

ℕ上の超フィルターの性質の イデアルによる特徴付け

でいぐにゃん
2023年7月14日 作成 / 8月28日 更新

P-point, Q-point, Ramsey 超フィルターはℕ上の超フィルターの重要なクラスである。

定義 1. \mathcal{U} をℕ上の超フィルターとする。

- (1) \mathcal{U} が **P-point** であるとは、ℕの任意の分割 $\langle Y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ について、次のどちらかが成り立つときをいう：ある n について $Y_n \in \mathcal{U}$ 、またはある $X \in \mathcal{U}$ があってすべての n で $X \cap Y_n$ が有限集合である。
- (2) \mathcal{U} が **Q-point** であるとは、ℕの任意の有限集合への分割 $\langle Y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ について、次が成り立つときをいう：ある $X \in \mathcal{U}$ があってすべての n で $|X \cap Y_n| \leq 1$ 。
- (3) \mathcal{U} が **Ramsey 超フィルター** であるとは、任意の自然数 c と関数 $f: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1, \dots, c-1\}$ について、 $X \in \mathcal{U}$ と $i \in \{0, 1, \dots, c-1\}$ が存在し、任意の X の元の対 $\{x, y\}$ について $f(\{x, y\}) = i$ となることを言う。

他方で具体的なℕ上（あるいは可算集合上の）のイデアルとして次のようなものが知られている。

定義 2. (1) $\text{Fin} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ は有限集合}\}$ 。

- (2) $\text{Fin} \otimes \text{Fin} = \{A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{垂直な切り口 } A_n \text{ が無限となる } n \text{ は有限個しかない}\}$ 。
- (3) conv は $[0, 1]$ 内の収束する有理数列から生成されるℚ上のイデアル。
- (4) \mathcal{ED} は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 内の垂直な直線たちと関数のグラフたちから生成されるイデアル。
- (5) $\mathcal{ED}_{\text{fin}}$ は Δ 上のイデアル $\{A \cap \Delta : A \in \mathcal{ED}\}$ である。ここに $\Delta = \{(n, m) : m \leq n\}$ 。
- (6) ℕ上のランダムグラフを一個固定したときに、 \mathcal{R} はその均質集合（クリークまたはアンチクリーク）たちから生成されるイデアル。

イデアルの間の順序 \leq_K と \leq_{KB} を次で定める。

定義 3. (1) (Katětov 順序) $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ とはある関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ があって、すべての $I \in \mathcal{I}$ について $f^{-1}(I) \in \mathcal{J}$ となることを言う。

- (2) (Katětov-Blass 順序) $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ とはある有限対一関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ があって、すべての $I \in \mathcal{I}$ について $f^{-1}(I) \in \mathcal{J}$ となることを言う。

以上の用語の下で、次が成り立つ。

定理 4. \mathcal{U} をℕ上の超フィルターとする。

- (1) \mathcal{U} が P-point $\iff \text{Fin} \otimes \text{Fin} \not\leq_K \mathcal{U}^* \iff \text{conv} \not\leq_K \mathcal{U}^*$ 。
- (2) \mathcal{U} が Q-point $\iff \mathcal{ED}_{\text{fin}} \not\leq_{KB} \mathcal{U}^*$ 。
- (3) \mathcal{U} が Ramsey $\iff \mathcal{ED} \not\leq_K \mathcal{U}^* \iff \mathcal{R} \not\leq_K \mathcal{U}^*$ 。

P-point, Q-point, Ramsey 超フィルターといった重要なクラスが具体的なイデアルを使って記述されるということである。これは、これらの具体的なイデアルの重要性を物語る良い定理である。

本発表はこの定理の証明を目標にする。関連する話題として、各性質を持つ超フィルターが存在するための十分条件や \mathbb{N} 上のイデアルの基数不変量についても触れる。

参考文献

- [BJ95] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set Theory: on the structure of the real line*. CRC Press, 1995.
- [BF17] Jörg Brendle and Jana Flašková. “Generic existence of ultrafilters on the natural numbers”. *Fundamenta Mathematicae* 236 (2017), pp. 201–245.
- [Fla08] Jana Flašková. “Description of some ultrafilters via I-ultrafilters”. *RIMS Kôkyûroku* 1619 (2008), pp. 20–31.
- [HH07] Fernando Hernández-Hernández and Michael Hrušák. “Cardinal Invariants of Analytic P -Ideals”. *Canadian Journal of Mathematics* 59.3 (2007), pp. 575–595.
- [Hru11] Michael Hrušák. “Combinatorics of filters and ideals”. *Contemporary Mathematics* 533 (Jan. 2011).