

第4回すうがく徒のつどい@オンライン (2023年9月16・17日)

『有限囚人帽子パズルの一般定理』

アブストラクト

@souji04261

1 囚人と帽子のパズル

本発表では以下のような論理パズルを**囚人と帽子のパズル**と呼びます。

看守があるゲームをするため2人の囚人を同じ部屋に入れ、帽子を1人に1つずつ被せます。その帽子は黒白どちらかの色で塗られています。そして2人とも自分が被っている帽子の色は分かりませんが、もう1人の囚人の帽子の色は見えています。また部屋に入ってから互いに一切のコミュニケーションが取れません。この状態で帽子の色のどちらかのみを、つまり「黒」か「白」のみを2人同時に発言させ、その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり、そんな正解者が1人でもいれば囚人側の勝利として2人とも釈放されます。もし2人とも不正解ならば囚人側の敗北・看守側の勝利として2人とも処刑されます。当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは、囚人たちが入室以前に分かることはありません。このゲームのルールや勝利条件については、部屋に入る前に囚人たちに看守から伝えられ、ゲーム開始までに2人で戦略を相談することが可能です。このとき入室後にどのように帽子の被せられても、常に1人以上が正解する戦略は存在するでしょうか？

このパズルの答えは「そんな戦略が存在する」です。つまり囚人側には処刑を免れる必勝戦略があります。どのような戦略かは頭の体操として是非解いてみてください。

このようなパズルをこれから簡単に帽子パズルと呼ぶことにします。他にも囚人の数や囚人たちに被せる帽子の色の候補を3つ以上に変えたり、今回のように囚人全員が自分以外の全ての帽子が見えるわけではなかったり、答え合わせのための発言を全囚人同時にしなくても良かったり、また要求される正解者数を変えたりと様々なバリエーションがあります。またこれまでのつどいでは、この囚人が無限にいたらどうなるのかを公理的集合論の知識を応用できる話を中心に発表してきました。今回は囚人数は無限ではなく有限に設定します。そんな帽子パズルにおいて最近一般定理を証明できないか挑戦しています。アブストラクト作成時点でもある程度の形にはなっていますが、部分的にはまだ解けていない部分もあります。発表当日ではそこまで完成した定理について発表したいと思っています。

2 前提知識

素朴集合論での定義をふんだんに使うので、位相空間論（は使わないですが）のような議論に慣れている方を想定してお話しするつもりです。素朴集合論以外の知識としてはグラフ理論・群論といった組合せ論の基本的な知識を仮定します。なので講演は一般枠で申し込んでいます。

帽子パズルについてはいくつかインターネット上に記事があります。上記のパズルの答え合わせや講演の予習に参考にさせていただければと思います（インターネットに接続されている場合、下の文字をクリック・タップするとそのページがブラウザで表示されます）。

- 帽子パズルのネット記事
- 上の記事の内容追加したPDF