Zermelo と von Neumann の無限公理の同値性

上島晟宏

神戸大学大学院 システム情報学研究科 研究生

9/17

1. 歴史と無限公理の意味
2. von Neumann 流の無限公理が「改良」足り得る理由
3. 証明の概略
   - von Neumann 流 $\Longrightarrow$ Zermelo 流
   - Zermelo 流 $\Longrightarrow$ von Neumann 流

公理的集合論の歴史

1880 年代 Georg Cantor が素朴集合論を創始.

- 整列可能定理.
- 真のクラスに関する矛盾.

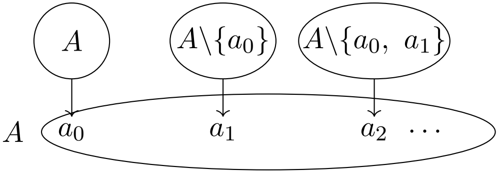
1900 年 Hilbert の 23 の問題の第 1 問.

- 整列可能定理
- 連続体仮説

1904 年 Zermelo が整列可能定理を証明.

- 選択公理を使用

1908 年 Zermelo が集合論の公理化を発表.



Zermelo による公理化の現在の姿

Table: ZFC 公理系

(Z)	外延性公理	$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$
(Z)	基礎の公理	$\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg z(z \in x \wedge z \in y))$
(Z)	内包公理図式	$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x))$
(Z)	対公理	$\exists z(x \in z \wedge y \in z)$
(Z)	和集合公理	$\exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A)$
(F)	置換公理図式	$\forall x \in A \exists! y \varphi(x,\ y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x,\ y)$
(Z)	無限公理	$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$
(Z)	冪集合公理	$\exists y \forall z(z \subset x \rightarrow z \in y)$
(C)	選択公理	$\emptyset \notin F \wedge \forall x \in F \forall y \in F(x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$ $\rightarrow \exists C \forall x \in F \exists y(C \cap x = \{y\})$

Zermelo による公理化の現在の姿

Table: ZFC 公理系

(Z)	外延性公理	$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$
(Z)	基礎の公理	$\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \land \neg z(z \in x \land z \in y))$
(Z)	内包公理図式	$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \land \varphi(x))$
(Z)	対公理	$\exists z(x \in z \land y \in z)$
(Z)	和集合公理	$\exists A \forall Y \forall x(x \in Y \land Y \in \mathcal{F} \to x \in A)$
(F)	置換公理図式	$\forall x \in A \exists! y \varphi(x,\ y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x,\ y)$
(Z)	無限公理	$\exists x(\emptyset \in x \land \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$
(Z)	冪集合公理	$\exists y \forall z(z \subset x \to z \in y)$
(C)	選択公理	$\emptyset \notin F \land \forall x \in F \forall y \in F(x \neq y \to x \cap y = \emptyset)$ $\to \exists C \forall x \in F \exists y(C \cap x = \{y\})$

何のはなしするの？

無限公理

- Zermelo 流 $\cdots$ $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\{y\} \in x))$
- von Numann 流 $\cdots$ $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$

本講演の内容

- von Neumann 流の無限公理が, なぜ「改良」足り得るのか.
- ZF − von Neumann 流無限公理において,

  von Neumann 流の無限公理 $\Longleftrightarrow$ Zermelo 流の無限公理

  の証明の概略.

無限公理についてもう少し

無限公理の意味

- 集合で自然数を表現する公理.
  - Zermelo 流 $\cdots$ $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\{y\} \in x))$
  - von Numann 流 $\cdots$ $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$

  x が自然数の全体に相当.

	Zermelo	von Neumann
0	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\{\emptyset\}$	$\{0\}$
2	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{0,\ 1\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\underbrace{\{\cdots\{}_{n\text{ 個}}\emptyset\underbrace{\}\cdots\}}_{n\text{ 個}}$	$\{0,\ \ldots,\ n-1\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

1. 歴史と無限公理の意味
2. von Neumann 流の無限公理が「改良」足り得る理由
3. 証明の概略
   - von Neumann 流 $\implies$ Zermelo 流
   - Zermelo 流 $\implies$ von Neumann 流

結論から言うと...

- 自然数の順序
  von Neumann 流の自然数のほうが
  - 順序の表現がシンプル.
  - $<$ が集合の最も基本的な構造である $\in$.
  - $\leq$ も集合の基本的な構造である $\subset$.
- 順序数/整列順序型
  von Neumann 流の順序数は
  - 集合だけで定義できる.
  - 自然数の拡張である.
  - 濃度も順序数で表せる.

順序に関する利点

von Neumann 流の場合

von Neumann 流の自然数 n, m について,
$n = \{0, \ldots, n-1\}$, $m = \{0, \ldots, m-1\}$ であって,

- $n < m \iff n \in m$
- $n \leq m \iff n \subset m$

となる.

例

$2 = \{0, 1\}$, $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ であり,

- $2 \in 4$ なので $2 < 4$
- $2 \subset 4$ なので $2 \leq 4$

となる.

順序に関する利点

Zermelo 流の場合

Zermelo 流の自然数は $n = \underbrace{\{\cdots\{}_{n\text{個}} 0 \underbrace{\}\cdots\}}_{n\text{個}}$, $m = \underbrace{\{\cdots\{}_{m\text{個}} 0 \underbrace{\}\cdots\}}_{m\text{個}}$ で

- $n < m \iff [n] \subsetneqq [m]$
- $n \leq m \iff [n] \subset [m]$

例

$2 = \{\{0\}\},\ 4 = \{\{\{\{0\}\}\}\}$ で,

- $[2] = \{0,\ 1\} \subsetneqq \{0,\ 1,\ 2,\ 3\} = [4]$ なので $2 < 4$
- $[2] = \{0,\ 1\} \subset \{0,\ 1,\ 2,\ 3\} = [4]$ なので $2 \leq 4$

となる.

Zermelo 流の自然数と $\in$ または $\subset$ で順序を表現できる？

$\in$ で表現できるか？

$2 = \{\{\emptyset\}\},\ 3 = \{\{\{\emptyset\}\}\},\ 4 = \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}.$

$$
\begin{array}{ccccc}
2 & & 3 & & 4 \\
\{\{\emptyset\}\} & \in & \{\{\{\emptyset\}\}\} & \in & \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}
\end{array}
$$

?

$\subset$ で表現できるか？

$$0,\ 4 \subset 4$$

順序に関する利点

Zermelo 流の自然数に比べて, von Neumann 流の自然数のほうが

- シンプルに順序を表現できる.
- $<$ が集合の最も基本的な構造である $\in$ で表される.
- $\leq$ も集合の基本的な構造である $\subset$ で表される.

順序数に関する利点（再掲）

von Neumann 流の順序数は

- 集合だけで定義できる.
- 自然数の拡張である.
- 濃度も順序数で表せる.

順序数とは？

定義 (整列順序)

関係 R と集合 A について, R が A を整列順序づけるとは

- R が A を全順序づける.
- A の任意の非空部分集合に R-極小元が存在.
  - y が X の R-極小元
    $\overset{\text{def}}{\iff}$ X の任意の元 x について $x \not R y$.

例

- 自然数全体 $\mathbb{N}$ の普通の順序 $<$ は整列順序.
- 実数全体 $\mathbb{R}$ の普通の順序 $<$ は整列順序でない.
  反例：$(-1, 1)$

順序数とは？

とても大雑把な定義 (同型)

整列順序集合 $(A;R_A)$ と $(B;R_B)$ について

$$(A;R_A) \cong (B;R_B)$$
$$\overset{\text{def}}{\iff} (A;R_A) \text{ と } (B;R_B) \text{ が順序構造として同じ.}$$

定理

$\cong$ は同値関係.

順序数とは？

例

- $A=\{a,\ b,\ c\}$, $X=\{x,\ y,\ z\}$, $<$: アルファベット順.

$$(A;<)\cong(X;<)$$

- $\mathbb{N}$ において

$$0<1<2<\cdots n<\cdots$$
$$1\prec 2\prec\cdots n\prec\cdots 0$$

このとき, $(\mathbb{N};<)\not\cong(\mathbb{N};\prec)$.

順序数とは？

順序数

- 順序数 $\cdots$ 整列順序集合の「長さ」を測るものさし.
- 整列順序集合 $(A; R_A)$, $(B; R_B)$ について
  - $\mathrm{type}(A; R_A)$ が唯一つ定まる.
  - $(A; R_A) \cong (B; R_B) \iff \mathrm{type}(A; R_A) = \mathrm{type}(B; R_B)$

例

$\mathrm{type}(A; <) = \mathrm{type}(X; <)$ であるが, $\mathrm{type}(\mathbb{N}; <) \neq \mathrm{type}(\mathbb{N}; \prec)$ である.

Zermelo の頃の順序数

Zermelo の頃の順序数の定義 [?, p108]

WO : 整列順序集合全体の集まり.

- $\mathrm{type}(A; R) = [(A; R)] \in WO/\cong \qquad ((A; R) \in WO)$

順序数の要請をみたす

整列順序集合 $(A; R_A)$, $(B; R_B)$ について

- $\mathrm{type}(A; R_A)$ が唯一つ定まる.
- $(A; R_A) \cong (B; R_B) \iff \mathrm{type}(A; R_A) = \mathrm{type}(B; R_B)$

困るところ

- WO, $[(A; R)]$ が真のクラス.

von Neumann 流の順序数

定義 (von Neumann 流の順序数)

z が順序数 $\overset{\text{def}}{\iff}$
- 推移的集合である：$\forall y \in z (y \subset z)$
- $\in$ によって整列順序づけられる

定理

$(A; R)$：整列順序集合

- $\exists!$ 順序数 α s.t. $(A; R) \cong (\alpha; \in)$.

定理

順序数 α, β に対して $(\alpha; \in) \cong (\beta; \in) \iff \alpha = \beta$.

von Neumann 流の順序数

順序型の要請をみたす

$(A; R_A)$, $(B; R_B)$: 整列順序集合
$\mathrm{type}(A; R_A)$: 順序数 α s.t. $(A; R_A) \cong (\alpha; \in)$.

- $\mathrm{type}(A; R_A)$ が唯一つ定まる.
- $(A; R_A) \cong (B; R_B) \iff \mathrm{type}(A; R_A) = \mathrm{type}(B; R_B)$.

順序数に関する利点

von Neumann 流の順序数の良いところ

- 定義も含めて集合しか出てこない.
- von Neumann 流自然数の拡張である.
  (より正確には, 自然数が順序数のはじめのいくつかになる.)
- 濃度（基数）も, ある条件をみたす順序数として定義できる.

例

- von Neumann 流の自然数 $3 = \{0,\ 1,\ 2\}$ は順序数.
- von Neumann 流自然数の全体 ω は順序数.
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ は順序数.
- $\mathbb{Q} = \aleph_0 = \omega, \quad |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = 2^{\omega}$.

前提知識

目標

$$\exists x(\emptyset \in x \land \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x)) \\ \Longrightarrow \exists x(\emptyset \in x \land \forall y \in x(\{y\} \in x))$$

- ZF から Zermelo 流の無限公理を示すことと同じ.
- ZF における自然数の全体を ω とする.

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0,\ 1\} \\ 3 &= \{0,\ 1,\ 2\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

- $n \in \omega$ に対して $n + 1 = n \cup \{n\}$.

証明

目標 (再掲)

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\{y\} \in x))$$

- ω 上の関数の再帰的定義.

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & n = 0 \\ \{f(n-1)\} & n > 0 \end{cases}$$

- $\emptyset \in \mathrm{ran}(f) \wedge \forall y \in \mathrm{ran}(f)(\{y\} \in \mathrm{ran}(f))$ を示す.

$\emptyset \in \mathrm{ran}(f) \wedge \forall y \in \mathrm{ran}(f)(\{y\} \in \mathrm{ran}(f))$ を示す

f の定義 (再掲)

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & n = 0 \\ \{f(n-1)\} & n > 0 \end{cases}$$

(i) $\emptyset \in \mathrm{ran}(f)$: 明らか.

(ii) $\forall y \in \mathrm{ran}(f)(\{y\} \in \mathrm{ran}(f))$:

- $y \in \mathrm{ran}(f)$ を任意に固定.
- $\exists n \in \omega(y = f(n))$. ($\because$ $\mathrm{ran}(f)$ の定義)
- $f(n+1) = \{f(n)\} = \{y\}$. ($\because$ f の定義)
- $\{y\} \in \mathrm{ran}(f)$.

1. 歴史と無限公理の意味
2. von Neumann 流の無限公理が「改良」足り得る理由
3. 証明の概略
   - von Neumann 流 $\Longrightarrow$ Zermelo 流
   - Zermelo 流 $\Longrightarrow$ von Neumann 流

前提知識

目標

$$\exists x(\emptyset \in x \land \forall y \in x(\{y\} \in x))$$
$$\Longrightarrow \exists x(\emptyset \in x \land \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$$

再帰的定義は使えない

- ON 上の原始再帰
  - Zermelo 流自然数の全体は（von Neumann 流）順序数でない.
- V 上の超限再帰
  - 正当化に推移閉包が必要.
    (i.e. von Neumann 流自然数の全体)

前提知識

定義 (整列順序 (再掲))

関係 R と集合 A について, R が A を整列順序づけるとは

- R が A を全順序づける.
- A の任意の非空部分集合に R-極小元が存在.
  - y が X の R-極小元 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X の任意の元 x について $x \not R y$.

定義 (von Neumann 流の順序数 (再掲))

z が順序数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

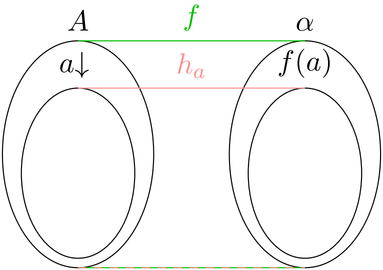
- 推移的集合である : $\forall y \in z(y \subset z)$
- $\in$ によって整列順序づけられる

前提知識

定理 (再掲)

$(A;R)$：整列順序集合
$(A;R) \cong (\alpha;\in)$ をみたす順序数 α が唯一つ存在.

- $a \in A$ について $a{\downarrow} = \{x \in A : xRa\}$
- 同型写像 $f : A \to \alpha$; $f(a) = \xi \overset{\text{def}}{\iff} (a{\downarrow}\,;R) \cong (\xi;\in)$
- $\exists!$ 同型写像 $h_a : a{\downarrow} \to f(a)$.



方針

目標 (再掲)

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\{y\} \in x))$$
$$\Longrightarrow \exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$$

(1) Zermelo 流自然数の全体 w を構成.

(2) w に整列順序 $\prec$ を定める.

(3) $(w; \prec) \cong (\alpha; \in)$ なる順序数 α について

$$\emptyset \in \alpha \wedge \forall \xi \in \alpha(\xi \cup \{\xi\} \in \alpha)$$

を示す.

(1) Zermelo 流自然数の全体 w の構成

目標

$w = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \ldots\}$ の構成

例えば

$$\begin{aligned} x' = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \ldots,\\ a,\ \{a\},\ \{\{a\}\},\ \ldots,\\ b,\ \{b\},\ \{\{b\}\},\ \ldots\} \end{aligned}$$

も Zermelo 流の無限公理をみたす.
(i.e. $\emptyset \in x' \wedge \forall y \in x'(\{y\} \in x')$)

w への要請

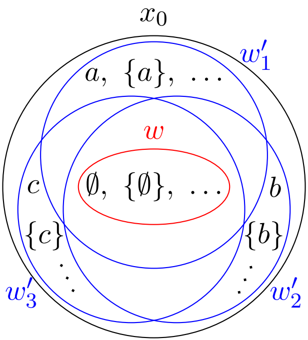
Zermelo の無限公理を満たす集合の中で最小.

(1) Zermelo 流自然数の全体 w の構成

定義

$x_0 : \exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\{y\} \in x))$ で存在を保証される集合

$$w = \bigcap \{w' \subset x_0 : \emptyset \in w' \wedge \forall y \in w'(\{y\} \in w')\}$$



記法

- $0 = \emptyset, \quad 1 = \{\emptyset\}, \quad 2 = \{\{\emptyset\}\}, \ \ldots$
- $t \in w$ に対して $t + 1 = \{t\}$
- $w \ni t \neq 0$ に対して $t - 1$ は $t = \{s\}$ なる $s \in w$.

方針 (再掲)

目標 (再掲)

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\{y\} \in x))$$
$$\Longrightarrow \exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$$

(1) Zermelo 流自然数の全体 w を構成.
(2) w に整列順序 $\prec$ を定める.
(3) $(w; \prec) \cong (\alpha; \in)$ なる順序数 α について

$$\emptyset \in \alpha \wedge \forall \xi \in \alpha(\xi \cup \{\xi\} \in \alpha)$$

を示す.

(3) $\emptyset \in \alpha \wedge \forall \xi \in \alpha(\xi \cup \{\xi\} \in \alpha)$

- $\prec$ が w を整列順序づけると仮定.

定理 (再掲)

$(A; R)$: 整列順序集合
$(A; R) \cong (\alpha; \in)$ をみたす順序数 α が唯一つ存在.

- 順序数 α : $(w; \prec) \cong (\alpha; \in)$.

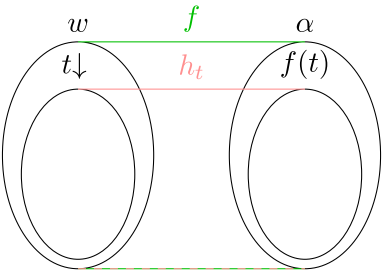
目標

$\emptyset \in \alpha \wedge \forall \xi \in \alpha(\xi \cup \{\xi\} \in \alpha)$

(3) $\emptyset \in \alpha \wedge \forall\xi \in \alpha(\xi \cup \{\xi\} \in \alpha)$

$(w;\prec) \cong (\alpha;\in)$ のとき (再掲)

- $t \in w$ について $t\!\downarrow = \{s \in w : s \prec t\}$
- 同型写像 $f : w \to \alpha$; $f(t) = \xi \iff (t\!\downarrow ; \prec) \cong (\xi;\in)$
- $\exists!$ 同型写像 $h_t : t\!\downarrow \to f(t)$.



(3) $\emptyset \in \alpha \wedge \forall \xi \in \alpha(\xi \cup \{\xi\} \in \alpha)$

(i) $\emptyset \in \alpha$:

- $0{\downarrow} = \{s \in w : s \prec 0\} = \emptyset$.
- $(0{\downarrow}\,; \prec) \cong (\emptyset; \in)$.
- $f(0) = \emptyset$ $\qquad (\because f(t) = \xi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (t{\downarrow}\,; \prec) \cong (\xi; \in))$

(ii) $\forall \xi \in \alpha(\xi \cup \{\xi\} \in \alpha)$

- $\xi \in \alpha = \mathrm{ran}(f)$ を任意に固定.
- $\exists t \in w(f(t) = \xi)$. $\qquad (\because \mathrm{ran}(f)$ の定義$)$
- $(t{\downarrow}\,; \prec) \cong (\xi; \in)$ $\qquad (\because f(t) = \xi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (t{\downarrow}\,; \prec) \cong (\xi; \in))$
- $\exists$ 同型写像 $h_t : t{\downarrow} \to \xi$.

∃ 同型写像 $h_{\{t\}} : \{t\}\!\downarrow \to \xi \cup \{\xi\}$

示すこと

- $\exists s \in w(f(s) = \xi \cup \{\xi\})$.

方針

- きっと $f(\{t\}) = \xi \cup \{\xi\}$ のはず.
- $(\{t\}\!\downarrow ; \prec) \cong (\xi \cup \{\xi\}; \in)$ のはず.
- ∃ 同型写像 $h_{\{t\}} : \{t\}\!\downarrow \to \xi \cup \{\xi\}$ のはず.

- $g : \{t\}\!\downarrow \to \xi \cup \{\xi\}$; $g(s) = \begin{cases} h_t(s) & s \prec t \\ \xi & s = t \end{cases}$ は同型写像.

方針 (再掲)

目標 (再掲)

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\{y\} \in x))$$
$$\Longrightarrow \exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$$

(1) Zermelo 流自然数の全体 w を構成.

(2) w に整列順序 $\prec$ を定める.

(3) $(w; \prec) \cong (\alpha; \in)$ なる順序数 α について

$$\emptyset \in \alpha \wedge \forall \xi \in \alpha(\xi \cup \{\xi\} \in \alpha)$$

を示す.

(2) w に順序 $\prec$ を定める

- $s \in w$ に対して,

$$[s] = \bigcap\{y \in \mathcal{P}(w) : (s \neq 0' \to (s-1 \in y)) \\ \wedge (\forall u \in y(u \neq 0' \to (u-1 \in y)))\}$$

例

$$[0'] = \emptyset, \quad [1'] = \{0'\}, \quad [2'] = \{0',\ 1'\}, \quad [3'] = \{0',\ 1',\ 2'\}$$

定義

$$s \prec t \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} [s] \subsetneqq [t]$$

例

$[2] = \{0,\ 1\} \subsetneqq \{0,\ 1,\ 2,\ 3\} = [4]$ より $2 \prec 4$.

$\prec$ は整列順序か？

定義 (再掲)

$$s \prec t \overset{\text{def}}{\iff} [s] \subsetneq [t]$$

示すこと

非反射律 $s \not\prec s.$ 明らか

推移律 $s \prec t \wedge t \prec u \implies s \prec u.$ 明らか

三分律 $s \prec t \vee t \prec s \vee s = t.$ 整礎製の証明から分かる

整礎性 w の任意の非空部分集合に $\prec$-極小元が存在. 頑張る

$\prec$ の整礎性の証明方針

示すこと

$A : w$ の非空部分集合について

$$A \text{ の } \prec\text{-極小元が存在.}$$

★ $X = \bigcap\{[s] : s \in A\}$.

目標

$[t] = X$ となる $t \in A$ が存在.

(i) $s_0 \in A$ を固定. $[s_0] \setminus X$ の $\in$-極小元を u.
(ii) $[u] = X$ を示す.
(iii) $u \in A$ を示す.
(iv) u が A の $\prec$-極小元.

$\prec$ の三分律の証明方針

目標

$$s \prec t \text{ または } t \prec s \text{ または } s = t.$$

(i) $X = [s] \cap [t]$.
整礎性の証明から $[s] = X$ または $[t] = X$.

$$[s] \subsetneqq [t] \text{ または } [t] \subsetneqq [s] \text{ または } [s] = [t].$$

$s \prec t \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} [s] \subsetneqq [t]$ より，これは

$$s \prec t \text{ または } t \prec s \text{ または } [s] = [t].$$

示すこと

$$[s] = [t] \Longrightarrow s = t.$$

使う補題たち

補題 (1)

$\in$ は w 上で整礎的である.
(i.e. w の各非空部分集合に対して, $\in$-極小元が存在.)

補題 (2)

$s = 0' \iff [s] = \emptyset.$
または, $s \neq 0' \iff [s] \neq \emptyset.$

補題 (3)

$s \neq 0' \implies 0' \in [s].$
または $[s] \neq \emptyset \implies 0' \in [s].$ *($\because$ 補題 (2))*

補題 (4)

$X = \bigcap\{[s] : s \in A\} = \emptyset \iff \emptyset \in \{[s] : s \in A\}$

よく使う論法

$[s]$ の定義 (再掲)

$$[s] = \bigcap \left\{ y \in \mathcal{P}(w) : \begin{array}{l} (s \neq 0' \to (s-1 \in y)) \\ \quad \wedge (\forall u \in y (u \neq 0' \to (u-1 \in y))) \end{array} \right\}$$

- $\varphi_s(y) \iff \begin{array}{l} (s \neq 0' \to (s-1 \in y)) \\ \quad \wedge (\forall u \in y (u \neq 0' \to (u-1 \in y))) \end{array}$

(i) 背理法

(ii) $[s]$ の最小性に矛盾

よく使う論法

例 ($X = [u]$ の証明)

- $A : w$ の非空部分集合.
- $s_0 \in A$: fix.
- $u : [s_0]\backslash X$ の $\in$-極小元.
- X は $\varphi_u(X)$ をみたす.
- $[u] \subset X$. ($\because$ $[u]$ の最小性)
- $[u] \subsetneqq X$ と仮定.
- $X\backslash[u]$ の $\in$-極小元 v が存在.
- $u \notin X$ より $v \neq u$.
- $v \neq 0$ より $v - 1 \in [u]$.
- $[u]\backslash\{v-1\}$ が φ_u をみたす. これは矛盾.

ご清聴ありがとうございました.