在して $\chi(x) \neq 1$ となる.

$Proof$) $x \neq e$ とすると補題 2.11 よりコンパクト生成芽をもつ開部分群 H を $x \in H$ となるようにとれる. ここで H はコンパクト生成芽をもつので ω_H は同型, とくに単射. よって $\chi(x) \neq 1$ となる $\chi \in \hat{H}$ が存在する. 補題 2.12 より $\chi \in \hat{H}$ は $\tilde{\chi} \in \hat{G}$ に拡張できるので主張がわかる. □

群の構造定理を用いたPontrjagin双対の証明

定義 2.14

G の部分集合 $H \subset G$ に対して $\hat{G}$ の部分集合

$$H^{\perp} = \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(H) = 1\}$$

を H の零化部分群という.

零化部分群は $\hat{G}$ の閉部分群である.

補題 2.15

$H \subset G$ が閉部分群のとき以下の同相同型がある.

$$H^{\perp} \cong \widehat{G/H}$$

補題 2.16

$H \subset G$ がコンパクト部分群のとき $H^{\perp}$ は $\hat{G}$ の開部分群である.

定理 2.17

$\omega\colon G \to \hat{\hat{G}}$ は開写像.

$Proof)$ 補題 2.11 よりコンパクト生成芽をもつ開部分群 $H \subset G$ がとれる．H は開より G/H は離散なので補題 2.15 より $H^{\perp} \cong \widehat{G/H}$ はコンパクト，よって補題 2.16 より $H^{\perp\perp} \subset \hat{\hat{G}}$ は開部分群．ここで $\omega|_H\colon H \to H^{\perp\perp}$ は $\omega_H\colon H \to \hat{\hat{H}}$ とみなせることがわかるので ω は開写像である． $\square$

群の構造定理を用いた Pontrjagin 双対の証明

全射性は以下の補題から示される．

補題 2.18

任意の $\hat{\hat{x}} \in \hat{\hat{G}}$ に対してコンパクト生成芽をもつ開部分群 $H \subset G$ が存在して $\hat{\hat{x}} \in H^{\perp\perp}$ となる．

定理 2.19

$\omega \colon G \to \hat{\hat{G}}$ は全射．

Proof) 任意の $\hat{\hat{x}} \in \hat{\hat{G}}$ に対して補題から $\hat{\hat{x}} \in H^{\perp\perp}$ となるコンパクト生成芽をもつ開部分群 $H \subset G$ をとれば，$\omega|_H \colon H \to H^{\perp\perp}$ が $\omega_H \colon H \to \hat{\hat{H}}$ とみなせることから $x \in H$ があって $\hat{\hat{x}} = \omega|_H(x)$ となる．このとき明らかに $\hat{\hat{x}} = \omega(x)$ である． □

よって一般の Pontrjagin 双対が示された．

位相群上の Fourier 変換の定義

位相群上の関数の Fourier 変換は次のように定義される．

定義

G 上の関数 $f \in L^1(G)$ に対して $\hat{G}$ 上の関数 $\hat{f}\colon \hat{G} \to \mathbb{C}$ を以下で定める．

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}dx$$

$\hat{f}$ を関数 f の Fourier 変換という．
また，$\hat{G}$ 上の関数 $g \in L^1(\hat{G})$ に対して G 上の関数 $\check{g}\colon G \to \mathbb{C}$ を以下で定める．

$$\check{g}(x) = \int_{\hat{G}} g(\chi)\chi(x)d\chi$$

$\check{g}$ を関数 g の逆 Fourier 変換という．

最初にこの定義と古典的な Fourier 解析との対応を見ておく．

古典 Fourier 変換との対応

$\mathbb{R}$ 上の関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ の古典的な意味での Fourier 変換は次の式で与えられるのだった.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \tag{3.1}$$

これと一般の Fourier 変換の対応は以下の事実による.

定理 3.1 ($\mathbb{R}$ の自己双対性)

写像 $\exp\colon \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$ を以下で定義する.

$$\exp(\xi)(x) = e^{2\pi i x \xi}$$

このとき exp は同相同型である.

よって位相群 $\mathbb{R}$ 上の一般 Fourier 変換で $\chi(x) = e^{2\pi i x \xi}$ とみなしたものが (3.1) 式である.

Fourier 級数との対応

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を周期 2π の周期関数とするとき以下のような Fourier 級数を考えるのだった.

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} \tag{3.2}$$

ここで Fourier 係数 $\hat{f}(n)$ は以下で与えられる.

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \tag{3.3}$$

これは次の事実による.

Fourier 級数との対応

定理 3.2

(1) 写像 $p\colon \mathbb{Z} \to \hat{S^1}$ を $p(n)(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi inx}$ とするとこれは同相同型写像である.

(2) 写像 $q\colon S^1 \to \hat{\mathbb{Z}}$ を $q(e^{2\pi ix})(n) = e^{2\pi inx}$ とするとこれは同相同型写像である.

つまり Pontrjagin 双対で $\mathbb{Z}$ と S^1 が対応している.
$\mathbb{R}$ 上の周期関数 f は S^1 上の関数 $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ とみなせる. よってその Fourier 変換 $\hat{f}$ は $\hat{S^1} = \mathbb{Z}$ 上の関数であり, これを計算しているのが (3.3) 式である.
さらに (3.2) 式は $\mathbb{Z}$ 上の関数 $\hat{f}$ を逆 Fourier 変換している式とみることができる.

Fourier 級数との対応

Fourier 級数においては (3.2) 式のような級数展開が元の関数に一致するかが 1 つの問題となる.
同様に一般の Fourier 変換においても Fourier 変換の逆 Fourier 変換が元と一致するかという問題が考えられる.

準備：Haar 測度

定義 3.3 (Haar 測度)

G を局所コンパクト位相群とする．以下を満たす G 上の *Borel* 測度 μ を G 上の *(左)Haar* 測度という．

(0) $\mu \neq 0$

(1) $\forall K \subset G$: コンパクト　$\mu(K) < \infty$

(2) $\forall U \subset G$: 開集合　$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset U,\ K: \text{コンパクト}\}$

(3) $\forall S \subset G$: *Borel* 可測集合　$\mu(S) = \inf\{\mu(U) \mid S \subset U,\ U: \text{開集合}\}$

(4) $\forall S \subset G$: *Borel* 可測集合，$\forall g \in G$　$\mu(gS) = \mu(S)$

定理 3.4

任意の局所コンパクト位相群に対してその *Haar* 測度が正の定数倍の差を除いて一意に存在する．

以下，局所コンパクト位相群上の測度は Haar 測度を考える．

Fourier 変換

G を局所コンパクトハウスドルフアーベル位相群とし，μ をその Haar 測度とする．

定義 3.5 (Fourier 変換)

G 上の複素数値絶対可積分関数 $f \in L^1(G)$ に対して $\hat{G}$ 上の関数 $\hat{f} \colon \hat{G} \to \mathbb{C}$ を以下で定める．

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}d\mu(x)$$

$\hat{f}$ を関数 f の *Fourier* 変換という．

つまり L^1 関数の Fourier 変換は以下のような写像を定める．

$$\mathcal{F} \colon L^1(G) \to L^\infty(\hat{G})$$

この写像は有界線形であることが知られる．

Fourier 変換

Fourier 変換は畳み込みによる積と交換する.

定義 3.6 (畳み込み)

$f, g \in L^1(G)$ に対して積分

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)d\mu(y)$$

で定まる関数 $f * g \in L^1(G)$ を f と g の畳み込み *(comvolution)* という.

命題 3.7

$f, g \in L^1(G)$ に対して

(1) $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

(2) さらに $fg \in L^1(G)$ のとき $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$

Fourier 変換

以下では $\hat{G}$ 上に Haar 測度 σ を与えて考えている．

定理 3.8 (Plancherel の定理)

(1) 関数空間 $\mathcal{F}(L^1(G) \cap L^2(G))$ は $L^2(\hat{G})$ の稠密部分集合である．

(2) $\mathcal{F}|_{L^1(G)\cap L^2(G)} \colon L^1(G) \cap L^2(G) \to L^2(\hat{G})$ は L^2 等長作用素である．

(3) $\mathcal{F}|_{L^1(G)\cap L^2(G)}$ は L_2 等長作用素 $\mathcal{F}_2 \colon L^2(G) \to L^2(\hat{G})$ に一意に拡張される．

系 3.9 (Parseval の等式)

関数 $f, g \in L^2(G)$ に対して

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}d\mu(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\overline{\hat{g}(\chi)}d\sigma(\chi)$$

逆 Fourier 変換

定義 3.10 (逆 Fourier 変換)

$\hat{G}$ 上の関数 $g \in L^1(\hat{G})$ に対して G 上の関数 $\check{g}\colon G \to \mathbb{C}$ を以下で定める．

$$\check{g}(x) = \int_{\hat{G}} g(\chi)\chi(x)d\sigma(\chi)$$

$\check{g}$ を関数 g の逆 *Fourier* 変換という．

L^1 関数の逆 Fourier 変換は以下のような写像を定める．

$$\mathcal{F}^{-1}\colon L^1(\hat{G}) \to L^\infty(G)$$

この写像は有界線形であることが知られる．

逆 Fourier 変換

G 上の関数空間 $B(G)$ を次で定める.

$$B(G) = \left\{ x \mapsto \int_{\hat{G}} \chi(x) d\lambda(x) \;\middle|\; \lambda\colon \hat{G}\text{上 Radon 測度} \right\}$$

さらに $B^1(G) = L^1(G) \cap B(G)$ と書くことにする.

定理 3.11 (スペクトル合成)

任意の $f \in B^1(G)$ について $\hat{f} \in L^1(G)$ であって以下が成り立つ.

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x) d\sigma(\chi)$$

つまり $B^1(G)$ 上では $f = \check{\hat{f}}$ となる.

Fourier 変換を用いた Pontrjagin 双対の証明

定理 3.12

任意の G の元 $x \neq e$ に対してある指標 $\chi \in \hat{G}$ が存在して $\chi(x) \neq 1$ となる.

Proof) $x \neq e$ とするとコンパクト台をもつ連続関数 $g \in C_c(G)$ があって $g(e) = 1,\ g(x) = 0$ となる. G 上関数 f を $f(y) = g(x^{-1}y)$ とすると明らかに $f \neq g$ である. このとき f の Fourier 変換は

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\chi) &= \int_G f(y)\overline{\chi(y)}d\mu(y) \\
&= \int_G g(x^{-1}y)\overline{\chi(y)}d\mu(y) \\
&= \overline{\chi(x)} \int_G g(x^{-1}y)\overline{\chi(x^{-1}y)}d\mu(y) = \overline{\chi(x)}\hat{g}(\chi)
\end{aligned}$$

Planchrel の定理より Fourier 変換は L^2 上単射なので $\hat{f} \neq \hat{g}$. よって $\hat{f}(\chi) \neq \hat{g}(\chi)$ なる $\chi \in \hat{G}$ を選べば $\chi(x) \neq 1$ となる. □

Fourier 変換を用いた Pontrjagin 双対の証明

補題 3.13

コンパクト集合 $K \subset \hat{G}$ と $\varepsilon > 0$ に対して部分集合 $Q(K, \varepsilon) \subset G$ を

$$Q(K, \varepsilon) = \{x \in G \mid \forall \chi \in K \ |\chi(x) - 1| < \varepsilon\}$$

とする．このとき $\{Q(K, \varepsilon)\}_{K,\varepsilon}$ は G の単位元の近傍基である．

この補題は Fourier-Stieltjes 変換を用いて示される．

定理 3.14

$\omega \colon G \to \hat{\hat{G}}$ は開写像.

$Proof)$ コンパクト集合 $K \subset \hat{G}$ と $\varepsilon > 0$ に対してコンパクト開位相の定義より

$$W(K, \varepsilon) = \{\gamma \in \hat{\hat{G}} \mid \forall \chi \in K \ |\gamma(\chi) - 1| < \varepsilon\}$$

は $\hat{\hat{G}}$ の単位元の近傍基である．よって補題と合わせてわかる． $\square$

全射性の証明は以下の補題を用いる.

補題 3.15

$\omega(G) \subset \hat{\hat{G}}$ は閉集合.

補題 3.16

$U \subset \hat{G}$ を空でない開集合とすれば以下を満たす関数 $f \in L^1(G)$ が存在する.

- $\hat{f} \neq 0$
- $\mathrm{supp}\hat{f} \subset U$

Fourier 変換を用いた Pontrjagin 双対の証明

定理 3.17

$\omega\colon G \to \hat{\hat{G}}$ は全射.

$Proof$) $\omega(G) \neq \hat{\hat{G}}$ と仮定する. $U = \omega(G)^c$ に補題を適用して $\hat{f} \neq 0$ かつ $\mathrm{supp}\hat{f} \subset \omega(G)^c$ なる関数 $f \in L^1(\hat{G})$ を得る. ここで $\hat{f}$ は

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{\hat{G}} f(\chi)\overline{\gamma(\chi)}d\sigma(\chi) \qquad (\gamma \in \hat{\hat{G}})$$

である. 任意の $x \in G$ について $\gamma = \omega(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega(x)) &= \int_{\hat{G}} f(\chi)\overline{\omega(x)(\chi)}d\sigma(\chi) \\ &= \int_{\hat{G}} f(\chi)\overline{\chi(x)}d\sigma(\chi)\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{supp}\hat{f} \subset \omega(G)^c$ より $\hat{f}(\omega(x)) = 0$ であるが, 任意の $x \in G$ で (最右辺)=0 となる f は $f \equiv 0$ に限ることがわかる. これは $\hat{f} \neq 0$ に矛盾. □

参考文献

- 壬生雅道，位相群論概説，岩波書店，1976
- 丸山徹，群上の調和解析，丸善出版，2023
- 小林俊行・大島利雄，リー群と表現論，岩波書店，2005