基数不変量入門

山添隆志

自然数よりも実数の方が真に多く存在することはよく知られた事実であり, このことは集合 A の大きさを $|A|$ で表して $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ と表すことができる. 連続体仮説は, 自然数と実数のちょうど中間の大きさを持つ無限集合はないだろうという予想, すなわち $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$ となる集合 A は存在しないはずだという予想である. 驚くべきことであるが, 連続体仮説は Gödel(1940) と Cohen(1963) によって証明も反証もできない命題であることが証明された.

この連続体仮説の解決を契機に発展した分野が, 本講演のテーマである基数不変量の分野である. 例えば, "ルベーグ測度 0 の集合をどのくらい集めたら実数全体を覆うことができるか" という問題を考える. ルベーグ測度の σ 加法性より可算個 (=$|\mathbb{N}|$ 個) では足りず, 1 つの実数のみからなる集合はルベーグ測度 0 であり, $\bigcup_{r\in\mathbb{R}}\{r\} = \mathbb{R}$ なので $|\mathbb{R}|$ 個あれば足りる. つまり, 必要な個数を $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ と書くと $|\mathbb{N}| < \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq |\mathbb{R}|$ であることがこの観察からわかる. この $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ のように, $|\mathbb{N}| < \mathfrak{x} \leq |\mathbb{R}|$ となるような定義可能な量 $\mathfrak{x}$ を基数不変量と呼ぶ. 引き続き $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ の例で, もし連続体仮説が成り立ったとすると, $|\mathbb{N}| < \mathrm{cov}(\mathcal{N}) < |\mathbb{R}|$ とはならないため $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = |\mathbb{R}|$ となってしまい, この "ルベーグ測度 0 の集合をどのくらい集めると実数全体を覆うことができるか" という問題はつまらない問題になってしまう. しかし, Cohen によって連続体仮説は成り立たないこともあり得ること, すなわち連続体仮説が証明不可能であることが証明されたため, この問題はトリビアルではなく, 考える意義のある問題であることがわかった. $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ の他にも様々な基数不変量が定義でき, それらについて分析することで基数不変量の研究は分野として発展していった.

基数不変量の研究とは, 主に基数不変量の大小関係について分析することを指し, その大小関係の分析に関しては次の 2 つの方向性からのアプローチがある.

(a)基数不変量 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ に対して不等式 $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{y}$ を証明すること
(b)不等式 $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{y}$ が証明できないことを証明すること

(b) に関しては Cohen が連続体仮説の証明不可能性を示す際に用いた強制法という比較的高度な技術を要するため, 本講演では (a) のみ扱う. すなわち, 基数不変量の大小関係のうち証明可能なものを, 順序数などの集合論に特有な概念をなるべく用いずに紹介し, 入門とする.