数論的関数いろいろ紹介

山田智宏 (Tomohiro Yamada) @tyamada1093

約数や素因数分解に関する関数は整数論において重要な道具であり、またそれ自体が重要な研究対象である。

たとえば、$6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ のように、自分自身を除いた約数の和がその数に一致する（あるいは自分自身も含めてすべての約数の和がもとの数の 2 倍になる）ものは完全数として知られているが、これは自分自身も含めてすべての約数の和をとる関数 $\sigma(N) = \sum_{d|N} d$ を用いて、$\sigma(N) = 2N$ となる整数として定義される。

偶数の完全数は $2^{p-1}(2^p - 1)$ （ただし $2^p - 1$ は素数）の形のものですべてであることは良く知られている（しかし $2^p - 1$ が素数になることが無限に多く存在するか否かもわかっていない)。

一方、完全数が $2^{p-1}(2^p - 1)$ の形しかないという主張は古代からなされており、これは奇数の完全数が存在しないという予想と同値であるが（ただし偶数の完全数に限っても、この形のものしかないと証明されるのは Euler を俟たなければならない)、奇数の完全数が存在するか否かは今なお著名な未解決問題である。

2018 年の第 11 回関西すうがく徒のつどいで講演者の行った講演「初等整数論、初等幾何学、離散数学における未解決問題」では、こうした類の未解決問題を複数紹介したが、本講演では約数や素因数分解に関する関数の値の変動について解説する。

主に以下のような関数について解説する。なお、素因数、約数はいずれも正のものに限定して考え、特に断りのない限り N の約数は N 自身も含む。

- $\omega(N)\cdots$ N の素因数の個数（重複を数えない）
- $\Omega(N)\cdots$ N の素因数の個数（重複を数える）
- $d(N)\cdots$ N の約数の個数
- $\sigma(N)\cdots$ N の約数の総和
- $\varphi(N)\cdots$ $1, \ldots, N - 1$ のなかで、N と互いに素なものの個数（なお、2021 年の第 2 回すうがく徒のつどいでの講演「合成数はどこまで素数に近づけるか」で、素数の判定と関連して、$\varphi(N)$ に関する未解決の問題もいくつか紹介している）

たとえば $2^{\Omega(N)} \leq N$ だから、$\omega(N) \leq \Omega(N) \leq \log N / \log 2$ となることがすぐにわかる。しかし、ほとんどの場合、N の素因数の個数は $\log N$ のオーダーよりもずっと小さくなる。平均的には N の素因数の個数は $\log\log N$ に概ね等しくなることが知られている。

また、$\sigma(N) < CN \log\log N$, $\varphi(N) > cN/\log\log N$ となる正の定数 C, c が存在することが知られている一方で、平均的には $\sigma(N), \varphi(N)$ はともに N のオーダーとなることが知られている。

予備知識としては、初等整数論や高等学校程度の微分積分の知識だけでも十分楽しめる内容としたい。必要な手法については講演中に解説する。解析的整数論や代数幾何学の知識があれば、さらに楽しめると思う（既に知っていることが多くなって、つまらないと感じる可能性は否定できないが）。