ℕ上の超フィルターの性質のイデアルによる特徴づけ

でぃぐにゃん (@fujidig) 2023/9/17
すうがく徒のつどい@オンライン 第4回

今回話すこと

- 主に$\mathbb{N}$上のイデアルと超フィルターについての組合せ論
- 「Ramsey超フィルター」を導入する．その存在はRamseyの定理を強めたものである．またその弱いバージョンである「P-point」「Q-point」も導入する
- 超フィルターが「Ramsey超フィルター」「P-point」「Q-point」であるという条件をイデアルの言葉で特徴づける
- 「Ramsey超フィルター」「P-point」「Q-point」が存在するための十分条件を挙げる
- 関連話題として，$\mathbb{N}$上のイデアルの基数不変量について触れる

§1. 各種定義と基本性質

§2. イデアルを使った特徴づけ

§3. 各性質を持つ超フィルターが存在するための十分条件

§4. 可算集合上のイデアルの基数不変量およびKatětov順序

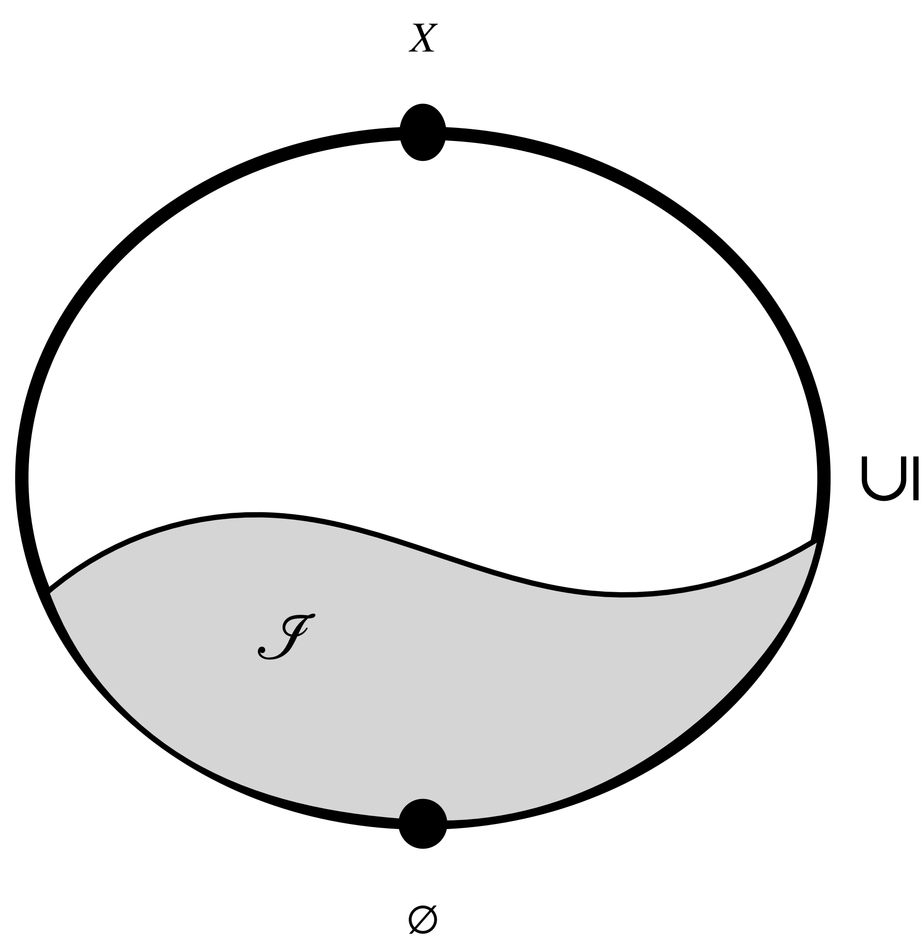
イデアル

Xを無限集合とする.

$\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(X)$が$X$上の**イデアル**であるとは，次の3条件を満たすときを言う.

- $\varnothing \in \mathscr{I}$
- $A \in \mathscr{I}$ かつ $B \subseteq A$ ならば $B \in \mathscr{I}$
- AとBがともに$\mathscr{I}$の元ならば，$A \cup B \in \mathscr{I}$

$X \notin \mathscr{I}$のとき$\mathscr{I}$は真のイデアルであるという.



例1：Xを無限集合としたとき，Xの有限部分集合全体をFin_Xとすれば，Fin_XはX上のイデアル

例2：$X = \mathbb{R}$で$\mathscr{I}$がルベーグ測度0集合全体のとき$\mathscr{I}$は$\mathbb{R}$上のイデアル

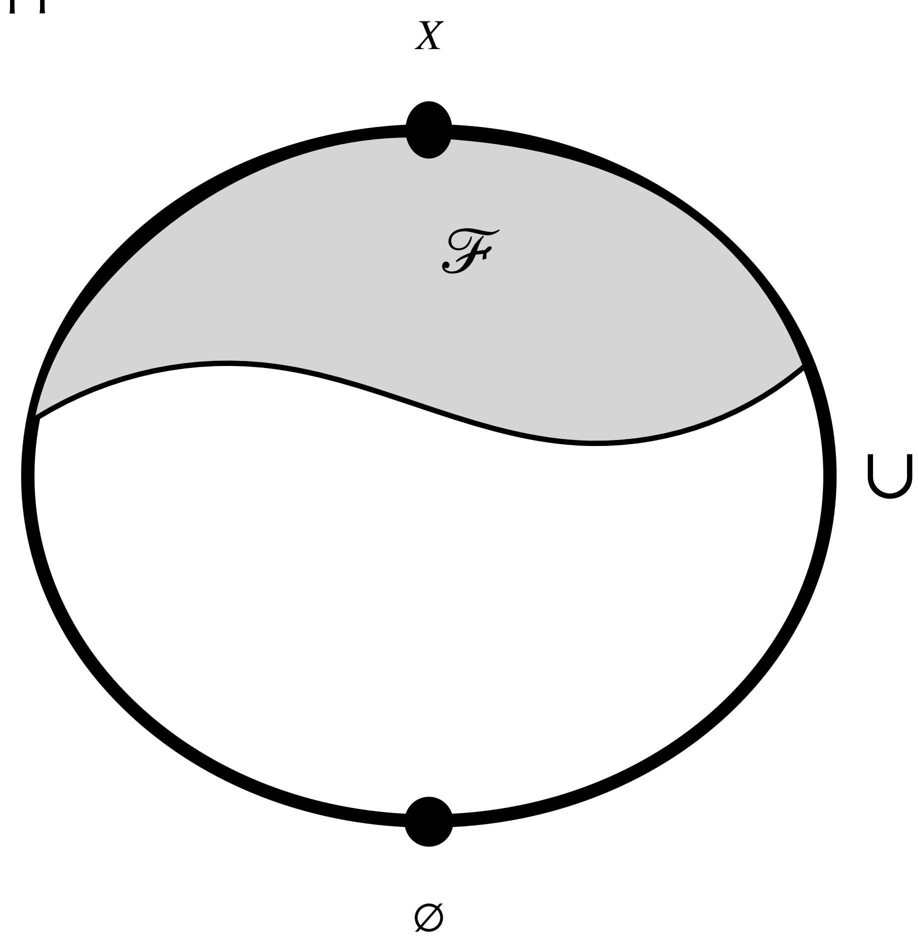
フィルター

Xを無限集合とする.

$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$が$X$上の**フィルター**であるとは，次の3条件を満たすときを言う.

- $X \in \mathscr{F}$
- $A \in \mathscr{F}$ かつ $A \subseteq B \subseteq X$ ならば $B \in \mathscr{F}$
- AとBがともに$\mathscr{F}$の元ならば，$A \cap B \in \mathscr{F}$

$\varnothing \notin \mathscr{F}$のとき$\mathscr{F}$は真のフィルターであるという.



例1：Xを無限集合としたとき，Xの補有限部分集合全体をCofin_Xとすれば，Cofin_XはX上のフィルター

例2：$X = [0,1]$で$\mathscr{F}$がルベーグ測度1集合全体のとき$\mathscr{F}$は$[0,1]$上のフィルター

イデアルとフィルターの双対性

イデアルとフィルターは双対概念である．実際,

$$\mathscr{A}^* = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathscr{A}\}$$

とおくと

フィルター$\mathscr{F}$に対して$\mathscr{F}^*$はイデアルだし，イデアル$\mathscr{I}$に対して$\mathscr{I}^*$はフィルターである.

しかもこの対応でフィルターとイデアルは一対一に対応する.

フィルターの一つの意義

「(なにかの)性質Pを満たす実数が存在する」と「性質Qを満たす実数が存在する」という２つの定理があったとする.

この2つがあっても通常は「性質PとQの両方をもつ実数が存在する」ことは出ない.

ところが「性質Pを持たない実数の集合は測度0」「性質Qを持たない実数の集合も測度0」が言えれば，性質PとQを併せ持つ実数の存在がわかる.

これは補集合が測度0の集合のなすフィルターの「共通部分で閉じる」という性質を使っている.

このようにいくつか性質を満たす元があるフィルターの意味でたくさんあることを示しておけば，それらを同時に満たす元がとれる．これはフィルターの意義の一つといってよいだろう.

超フィルター

X上のフィルター$\mathscr{F}$は次の条件：

任意の$A \subseteq X$について$A \in \mathscr{U}$または$X \setminus A \in \mathscr{U}$

をみたすとき，X上の**超フィルター**であるという．

超フィルターはフィルターの中で包含の意味で極大なものと言っても同じことである．また超フィルターは次の性質とも同値：

任意の$A, B \subseteq X$について，もし$A \cup B \in \mathscr{U}$ならば$A \in \mathscr{U}$または$B \in \mathscr{U}$

超フィルターの自明な例

無限集合Xと$x \in X$を固定する.

$$\mathscr{U}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$$

で定義される集合$\mathscr{U}_x$はX上の超フィルターである.

これはxで生成される単項超フィルターと呼ばれる.

我々はこのような超フィルターには興味がない！

非単項超フィルター

Xの補有限部分集合全体Cofin_Xを含む ($\mathrm{Cofin}_X \subseteq \mathscr{U}$である) 超フィルター$\mathscr{U}$を**非単項超フィルター**という.

選択公理により，どんな無限集合Xに対してもX上の非単項超フィルターが存在することが示せる.

非単項超フィルターは基本的には具体的に定義できるものではない.

自明なものを省くこと

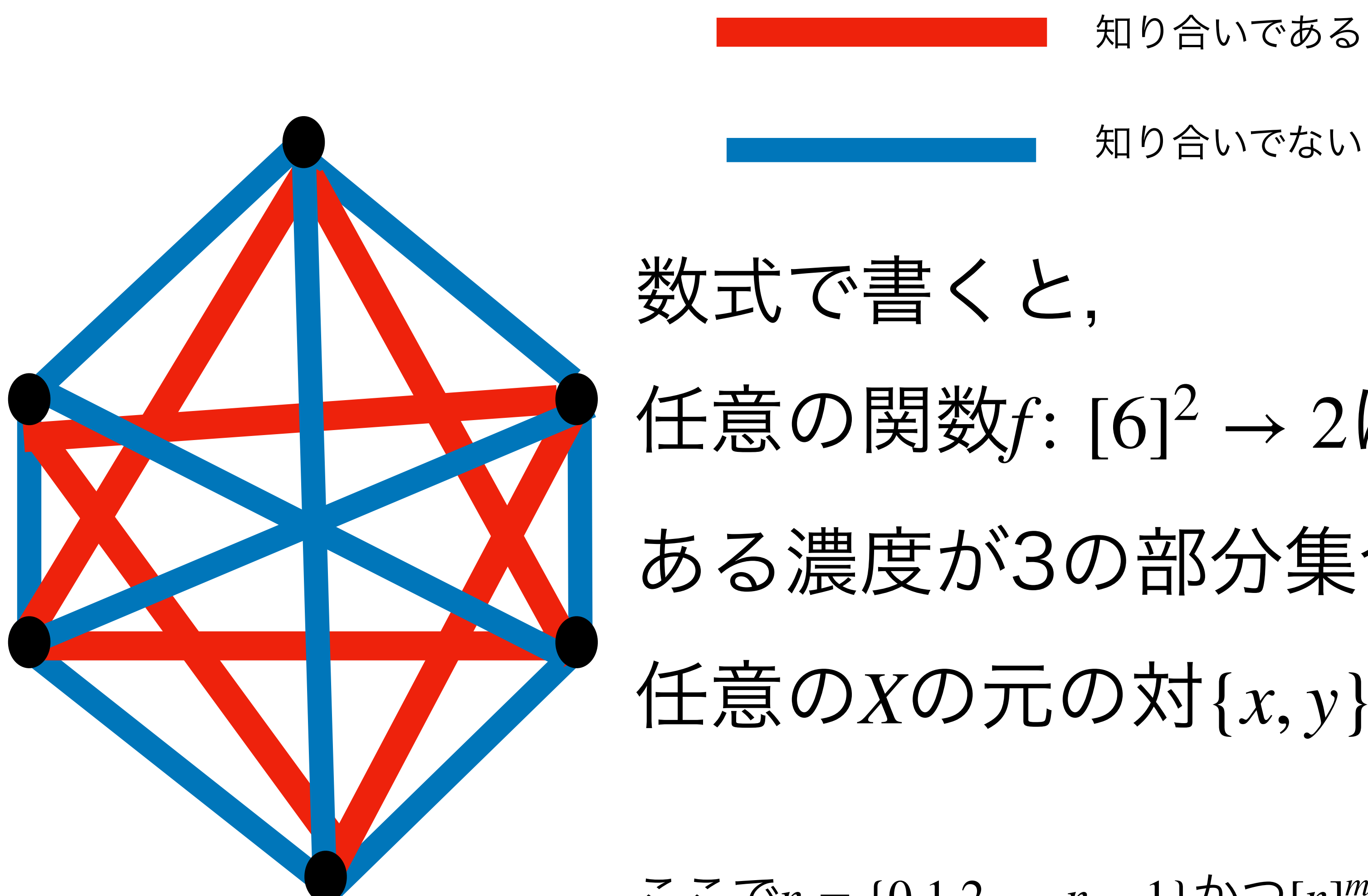
今後X上のイデアルといったら，Fin_Xを含む真のイデアルだけを指し，X上のフィルターといったら，Cofin_Xを含む真のフィルターだけを指す.

したがって，超フィルターと言ったら非単項超フィルターだけを指す.

君はRamseyの定理を知っているか

パーティ問題

- 6人の人が任意に与えられたら，その中から適切に3人を選んでくれば次のどちらかが成立する：「その3人は互いに知り合いである」「その3人は互いに知り合いでない人である」



数式で書くと,

任意の関数f: $[6]^2 \to 2$に対して,

ある濃度が3の部分集合$X \subseteq 6$と$i \in 2$が存在し,

任意のXの元の対$\{x, y\}$について$f(\{x, y\}) = i$となる

ここで$n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$かつ$[n]^m = \{X \subseteq n : |X| = m\}$.

したがって，$6 = \{0,1,2,3,4,5\}, 2 = \{0,1\}$で$[6]^2 = \{X \subseteq 6 : |X| = 2\}$

有限Ramseyの定理

- 実は次が成り立つ

有限Ramseyの定理

自然数m, cが与えられたとする．このときある自然数Nが存在して，任意の関数$f\colon [N]^2 \to c$に対して，ある濃度がmの部分集合$X \subseteq N$と$i \in c$が存在し，任意のXの元の対$\{x, y\}$について$f(\{x, y\}) = i$となる

- 上のようなXを色塗りfの均質集合と言ったりする

無限Ramseyの定理

- 有限Ramseyの定理の無限版も成り立つ：

無限Ramseyの定理

自然数cが与えられたとする．このとき任意の関数 $f\colon [\mathbb{N}]^2 \to c$に対して，ある無限部分集合$X \subseteq \mathbb{N}$と$i \in c$が存在し，任意の$X$の元の対$\{x, y\}$について$f(\{x, y\}) = i$となる

Ramsey超フィルター

定義 (Ramsey超フィルター)

$\mathscr{U}$を$\mathbb{N}$上の超フィルターとする．次の条件を満たすとき，$\mathscr{U}$は**Ramsey超フィルター**であるという：

任意の自然数cと関数f: $[\mathbb{N}]^2 \to c$について，$X \in \mathscr{U}$と$i \in c$が存在し，任意のXの元の対$\{x, y\}$について$f(\{x, y\}) = i$となる

- Ramsey超フィルターの意義はわかりやすいと思う．均質集合がある意味で大きいと言っているので，フィルターの意義で話した通り有限個ならいつでも交わってくれる．

- しかし残念かもしれないが，Ramsey超フィルターの存在はZFCの定理ではなく，ZFCから独立である．ZFCが矛盾しないなら，ZFCにこれが存在するという公理を付け加えても矛盾しないし，存在しないという公理を付け加えても矛盾しないということ．

P-pointとQ-point

定義 (P-point)

$\mathscr{U}$を$\mathbb{N}$上の超フィルターとする．次の条件を満たすとき，$\mathscr{U}$は**P-point**であるという：

$\mathbb{N}$の任意の分割$\langle Y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$について，次のどちらかが成り立つ：

あるnについて$Y_n \in \mathscr{U}$，またはある$X \in \mathscr{U}$があってすべてのnで$X \cap Y_n$が有限集合

定義 (Q-point)

$\mathscr{U}$を$\mathbb{N}$上の超フィルターとする．次の条件を満たすとき，$\mathscr{U}$は**Q-point**であるという：

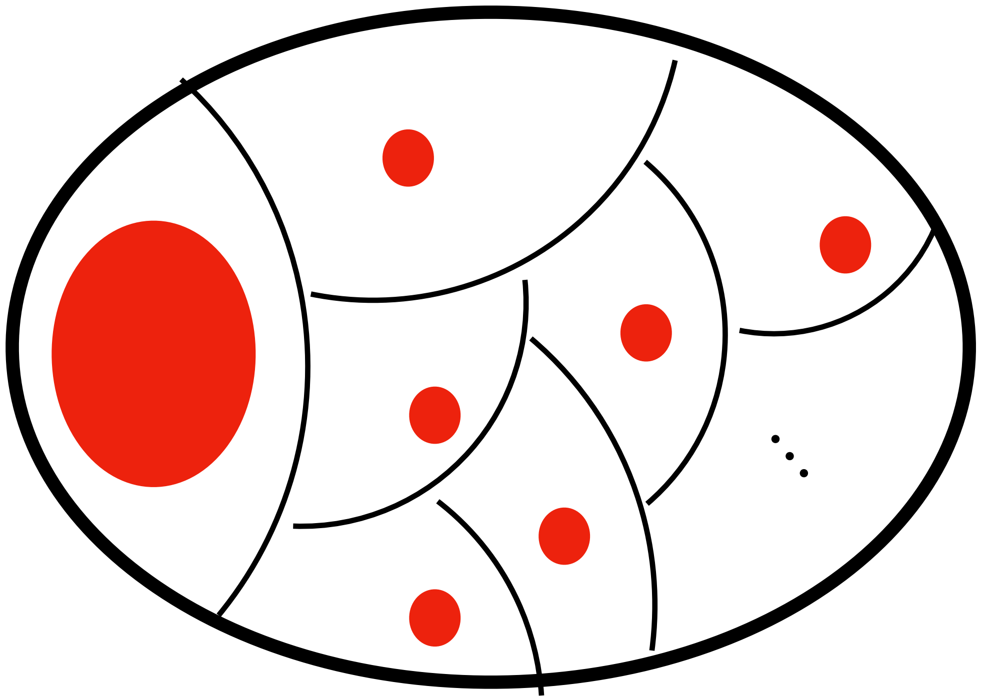
$\mathbb{N}$の任意の有限集合への分割$\langle Y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$について，ある$X \in \mathscr{U}$があって，すべての$n$で$|X \cap Y_n| \leq 1$

P-pointとQ-point

定義 (P-point)

$\mathscr{U}$を$\mathbb{N}$上の超フィルターとする．次の条件を満たすとき，$\mathscr{U}$は**P-point**であるという：

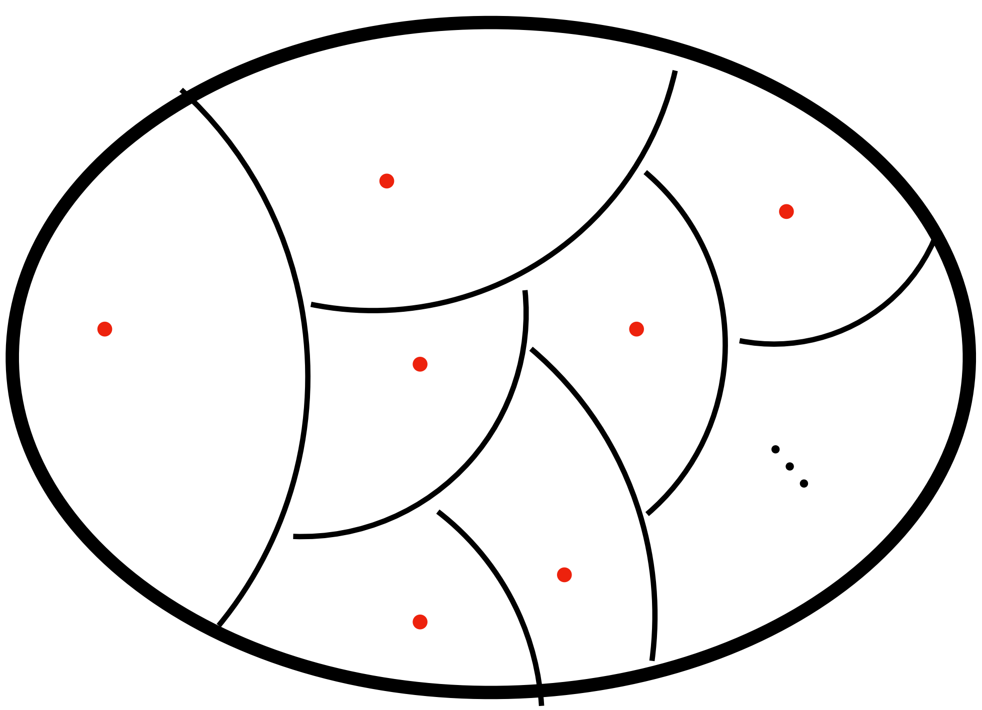
$\mathbb{N}$の任意の分割$\langle Y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$について，次のどちらかが成り立つ：ある$n$について$Y_n \in \mathscr{U}$，またはある$X \in \mathscr{U}$があってすべての$n$で$X \cap Y_n$が有限集合



定義 (Q-point)

$\mathscr{U}$を$\mathbb{N}$上の超フィルターとする．次の条件を満たすとき，$\mathscr{U}$は**Q-point**であるという：

$\mathbb{N}$の任意の有限集合への分割$\langle Y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$について，ある$X \in \mathscr{U}$があって，すべての$n$で$|X \cap Y_n| \le 1$



RamseyとP-point, Q-pointの関係

定理

超フィルター$\mathscr{U}$について次は同値.

(1)$\mathscr{U}$はRamsey超フィルターである

(2)$\mathscr{U}$はP-pointかつQ-pointである

(証明) (2)→(1)の証明は手間がかかるので省略する.

(1)→(2)の証明.　$\mathscr{U}$をRamsey超フィルターとする.

次の主張を示せばP-pointとQ-pointが同時に示せる.

「$\mathbb{N}$の任意の分割$\langle Y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$について，次のどちらかが成り立つ：ある$n$について$Y_n \in \mathscr{U}$，またはある$X \in \mathscr{U}$があってすべての$n$で$|X \cap Y_n| \leq 1$」

RamseyとP-point, Q-pointの関係

定理

超フィルター$\mathscr{U}$について次は同値.

(1)$\mathscr{U}$はRamsey超フィルターである

(2)$\mathscr{U}$はP-pointかつQ-pointである

$\mathbb{N}$の任意の分割$\langle Y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$をとる.

$f\colon [\mathbb{N}]^2 \to 2$を$f(x, y)$は$x$と$y$が分割$\langle Y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$に関して同じピースに入っているとき1，そうでないとき0と定める．Ramseyより$X \in \mathscr{U}$と$i \in 2$がとれて$f(x, y) = i$ (for all $x, y \in X$).

$i = 0$ならある一つのピースが大きいことを意味する．$i = 1$ならXの元はそれぞれ違うピースに入っているので，$|X \cap Y_n| \leq 1$ (for all n)が従う． ■

§1. 各種定義と基本性質

§2. イデアルを使った特徴づけ

§3. 各性質を持つ超フィルターが存在するための十分条件

§4. 可算集合上のイデアルの基数不変量およびKatětov順序

いくつかの具体的なイデアル

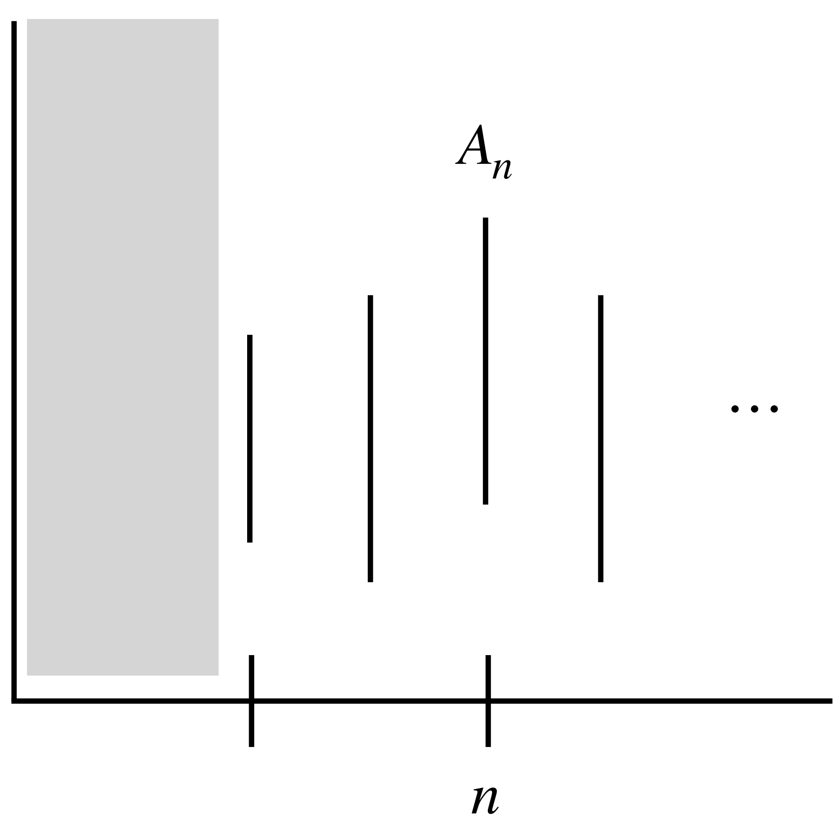
定義

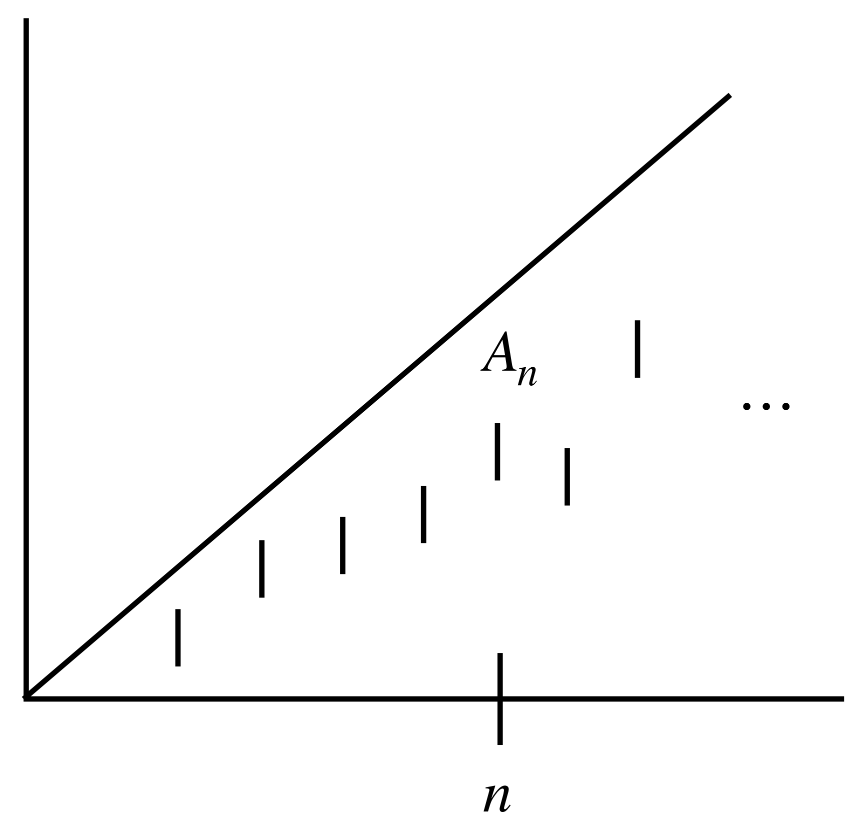
$A_n = \{m : (n, m) \in A\}$

$\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin} = \{A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} :$ 有限個を除いたすべてのnでA_nが有限集合$\}$

$\mathrm{ED} = \{A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} :$ あるℓが存在して有限個を除いたすべてのnで$|A_n| \leq \ell\}$

$\mathrm{ED}_{\mathrm{fin}} = \{A \subseteq \Delta : A \in \mathrm{ED}\}, \ \Delta = \{(n, m) : m \leq n\}$





Katětov順序とKatětov-Blass順序

定義 (Katětov順序)

$\mathscr{I}, \mathscr{J}$をそれぞれX, Y上のイデアルとする.

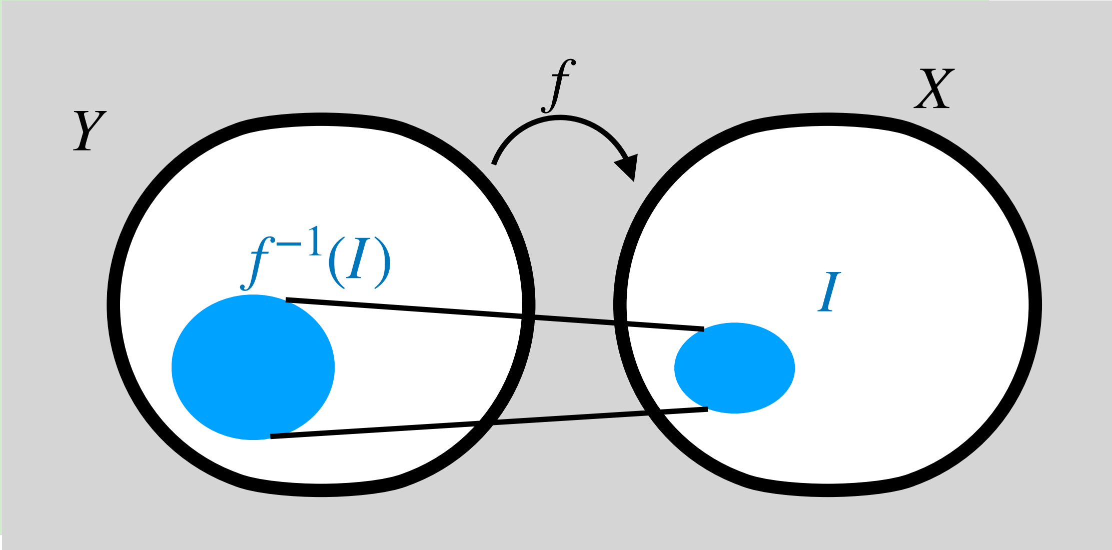
次の条件を満たすとき，$\mathscr{I} \leq_{\mathrm{K}} \mathscr{J}$と書く (Katětov順序)

　ある写像$f\colon Y \to X$が存在して，任意の$I \in \mathscr{I}$について$f^{-1}(I) \in \mathscr{J}$

次の条件を満たすとき，$\mathscr{I} \leq_{\mathrm{KB}} \mathscr{J}$と書

　ある有限対一の写像$f\colon Y \to X$が存在

て$f^{-1}(I) \in \mathscr{J}$



各$x \in X$の逆像$f^{-1}(\{x\})$が有限集合

Katětov順序のかんたんな考察

- $\mathscr{I} \leq_{\mathrm{KB}} \mathscr{J}$ なら $\mathscr{I} \leq_{\mathrm{K}} \mathscr{J}$ である.

- X と Y が同じで2つのイデアル $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ に包含関係 $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{J}$ があれば，恒等写像 $\mathrm{id}\colon X \to X$ を考えることにより，$\mathscr{I} \leq_{\mathrm{KB}} \mathscr{J}$ がわかる.

- $\mathrm{ED} \subseteq \mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin}$ なので $\mathrm{ED} \leq_{\mathrm{KB}} \mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin}$ である.

- 包含射 $i\colon \Delta \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を考えれば，$\mathrm{ED} \leq_{\mathrm{KB}} \mathrm{ED}_{\mathrm{fin}}$ もわかる.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin} & & \mathrm{ED}_{\mathrm{fin}} \\ & \mathrm{ED} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

イデアルによる特徴づけ

定理

超フィルター$\mathscr{U}$について次は同値.

(1) $\mathscr{U}$はP-point

(2) $\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin} \not\leq_{\mathrm{K}} \mathscr{U}^*$

これだけやる

定理

超フィルター$\mathscr{U}$について次は同値.

(1) $\mathscr{U}$はQ-point

(2) $\mathrm{ED}_{\mathrm{fin}} \not\leq_{\mathrm{KB}} \mathscr{U}^*$

定理

超フィルター$\mathscr{U}$について次は同値.

(1) $\mathscr{U}$はRamsey超フィルター

(2) $\mathrm{ED} \not\leq_{\mathrm{K}} \mathscr{U}^*$

P-pointの特徴づけ

定理

超フィルター$\mathscr{U}$について次は同値.

(1)$\mathscr{U}$はP-point (∀partition $\langle Y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$)[either $Y_n \in \mathscr{U}$ (for some n) or $(\exists U \in \mathscr{U})$ $[|Y_n \cap U| < \aleph_0]$ (for all n)]

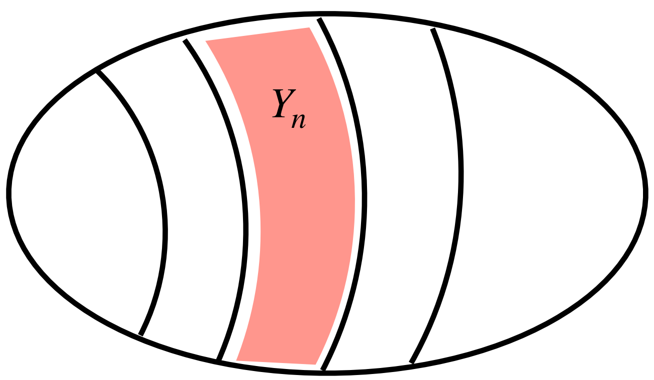
(2)$\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin} \not\leq_{\mathrm{K}} \mathscr{U}^*$ $(\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N})(\exists X \in \mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin})[f^{-1}[X] \in \mathscr{U}]$

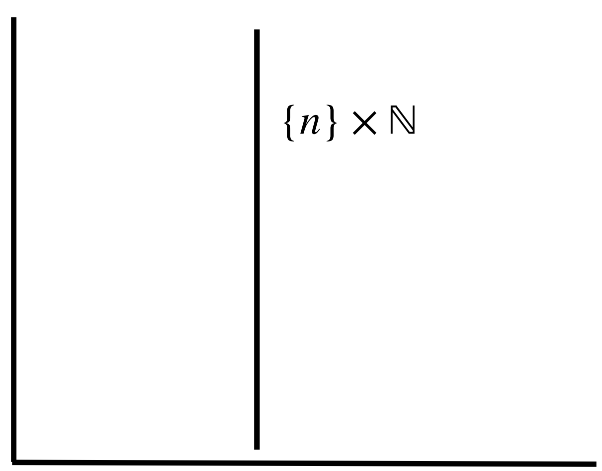
(証明) (1)→(2). f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$を任意にとる．分割$\langle Y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$で$Y_n = f^{-1}(\{n\} \times \mathbb{N})$となるものを考える．$\mathscr{U}$がP-pointなので,

Either $f^{-1}(\{n\} \times \mathbb{N}) \in \mathscr{U}$ (for some n)

or $(\exists U \in \mathscr{U})$ $[|f^{-1}(\{n\} \times \mathbb{N}) \cap U| < \aleph_0$ for all $n]$.

前者なら$\{n\} \times \mathbb{N} \in \mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin}$なことと合わせて結論を得る.





P-pointの特徴づけ

定理

超フィルター$\mathscr{U}$について次は同値.

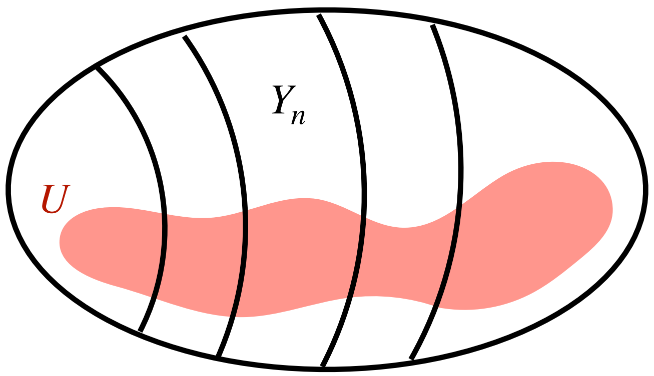
(1)$\mathscr{U}$はP-point (∀partition $\langle Y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$)[either $Y_n \in \mathscr{U}$ (for some n) or $(\exists U \in \mathscr{U})$ $[|Y_n \cap U| < \aleph_0]$ (for all n)]

(2)$\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin} \not\leq_{\mathrm{K}} \mathscr{U}^*$ $(\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N})(\exists X \in \mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin})[f^{-1}[X] \in \mathscr{U}]$

後者：ある$U \in \mathscr{U}$について

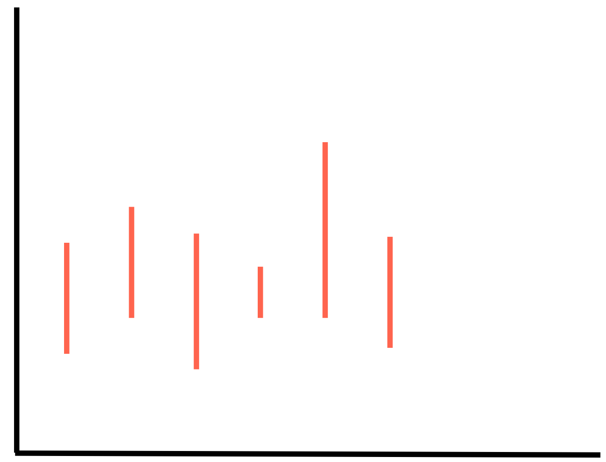
$|f^{-1}(\{n\} \times \mathbb{N}) \cap U| < \aleph_0$ for all nだとする．すると

$f(f^{-1}(\{n\} \times \mathbb{N}) \cap U) = (\{n\} \times \mathbb{N}) \cap f(U)$も有限集合.



よって$f(U)$は$\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin}$のメンバーかつ,

$f^{-1}f(U) \supseteq U \in \mathscr{U}$なのでこの場合も示したい結論が導けた.　(1)→(2)の証明終了



P-pointの特徴づけ

定理

超フィルター$\mathscr{U}$について次は同値.

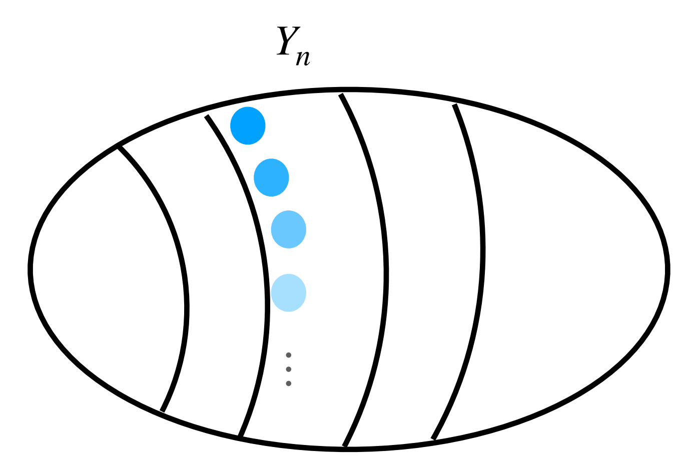
(1)$\mathscr{U}$はP-point　(∀partition $\langle Y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$)[either $Y_n \in \mathscr{U}$ (for some n) or $(\exists U \in \mathscr{U})$ $[|Y_n \cap U| < \aleph_0]$ (for all n)]

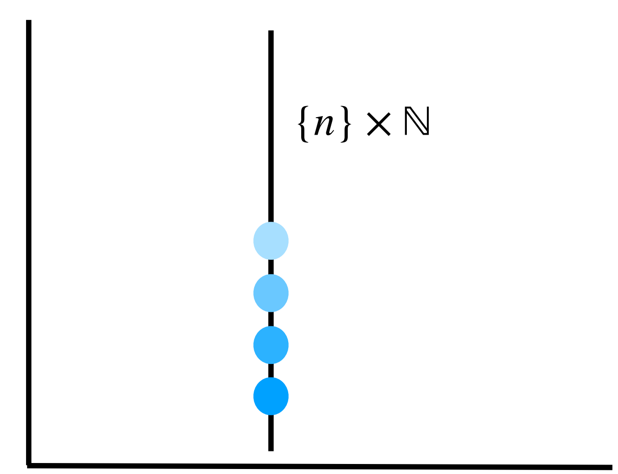
(2)$\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin} \not\leq_{\mathrm{K}} \mathscr{U}^*$　$(\forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N})(\exists X \in \mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin})[f^{-1}[X] \in \mathscr{U}]$

(2) → (1)の証明．分割$\langle Y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$を任意にとる.

一般性を失うが，すべてのピースY_nは無限だとして話を進める.

f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$を$f(m) = (n, k)$ if mはY_nのk番目の元だとして定める.





P-pointの特徴づけ

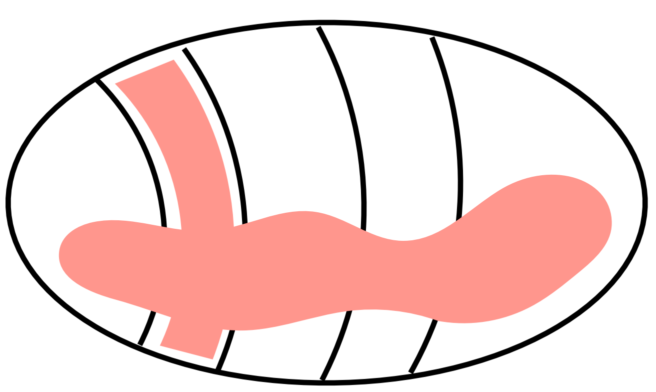
定理

超フィルター$\mathcal{U}$について次は同値.

(1)$\mathcal{U}$はP-point　$(\forall$partition $\langle Y_n : n \in \mathbb{N}\rangle)$[either $Y_n \in \mathcal{U}$ (for some n) or $(\exists U \in \mathcal{U})$ $[\,|Y_n \cap U| < \aleph_0]$ (for all n)]

(2)$\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin} \not\leq_{\mathrm{K}} \mathcal{U}^*$　$(\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N})(\exists X \in \mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin})[f^{-1}[X] \in \mathcal{U}]$

(2)を仮定しているので，$X \in \mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin}$がとれて，$f^{-1}(X) \in \mathcal{U}$.



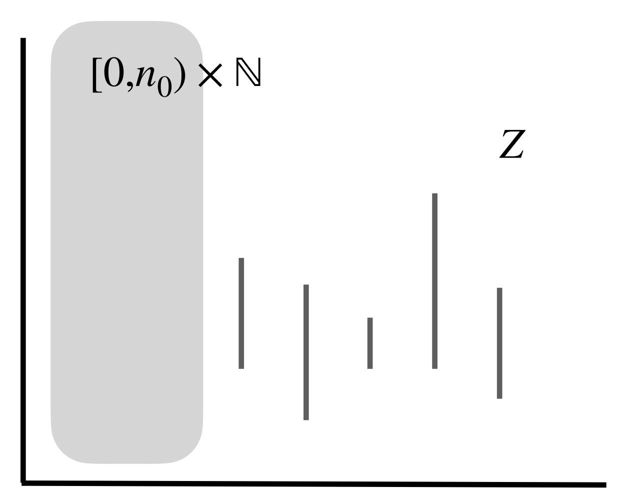
$\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin}$の定義より$X \subseteq [0,n_0) \times \mathbb{N} \cup Z$で，$|Z \cap \{n\} \times \mathbb{N}| < \aleph_0$ for all nとなる．よって，$f^{-1}([0,n_0) \times \mathbb{N}) \in \mathcal{U}$または$f^{-1}(Z) \in \mathcal{U}$.

前者ならある$i < n_0$があって，$f^{-1}(\{i\} \times \mathbb{N}) \in \mathcal{U}$でOK.

後者なら，fの単射性より$|f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(\{n\} \times \mathbb{N})| < \aleph_0$.

$f^{-1}(Z) \in \mathcal{U}$と$f^{-1}(\{n\} \times \mathbb{N}) = Y_n$によりほしい結論を得る.

(2)→(1)の証明終了 ■



§1. 各種定義と基本性質

§2. イデアルを使った特徴づけ

§3. 各性質を持つ超フィルターが存在するための十分条件

§4. 可算集合上のイデアルの基数不変量およびKatětov順序

Ramsey超フィルターなどの存在

定理 (Ketonen; Canjar)

(1)$\mathrm{cov}(\mathscr{M}) = \mathfrak{c}$ならばRamsey超フィルターが存在する

(2)$\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ならばP-pointが存在する

(3)$\mathrm{cov}(\mathscr{M}) = \mathfrak{d}$ならばQ-pointが存在する

どの証明も超フィルターの超限再帰による構成による.

その系

系

$\mathfrak{c} \leq \aleph_2$ならば，P-pointかQ-pointの少なくとも一方が存在する.

証明) 仮定のもとで$\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$か$\mathfrak{d} = \aleph_1$である.

前者ならP-pointが存在する．いつでも$\aleph_1 \leq \mathrm{cov}(\mathscr{M}) \leq \mathfrak{d}$が成り立つことから，後者は$\mathrm{cov}(\mathscr{M}) = \mathfrak{d}$を含意するので，特にQ-pointが存在する． ■

実は「P-pointもQ-pointも存在しない集合論のモデル」はまだ見つかっていない．この系が教えているのはそういうモデルを見つけるには$\mathfrak{c} \geq \aleph_3$であるモデルの中から探さないといけないことである.

モデル

Ramsey	P-point	Q-point	モデル
×	×	×	未解決
×	×	○	Silverモデル
×	○	×	Laverモデル; Millerモデル
×	○	○	randomモデル
○	×	×	なし
○	×	○	なし
○	○	×	なし
○	○	○	CHのモデル; Cohenモデルなど

§1. 各種定義と基本性質

§2. イデアルを使った特徴づけ

§3. 各性質を持つ超フィルターが存在するための十分条件

§4. 可算集合上のイデアルの基数不変量およびKatětov順序

$\mathbb{N}$上のイデアルの基数不変量

- 集合A, Bについて$A \subseteq^* B$とは$A \setminus B$が有限集合となることと定める
- $\mathbb{N}$上のイデアル$\mathscr{I}$について，次の4つの基数不変量を定める
  - $\mathrm{add}^*(\mathscr{I}) = \min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}, \forall X \in \mathscr{I}\, \exists A \in \mathscr{A}(A \not\subseteq^* X)\}$
  - $\mathrm{cof}^*(\mathscr{I}) = \min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}, \forall X \in \mathscr{I}\, \exists A \in \mathscr{A}(X \subseteq^* A)\}$
  - $\mathrm{cov}^*(\mathscr{I}) = \min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}, \forall X \in [\mathbb{N}]^{\aleph_0}\, \exists A \in \mathscr{A}(|A \cap X| = \aleph_0)\}$
  - $\mathrm{non}^*(\mathscr{I}) = \min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subseteq [\mathbb{N}]^{\aleph_0}, \forall X \in \mathscr{I}\, \exists A \in \mathscr{A}(|A \cap X| < \aleph_0)\}$

$\mathbb{N}$上のイデアルの基数不変量

- $\mathrm{add}^*(\mathscr{I}) = \min\{\,|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}, \forall X \in \mathscr{I}\, \exists A \in \mathscr{A}(A \not\subseteq^* X)\}$
- $\mathrm{cof}^*(\mathscr{I}) = \min\{\,|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}, \forall X \in \mathscr{I}\, \exists A \in \mathscr{A}(X \subseteq^* A)\}$
- $\mathrm{cov}^*(\mathscr{I}) = \min\{\,|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}, \forall X \in [\mathbb{N}]^{\aleph_0}\, \exists A \in \mathscr{A}(\,|A \cap X| = \aleph_0)\}$
- $\mathrm{non}^*(\mathscr{I}) = \min\{\,|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subseteq [\mathbb{N}]^{\aleph_0}, \forall X \in \mathscr{I}\, \exists A \in \mathscr{A}(\,|A \cap X| < \aleph_0)\}$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{cov}^*(\mathscr{I}) \arrow[dr] & & \\
\aleph_0 \arrow[r] & \mathrm{add}^*(\mathscr{I}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{cof}^*(\mathscr{I}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathrm{non}^*(\mathscr{I}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{cov}^*(\mathscr{I})$が定義されていることのためや,

$\mathrm{non}^*(\mathscr{I})$が1になったりしないために

tallという条件を課す.

$\mathscr{I}$がtall :⇔ $\forall X \in [\mathbb{N}]^{\aleph_0}\, \exists I \in \mathscr{I}(\,|X \cap I| = \aleph_0)$

cov*, non*とKatětov順序

命題

$\mathcal{I} \leq_{\mathrm{K}} \mathcal{J}$ならば$\mathrm{cov}^*(\mathcal{J}) \leq \mathrm{cov}^*(\mathcal{I})$.

$\mathcal{I} \leq_{\mathrm{KB}} \mathcal{J}$ならば$\mathrm{non}^*(\mathcal{I}) \leq \mathrm{non}^*(\mathcal{J})$.

3つのイデアルに対する基数不変量

定理

- $\mathrm{add}^*(\mathsf{Fin} \times \mathsf{Fin}) = \mathrm{non}^*(\mathsf{Fin} \times \mathsf{Fin}) = \aleph_0$,

  $\mathrm{cov}^*(\mathsf{Fin} \times \mathsf{Fin}) = \mathfrak{b}, \mathrm{cof}^*(\mathsf{Fin} \times \mathsf{Fin}) = \mathfrak{d}$
- $\mathrm{add}^*(\mathsf{ED}) = \mathrm{non}^*(\mathsf{ED}) = \aleph_0, \mathrm{cov}^*(\mathsf{ED}) = \mathrm{non}(\mathscr{M}), \mathrm{cof}^*(\mathsf{ED}) = \mathfrak{c}$
- $\mathrm{cov}(\mathscr{M}) = \min(\mathfrak{d}, \mathrm{non}^*(\mathsf{ED}_{\mathsf{fin}})),\ \mathrm{non}(\mathscr{M}) = \max(\mathfrak{b}, \mathrm{cov}^*(\mathsf{ED}_{\mathsf{fin}}))$

具体的なイデアルをもっと

定義

- $\mathsf{Z} = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} = 0 \right\}$ (density zero ideal)
- $\mathrm{I}_{1/n} = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n\in A} \frac{1}{n+1} < \infty \right\}$ (summable ideal for the function $1/n$)
- convは$\mathbb{Q} \cap [0,1]$上のイデアルで$\mathbb{Q} \cap [0,1]$内の点列で$[0,1]$の中に収束値を持つようなものたちから生成されるイデアル
- nwd $= \{A \subseteq \mathbb{Q} : A$は$\mathbb{R}$内でnowhere dense$\}$
- Rは$\mathbb{N}$上のイデアルで，$\mathbb{N}$を頂点集合とするランダムグラフを一つ固定したとき，その均質集合から生成されるもの
- Sは可算集合$\Omega = \{U \in \mathrm{Clop}(2^{\mathbb{N}}) : \mu(U) = 1/2\}$上のイデアルで$\{U \in \Omega : x \in U\}$ (for $x \in 2^{\mathbb{N}}$)で生成されるもの (Solecki's ideal)

ランダムグラフ

- 次の性質を満たす無向グラフ$G=(V,E)$を**ランダムグラフ**という

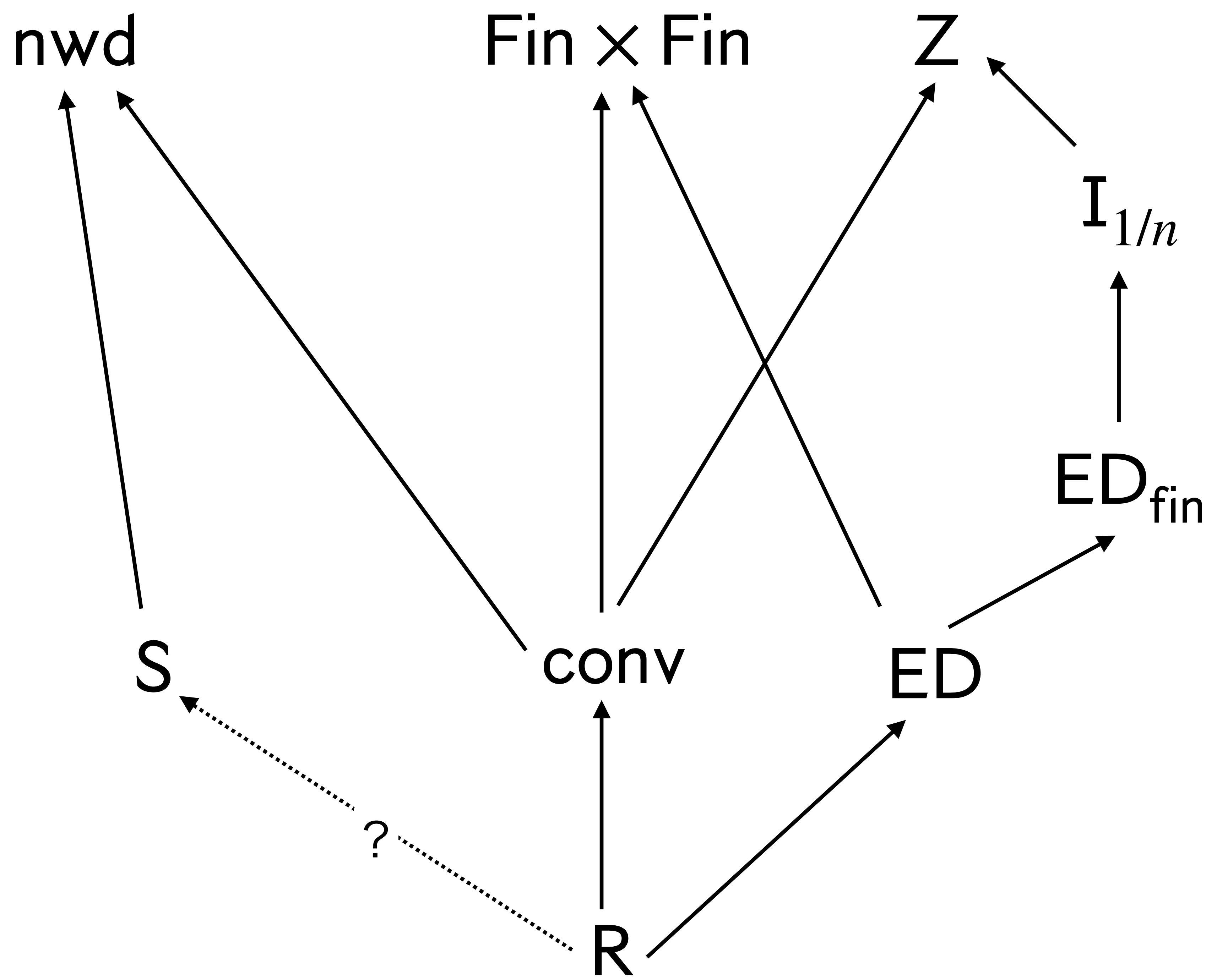
  任意のdisjointな頂点の有限集合$A,B\subseteq V$についてある頂点$c\in V$があって，cはAの中のすべての頂点と繋がっていて，Bの中のどの頂点とも繋がっていない.

- 次が知られている

  $|V|=\aleph_0$のランダムグラフ (可算ランダムグラフ)は同型を除いて一意的に存在する.

  可算ランダムグラフには任意のたかだか可算なグラフが埋め込める

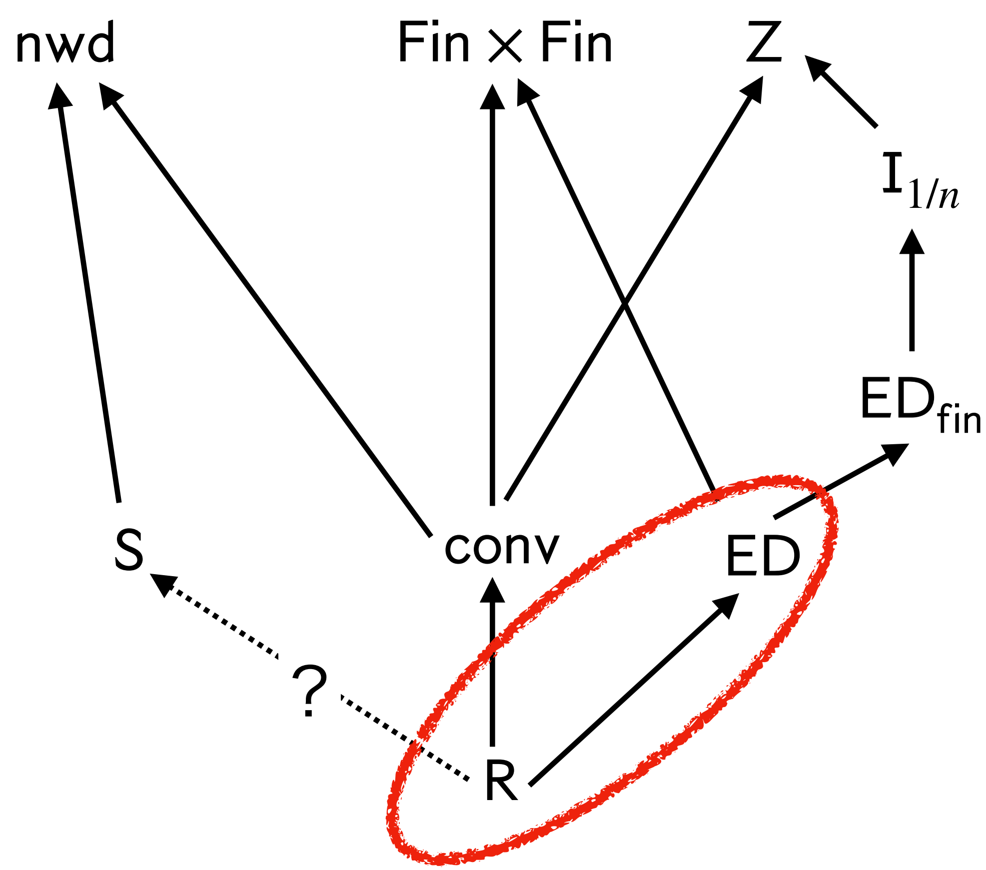
具体的なイデアルたちのKatětov順序



R $\leq_{\mathrm{KB}}$ EDの証明

- ここから先程の図式のいくつかの矢印 (Katětov順序)を証明してみよう.

- まずは，R $\leq_{\mathrm{KB}}$ EDから.



R $\leq_{\mathrm{KB}}$ EDの証明

- 示さないといけないのは有限対一の写像$f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$が存在して，任意の$X \in$ Rについて$f^{-1}(X) \in$ EDとなることである．

- グラフ$G = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, E)$を$(m, n)E(k, l)$ iff $m = k$と定める．

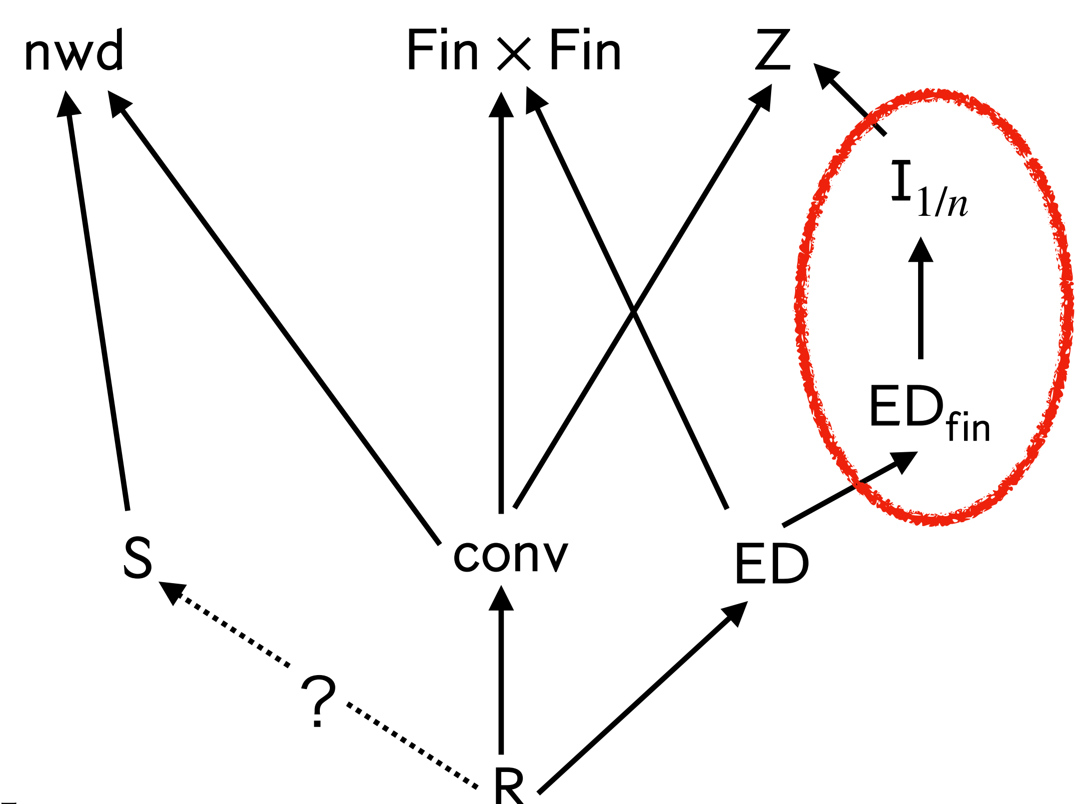
- ランダムグラフの普遍性より，グラフGはランダムグラフに埋め込める．その埋め込み写像を$f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$とする．

- $X \subseteq \mathbb{N}$がランダムグラフの均質集合とする．もしXが完全グラフなのであれば，$f^{-1}(X)$は一本の垂直な切り口であってEDに属する．もしXが反完全グラフなのであれば，$f^{-1}(X)$は各垂直な切り口との交わりがたかだか1点であるのでやはりEDに属する．

- これで示せた． ■

Submeasure，Soleckiの定理，$\mathrm{ED_{fin}} \le_{\mathrm{KB}} \mathrm{I}_{1/n}$

- $\mathrm{ED_{fin}} \le_{\mathrm{KB}} \mathrm{I}_{1/n}$の証明をしてみよう.
- ところがこれはもっと一般的な定理として証明できる (解析的かつtallなPイデアル$\mathscr{I}$について，$\mathrm{ED_{fin}} \le_{\mathrm{KB}} \mathscr{I}$)
- そのために必要な概念であるsubmeasureやPイデアルの概念を導入する



Submeasure

- $\varphi\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$は次の条件を満たすとき，**submeasure**といわれる
  - $\varphi(\varnothing) = 0$
  - $X \subseteq Y$ならば$\varphi(X) \leq \varphi(Y)$
  - $\varphi(X \cup Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y)$
  - 任意の$n \in \mathbb{N}$で$\varphi(\{n\}) < \infty$

Lower semicontinuous submeasure

- Submeasure φは次の条件を満たすときlower semicontinuousだと言われる：
  - $\varphi(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A \cap [0,n))$
- Lower semicontinuous submeasure φに対して次の二つのイデアルが定まる：
  - $\mathrm{Fin}(\varphi) = \{X \subseteq \mathbb{N} : \varphi(X) < \infty\}$
  - $\mathrm{Exh}(\varphi) = \{X \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \varphi(X \cap [n,\infty)) = 0\}$

Submeasureの例

- submeasure φを$\varphi(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1}$で定めると

  $\mathtt{I}_{1/n} = \mathrm{Fin}(\varphi) = \mathrm{Exh}(\varphi)$

- submeasure φを$\varphi(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap [2^n, 2^{n+1})|}{2^n}$で定めると$\mathtt{Z} = \mathrm{Exh}(\varphi)$

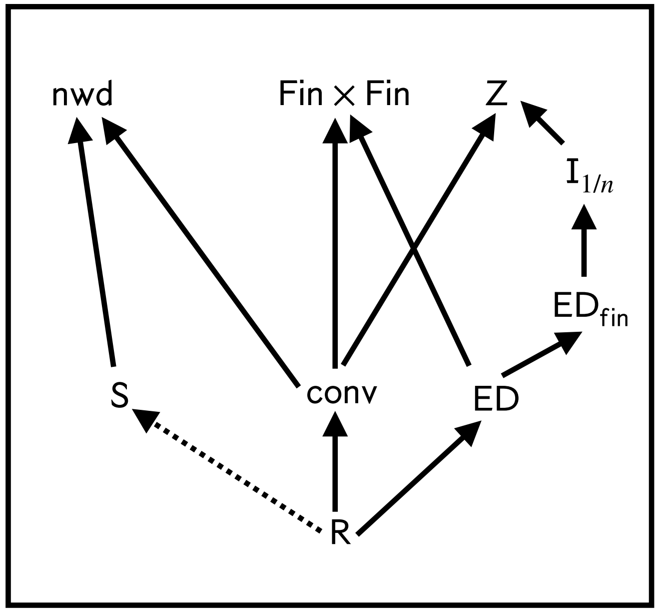
Pイデアル

- イデアル$\mathscr{I}$がPイデアルであるとは，$\mathrm{add}^*(\mathscr{I}) > \aleph_0$を満たすことだとする.

- すなわち，可算個のイデアルのメンバー$I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$があったらあるイデアルのメンバー$I$がとれて任意の$n$で$I_n \subseteq^* I$となることを意味する (ある意味での可算加法性)

- 超フィルター$\mathscr{U}$について$\mathscr{U}$がP-pointであることは，その双対イデアルがPイデアルであることと同値である

- 前の図式でPイデアルであるのは$\mathrm{I}_{1/n}$とZであり，それらのみ.



MazurとSoleckiの定理

定理

$\mathscr{I}$を$\mathbb{N}$上のイデアルとする.

(Mazur) $\mathscr{I}$がF_σイデアルであることはあるlower semicontinuous submeasure φについて$\mathscr{I} = \mathrm{Fin}(\varphi)$となるとなることと同値

(Solecki) $\mathscr{I}$が解析的Pイデアルであることはあるlower semicontinuous submeasure φについて$\mathscr{I} = \mathrm{Exh}(\varphi)$となるとなることと同値

$A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$が解析的とはあるBorel集合$B \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$の射影で書ける事を言う

いくつかのKatětov順序の証明

定理

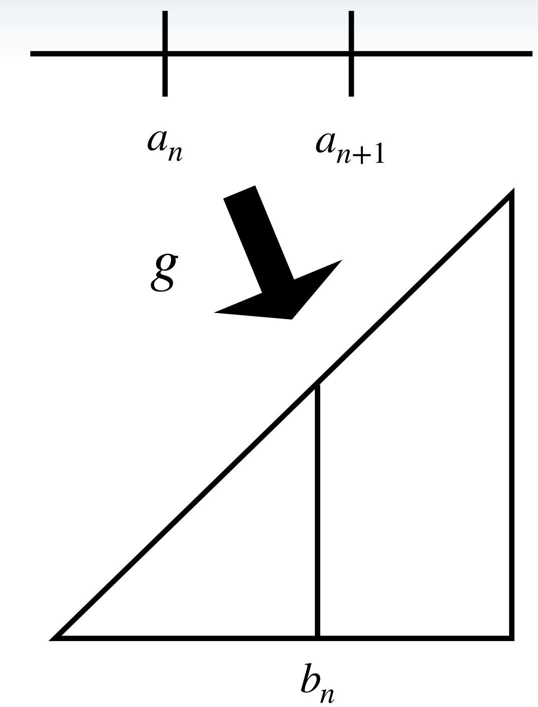
解析的かつtallなPイデアル$\mathcal{I}$について，$\mathsf{ED}_{\mathsf{fin}} \leq_{\mathrm{KB}} \mathcal{I}$

証明

- $\mathcal{I} = \mathrm{Exh}(\varphi)$なるlower semicontinuous submeasure φをとる(Soleckiの定理).
- $\mathcal{I}$がtallであることから，$\lim_{n\to\infty} \varphi(\{n\}) = 0$が従う.
- よって単調増加な自然数の列$\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$であって，$\varphi(\{m\}) < 2^{-n}$ for $m \geq a_n$なものが取れる

いくつかのKatětov順序の証明

解析的かつtallなPイデアル$\mathscr{I}$について，$\mathrm{ED_{fin}} \leq_{\mathrm{KB}} \mathscr{I}$



証明

- $\mathscr{I} = \mathrm{Exh}(\varphi)$なるlower semicontinuous submeasure φをとる.
- $\mathscr{I}$がtallであることから，$\lim_{n\to\infty} \varphi(\{n\}) = 0$が従う.
- よって単調増加な自然数の列$\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$であって，$\varphi(\{m\}) < 2^{-n}$ for $m \geq a_n$なものが取れる
- $g : \mathbb{N} \to \triangle$ を単射な写像で各区間$[a_n, a_{n+1})$を互いに異なる垂直な$\triangle$の切り口 $\{(b_n, i) : i \leq b_n\}$の中に送るものとする.
- この関数gは$\mathrm{ED_{fin}} \leq_{KB} \mathscr{I}$の証拠である.
- 実際，$A \in \mathrm{ED_{fin}}$としよう．するとある自然数kが存在して，任意のnで$|A \cap \{(b_n, i) : i \leq b_n\}| \leq k$が成り立つ.

いくつかのKatětov順序の証明

解析的かつtallなPイデアル$\mathscr{I}$について，$\mathrm{ED_{fin}} \leq_{\mathrm{KB}} \mathscr{I}$

証明

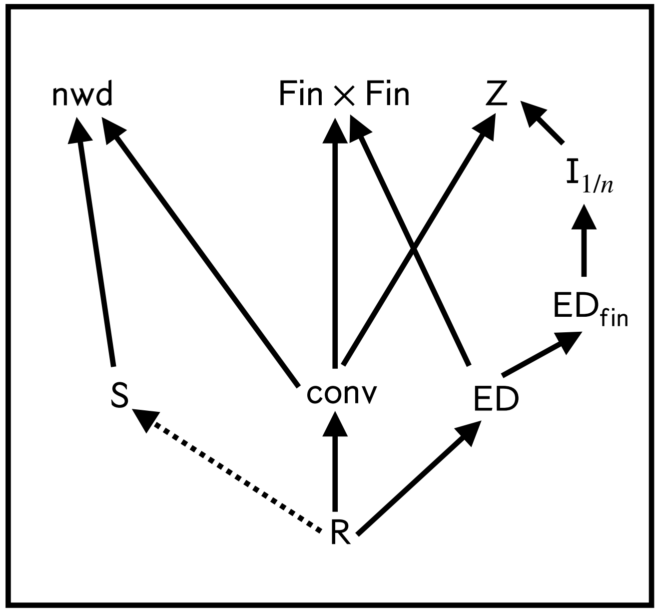
- $\mathscr{I} = \mathrm{Exh}(\varphi)$なるlower semicontinuous submeasure φをとる.
- $\mathscr{I}$がtallであることから，$\lim_{n\to\infty} \varphi(\{n\}) = 0$が従う.
- よって単調増加な自然数の列$\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$であって，$\varphi(\{m\}) < 2^{-n}$ for $m \geq a_n$なものが取れる
- $g : \mathbb{N} \to \Delta$を単射な写像で各区間$[a_n, a_{n+1})$を互いに異なる垂直な$\Delta$の切り口$\{(b_n, i) : i \leq b_n\}$の中に送るものとする.
- この関数gは$\mathrm{ED_{fin}} \leq_{KB} \mathscr{I}$の証拠である.
- 実際，$A \in \mathrm{ED_{fin}}$としよう．するとある自然数kが存在して，$|A \cap \{(b_n, i) : i \leq b_n\}| \leq k$が成り立つ.
- $\varphi(g^{-1}(A) \cap [a_n, a_{n+1})) \leq k \cdot 2^{-n}$が(二つの青線より)わかる.
- $\varepsilon > 0$を固定する．すると十分大な任意のmについて$\varphi(g^{-1}(A) \setminus m) \leq \varepsilon$が従う.
- よって$g^{-1}(A) \in \mathrm{Exh}(\varphi)$. ■

未解決問題

- R $\leq_{\mathrm{K}}$ Sか？

- 次はZFCの定理か？：あるBorelなイデアル$\mathscr{I}$と超フィルター$\mathscr{U}$が存在し，$\mathscr{I} \not\leq_K \mathscr{U}^*$か？

  - $\mathscr{I}$ = Fin × Finでは無理なことは見た通り (P-pointが存在しないことがありえるので)．nwdでも無理なことが知られている．調べるべきは$\mathscr{I}$ = Z．なお，$\mathscr{I}$がF_σイデアル (たとえば$\mathrm{I}_{1/n}$) のとき無理なことが2021年にCancinoにより示されている．



まとめ

- 超フィルターが「Ramsey超フィルター」「P-point」「Q-point」であるという条件をイデアルの言葉で特徴づけた
- 「Ramsey超フィルター」「P-point」「Q-point」が存在するための十分条件を挙げた
- 関連話題として，$\mathbb{N}$上のイデアルの基数不変量についてKatětov順序と絡めて話した

参考文献

- Bartoszynski, Tomek, and Haim Judah. Set Theory: on the structure of the real line. CRC Press, 1995.
- Brendle, Jörg, and Jana Flašková. "Generic existence of ultrafilters on the natural numbers." Fundamenta Mathematicae 236 (2017): 201-245.
- Flašková, Jana. "Description of some ultrafilters via I-ultrafilters." RIMS Kôkyûroku 1619 (2008): 20-31.
- Hernández-Hernández, Fernando, and Michael Hrušák. "Cardinal Invariants of Analytic P-Ideals." Canadian Journal of Mathematics 59.3 (2007): 575-595.
- Hrusák, Michael. "Combinatorics of filters and ideals." (2009).
- Hrušák, Michael. "Katětov order on Borel ideals." Archive for Mathematical Logic 56.7-8 (2017): 831-847.