

敢えて Cayley の定理に立ち返る

サクラ

2023 年 9 月 16 日

アブストラクトをご覧いただく前に、事前情報として（定義や主張、あるいは意味するところが分からなかったとしても）次のいずれか

- Cayley の定理,
- 表現論,
- 集合や写像に関する多少の慣れ／抽象代数の初歩

を目にしているか、何も見ていないかの何れかだと思います。ここまでお読みいただいたので、上記 3 つの単語は目にしたことがあると以下では仮定します。

本講演では、最も基本的なところから初めて表現論のモチベーションの一端をご説明することを目標にします。表現論自体は大変裾野が広く、全体を鳥瞰するようなことは私には力不足です。そこで、敢えて Cayley の定理に立ち返って話を始めようと思います。

Theorem (Cayley の定理). G を有限群とする. n を G の位数とすると、 G は対称群 S_n の部分群である。

この主張は、抽象的な代数構造として与えられた有限群が、対称群という具体的で触りやすい群の部分として実現できることを意味しています。このように、一見するとよく分からないような数学的対象を、相対的によく分かっている（或いは、よく分かるだろうと期待が持てる）対象として実現することを、大雑把にその数学的対象の「表現」と呼ぶことが多いです。

講演全体の流れとしては先ずはこの点についてしっかりと説明をします。その際に群という代数構造を考えることとなりますが、この定義は講演内で与えます。但し、群は集合と写像の組として定式化されるため、このあたりの言葉遣いについては特別断ることなく使います。高校数学、あるいは他の分野の数学に多少取り組んだことがあると聞きやすいと思います。

その上で、時間の許す限り他の例を紹介しつつ、表現論のトピックを紹介できたらと思っています。少なくとも前半については、入門的な内容になっていると思います*1ので、気軽にお聞きいただければと思います。

*1 後半の内容については、アブストラクトを書いている 8 月 28 日時点では完全に煮詰めていないため正確には述べられませんが、徐々に仮定が増えていく可能性があります。