ミクロ経済学（に最低限必要な数学）

yuchains

2022 年 5 月 1 日

はじめに

（理論）経済学には、ミクロ経済学とマクロ経済学に分けられる。

- ミクロ経済学：消費者・生産者といったミクロな経済主体の行動
- マクロ経済学：物価・インフレ・失業など経済のマクロな経済変動

今回は、ミクロ経済学の一分野である『一般均衡理論』の以下の定理を示すことを目標とする。

Theorem (ワルラス均衡の存在)

消費者が自分の効用（満足度）を最大化するように市場で売買を行うとき、ある価格（均衡価格）の下で需要と供給が一致する。

はじめに

講演タイトルの元ネタ
吉田 和男, 島 義博『経済学に最低限必要な数学』
※数学科ではあまり扱わない以下のような数学についても紹介されている。

- 最適化理論
- 古典制御理論
- 現代制御理論
- 最適制御理論
- 非線形システム論

数学

一般均衡理論について述べる前に、凸解析の主要な定理について説明する。

対応

Definition (対応)

集合 X, Y について、任意の $x \in X$ について、Y の部分集合 $F(x) \subseteq Y$ を対応させる関数を対応（correspondence）といい、$F : X \twoheadrightarrow Y$ と表記する。

- 任意の $x \in X$ について、$F(x) \subseteq Y$ が一点集合のとき、対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$ は関数と同一視できる。

逆対応

Definition (逆対応)

対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$ について、

$$F^{-1}(y) := \{x \in X \mid y \in F(x)\}$$

で定義される対応 $F^{-1} : Y \twoheadrightarrow X$ を、F の逆対応（inverse correspondence）という。

逆像

Definition (上逆像)

対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$、集合 $B \subseteq Y$ について、

$$F^{+}(B) := \{x \in X \mid F(x) \subseteq B\}$$

を F による B の上逆像（upper inverse image）という。

Definition (下逆像)

対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$、集合 $B \subseteq Y$ について、

$$F^{-}(B) := \{x \in X \mid F(x) \cap B \neq \emptyset\}$$

を F による B の下逆像（lower inverse image）という。

- 対応の上逆像・下逆像は、関数の逆像の対応への拡張となっている。

対応の連続性

Definition (上半連続性)

任意の $x \in X$ と $F(x)$ の任意の開近傍 U について、x の開近傍 V が存在して、任意の $v \in V$ について $F(v) \subseteq U$ となるとき、対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$ は上半連続（upper hemicontinuous）であるという。

Definition (下半連続性)

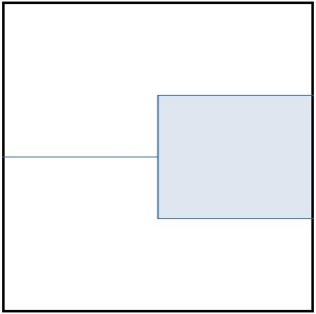
任意の $x \in X$ と $F(x) \cap U \neq \emptyset$ なる任意の開集合 U について、x の開近傍 V が存在して、任意の $v \in V$ について $F(v) \cap U \neq \emptyset$ となるとき、対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$ は下半連続（lower hemicontinuous）であるという。

対応の連続性

Example (上半連続性)

以下の対応 $F:[-5,5]\twoheadrightarrow[-5,5]$ は下半連続ではないが上半連続である。

$$F(x)=\begin{cases}\{0\} & -5\le x<0\\ [-2,2] & 0\le x\le 5\end{cases}$$

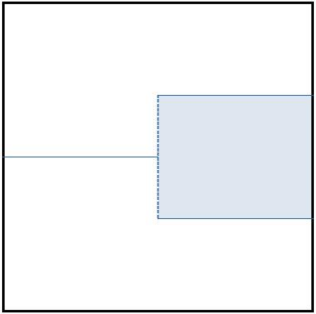


対応の連続性

Example (下半連続性)

以下の対応 $F : [-5,5] \twoheadrightarrow [-5,5]$ は上半連続ではないが下半連続である。

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & -5 \leq x \leq 0 \\ [-2,2] & 0 < x \leq 5 \end{cases}$$



対応の連続性

Definition (連続性)

対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$ が上半連続かつ下半連続のとき、F は連続であるという。

- 対応の上半連続性・下半連続は、関数の連続性の対応への拡張となっている。

対応の連続性

Theorem (上半連続対応の性質)

対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$ について、以下は同値である。

1. F は上半連続である。
2. 任意の開集合 $B \subseteq Y$ について、$F^{+}(B)$ は開集合である。
3. 任意の閉集合 $B \subseteq Y$ について、$F^{-}(B)$ は閉集合である。

Theorem (下半連続対応の性質)

対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$ について、以下は同値である。

1. F は下半連続である。
2. 任意の開集合 $B \subseteq Y$ について、$F^{-}(B)$ は開集合である。
3. 任意の閉集合 $B \subseteq Y$ について、$F^{+}(B)$ は閉集合である。

マイケルの連続選択定理

Theorem (マイケルの連続選択定理)

対応 $F : X \twoheadrightarrow X$ が非空値かつ凸値かつ下半連続であるとき、F には連続選択関数が存在する。つまり、

$$\forall x \in X, f(x) \in F(x)$$

を満たす連続関数 $f : X \to X$ が存在する。

- 選択定理は、対応を扱うために重要となる。
  - 不動点
  - 微分包含式

$$\frac{dx}{dt}(t) \in F(t, x(t))$$

ブラウワーの不動点定理

Theorem (ブラウワーの不動点定理)

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ を非空コンパクトな凸集合とする。関数 $f : X \to X$ が連続であるとき、f には不動点が存在する。つまり、

$$x^* = f(x^*)$$

を満たす $x^* \in X$ が存在する。

角谷の不動点定理

Theorem (角谷の不動点定理)

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ を非空コンパクトな凸集合とする。対応 $F : X \twoheadrightarrow X$ が非空値かつ凸値かつ上半連続であるとき、F には不動点が存在する。つまり、

$$x^* \in F(x^*)$$

を満たす $x^* \in X$ が存在する。

- 角谷の不動点定理は、ブラウワーの不動点定理の一般化となっている。
- 経済学における均衡の存在を示すために、不動点定理は重要となる。

ベルジュの最大値定理

Theorem (ベルジュの最大値定理)

目的関数 $f : A \times X \to \mathbb{R}$ が連続、制約対応 $G : A \twoheadrightarrow X$ が連続、非空値、コンパクト値であるとする。このとき、以下で定義される価値関数 $v : A \to \mathbb{R}$ は連続である。

$$v(a) := \max_{x \in G(a)} f(a, x)$$

また、以下で定義される最適選択対応 $X^* : A \twoheadrightarrow X$ は上半連続、非空値、コンパクト値である。

$$X^*(a) := \arg\max_{x \in G(a)} f(a, x)$$

分離超平面定理

Theorem (分離超平面定理)

非空閉な凸集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$、非空コンパクトな凸集合 $B \subseteq \mathbb{R}^n$ について、A と B が互いに素とすると、

$$\sup_{a \in A} p \cdot a < \inf_{b \in B} p \cdot b$$

を満たす $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{\emptyset\}$ が存在する。

準凹関数

Definition (準凹関数)

関数 $f : X \to Y$ について、X が凸集合であり、任意の $x_1, x_2 \in X$ と任意の $\alpha \in (0, 1)$ について、

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}$$

を満たすとき、準凹関数であるという。

Theorem (準凹関数の性質)

X を凸集合とする。関数 $f : X \to Y$ が与えられたとき、任意の $c \in \mathbb{R}$ について、上位集合

$$U_f(c) := \{x \in X \mid f(x) \geq c\}$$

が凸集合であることは、f が準凹関数であることの必要十分条件である。

一般均衡理論

以上の定理を用いて、ミクロ経済学の『一般均衡理論』について述べる。

純粋交換経済

経済を構成する要素は大きく３種類ある。

- 財
- 消費者：財を消費することで効用（満足）を得る
- 生産者：財を別の財に作りかえる

純粋交換経済は、生産者を考慮しない、商品と消費者で構成される完全競争市場を考える。

完全競争市場

完全競争市場は以下の性質を持つ。

1. 【プライステイカーの仮定】全ての消費者はプライステイカーとして行動する。（十分に多数の消費者が存在し、自分の行動で市場価格を変えることはできない。）
2. 【完備情報】消費者は市場に関する全ての情報を持っている。
3. 【財の同質性】市場で売買される財には差がない。
4. 【参入・退出の自由】市場への参入・退出は自由で特定の消費者が排除されることはない。

上記が満たされない場合は、『ゲーム理論』や『情報の経済学』にて扱われる。

財

ミクロ経済学における財 $l \in \{1, \ldots, L\}$ は、以下のような物を指す。

- 商品
- サービス
- 労働・余暇

財 $l \in \{1, \ldots, L\}$ は、すべて分割可能であると考える。

消費者

消費者 $i \in \{1, \dots, I\}$ は、以下で特徴付けられる。

- 効用関数：$u_i : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$
  - 消費者が財を消費したときに得られる効用（満足度）
- 初期保有：$w_i = (w_{i,1}, \dots, w_{i,L}) \in \mathbb{R}_+^L$
  - 消費者が初期保有している財の数量

需要

- 完全競争市場では、全ての消費者はプライステイカーとして行動する。
- 価格 $p \in \mathbb{R}^L_+$ が与えられたとき、消費者 i の予算は、$p \cdot w_i$ となる。
- 消費者 i は、以下の予算制約の下で自らの効用を最大化するように財の売買を行う。

$$B_i = \left\{ x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid p \cdot x_i \leq p \cdot w_i \right\}$$

- つまり、消費者 i は以下の効用最大化問題を解く。

$$D_i\left(p\right) := \arg \max_{x_i \in B_i(p)} u_i\left(x_i\right)$$

- 効用最大化問題の解 $D_i\left(p\right)$ を消費者 i の需要という。
- 対応 $D_i : \mathbb{R}^L_+ \twoheadrightarrow \mathbb{R}^L_+$ を消費者 i の需要対応という。

超過需要

- 純粋交換経済では生産者の存在を考えないため、供給としては消費者 i の初期保有 w_i のみを考える。

$$S_i(p) := \{w_i\}$$

- 需要から供給を引いたものを、消費者 i の超過需要という。

$$Z_i(p) := D_i(p) - S_i(p)$$

- 各消費者の超過需要の合計を、（総）超過需要という。

$$Z(p) := \sum_{i \in I} Z_i(p)$$

0 次同次性

全ての財の価格が一律に $\lambda > 0$ 倍変化した場合を考える。
このとき、

$$
\begin{aligned}
B_i \quad (p) &= \left\{ x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid \lambda p \cdot x_i \leq \lambda p \cdot w_i \right\} \\
&= \left\{ x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid p \cdot x_i \leq p \cdot w_i \right\}
\end{aligned}
$$

であり予算制約は変化しない。このような性質を 0 次同次性という。
0 次同次性より、価格は相対的な比率のみ意味を持つ。
したがって、価格 $p \in \Delta$ としても一般性を失わない。（※ $p_1 = \ldots = p_L = 0$ の場合は考えない。）
ここで、Δ は $L-1$ 次元標準単体である。

$$
\Delta := \left\{ p \mid \sum_{i=1}^{L} p_i = 1, p_1, \ldots, p_L \geq 0 \right\}
$$

以下では、価格 $p \in \Delta$ とする。

ワルラス均衡

Definition (ワルラス均衡)

財の配分と価格の組 $(x^*, p^*) \in \mathbb{R}_+^{IL} \times \Delta$ が以下の 2 条件を満たすとき、ワルラス均衡という。

1. 【効用最大化】任意の消費者 i について、$x_i^* \in D(p)$
2. 【需給一致】$\sum_i x_i^* = \sum_i w_i^*$

厚生経済学の第一定理

ワルラス均衡の性質を示す重要な定理として、『厚生経済学の第一定理』がある。

Definition (局所非飽和性)

効用関数 $u_i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ が局所非飽和性を満たすとは、任意の $x_i^* \in \mathbb{R}^L_+$、任意の $\varepsilon > 0$ について、

$$u_i\left(\bar{x}_i\right) > u_i\left(x_i^*\right)$$

を満たす $\bar{x}_i \in N_\varepsilon$ が存在する。

厚生経済学の第一定理

Theorem (厚生経済学の第一定理)

任意の消費者 i の効用関数 u_i が局所非飽和性を満たすとき、ワルラス均衡配分 $x^* \in \mathbb{R}_+^{IL}$ はパレート効率的である。つまり、

$$\begin{cases} u_i(\bar{x}_i) \geq u_i(x_i^*) & \forall i \in \{1, I\} \\ u_i(\bar{x}_i) > u_i(x_i^*) & \exists i \in \{1, I\} \\ \sum_i (\bar{x}_i) \leq \sum_i (w_i) & \end{cases}$$

を満たす財配分 $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^{IL}$ は存在しない。

- 財の配分が効率的に行われていることを示している。

ワルラス均衡の存在定理

Theorem (ワルラス均衡の存在)

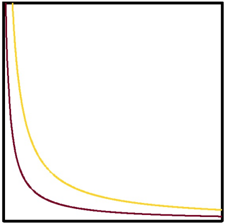
任意の消費者 i の効用関数 $u_i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$、初期保有 $w_i : \mathbb{R}^L_+$ が以下の2条件を満たすとする。

1. 効用関数 u_i は連続、狭義単調増加、準凹関数である。
2. 初期保有 $w_i \gg 0$ である。

このとき、ワルラス均衡が存在する。

ワルラス均衡の存在定理

1. 効用関数 u_i は連続、準凹関数、狭義単調増加である。
   - 連続性：消費する財の量が少し変化しても効用はあまり変わらない
   - 狭義単調増加：消費する財は多いほど効用が高くなる
   - 準凹関数：【限界代替率逓減の法則】同じ財ばかり消費しても効用は高くならない

2. 初期保有 $w_i \gg 0$ である。
   - 消費者はすべての財を保有している。

上記の2条件は弱めることが可能であるが、証明を簡単にするため以上のような条件をおく。

ゲール-二階堂-ドブリューの補題

ワルラス均衡の存在定理の証明には、以下の有名な補題を用いる。

Lemma (ゲール-二階堂-ドブリューの補題)

非空値かつコンパクト値かつ凸値な上半連続対応 $Z:\Delta \twoheadrightarrow \mathbb{R}^L$ が【弱いワルラス法則】を満たすとき、$Z(p^*) \cap \mathbb{R}^L_- \neq \emptyset$ を満たす $p^* \in \Delta$ が存在する。

- 【弱いワルラス法則】任意の $p \in \Delta$ について、$p \cdot z \leq 0$ を満たす $z \in Z(p)$ が存在する。

ゲール-二階堂-ドブリューの補題

【証明】
任意の $p \in \Delta$ について $Z(p) \cap \mathbb{R}^L_- = \emptyset$ が成り立つとして矛盾を示す。
対応 $F : \Delta \twoheadrightarrow \Delta$ を

$$F(p) := \{q \in \Delta \mid q \cdot z > 0, \forall z \in Z(p)\}$$

とする。

■ 対応 F が非空値であることを示す。
$Z(p)$ は非空コンパクトな凸集合、$\mathbb{R}^L_-$ は非空閉な凸集合なので、分離超平面定理より、ある $q \in \mathbb{R}^L \setminus \{\emptyset\}$ について

$$0 = \sup_{y \in \mathbb{R}^L_-} q \cdot y < \inf_{z \in Z(p)} q \cdot z$$

が成り立つ。ここで一般性を失わず、$q \in \Delta$ とできる。よって、
$q \in F(p)$ のため、F は非空値。

ゲール-二階堂-ドブリューの補題

【証明（つづき）】

■ 対応 F が凸値であることを示す。

任意の $z \in Z(p)$、任意の $q_1, q_2 \in F(p)$、任意の $\alpha \in [0, 1]$ について、

$$(\alpha q_1 + (1 - \alpha) q_2) \cdot z = \alpha q_1 \cdot z + (1 - \alpha) q_2 \cdot z > 0$$

となるため、F は凸値。

ゲール-二階堂-ドブリューの補題

【証明（つづき）】

■ 対応 F が下半連続であることを示す。
任意の $q \in \Delta$ について、

$$
\begin{aligned}
F^{-1}(q) &= \{p \in \Delta \mid q \in F(p)\} \\
&= \{p \in \Delta \mid q \cdot z > 0, \forall z \in F(p)\} \\
&= \{p \in \Delta \mid Z(p) \subseteq \{z \in \Delta \mid q \cdot z > 0\}\}
\end{aligned}
$$

となる。$\{z \in \Delta \mid q \cdot z > 0\}$ は開集合、$Z : \Delta \twoheadrightarrow \mathbb{R}^l$ は上半連続であるため、任意の $q \in \Delta$ について $F^{-1}(q)$ は開集合である。

ゲール-二階堂-ドブリューの補題

【証明（つづき）】

任意の開集合 $W \subseteq \Delta$ について、

$$\begin{aligned} \cup_{q \in W} F^{-1}(q) &= \cup_{q \in W} \{p \in \Delta \mid q \in F(p)\} \\ &= \cup_{q \in W} \{p \in \Delta \mid F(p) \cap \{q\} \neq \emptyset\} \\ &= \{p \in \Delta \mid F(p) \cap W \neq \emptyset\} \\ &= F^{-}(W) \end{aligned}$$

$\cup_{q \in W} F^{-1}(q)$ は開集合であるので、$F^{-}(W)$ は開集合である。よって、F は下半連続である。

ゲール-二階堂-ドブリューの補題

【証明（つづき）】
F は非空値かつ凸値かつ下半連続であるため、マイケルの選択定理より、
F の連続選択関数 $f : \Delta \to \Delta$ が存在する。
ブラウワーの不動点定理より、不動点 $p^* = f(p^*) \in F(p^*)$ が存在する。
F の定義より、$p^* \cdot z > 0$ だが、これは弱いワルラス法則に矛盾する。

ワルラス均衡の存在定理

Theorem (ワルラス均衡の存在)

任意の消費者 i の効用関数 $u_i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$、初期保有 $w_i : \mathbb{R}^L_+$ が以下の２条件を満たすとする。

1. 効用関数 u_i は連続、準凹関数、狭義単調増加である。
2. 初期保有 $w_i \gg 0$ である。

このとき、ワルラス均衡が存在する。

ワルラス均衡の存在定理

【証明】
予算対応 $B_i : \Delta \twoheadrightarrow \mathbb{R}^L_+$ に制約を加えた以下の対応 $\bar{B}_i : \Delta \twoheadrightarrow \mathbb{R}^L_+$ を考える。

$$\bar{B}_i(p) := \left\{ x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid x_i \leq c, p \cdot x_i \leq p \cdot w_i \right\}$$

ここで、$c \gg \sum_i w_i$ とする。まず、予算対応 B_i の代わりに $\bar{B}_i$ とした場合にワルラス均衡が存在することを示す。

■ 需要対応 D_i が非空値、コンパクト値、上半連続であることを示す。
予算対応 $\bar{B}_i$ は明らかに非空値、コンパクト値、凸値、連続である（証明略）。また、効用関数 $u_i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ は連続である。
ベルジュの最大値定理より、需要対応 $D_i : \Delta \to \mathbb{R}^L_+$ は非空値、コンパクト値、上半連続である。

$$D_i(p) := \arg \max_{x_i \in B_i(p)} u_i(x_i)$$

ワルラス均衡の存在定理

【証明（つづき）】

■ 需要対応 D_i が凸値であることを示す。
効用関数 $u_i : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ は準凹関数のため、u_i の上位集合は凸集合である。
また、予算対応 $B_i : \Delta \twoheadrightarrow \mathbb{R}_+^L$ は凸値である。
凸集合の積集合は凸集合のため、需要対応 $D_i : \Delta \to \mathbb{R}_+^L$ は凸値である。

以上により、需要対応 $D_i : \Delta \to \mathbb{R}_+^L$ は、非空値、コンパクト値、上半連続、凸値である。
したがって、超過需要対応 $Z : \Delta \to \mathbb{R}^L$ は非空値、コンパクト値、上半連続、凸値である（証明略）。

$$Z(p) := \sum_i X_i^*(p) - \sum_i \{w_i\}$$

【証明（つづき）】
任意の $x_i \in D_i(p)$ について、$x_i \in \bar{B}_i(p)$ つまり $p \cdot x_i \leq p \cdot w_i$ なので、超過需要対応 $Z : \Delta \to \mathbb{R}^L$ は弱いワルラス法則を満たす。

超過需要対応 $Z : \Delta \to \mathbb{R}^L$ 非空値、コンパクト値、上半連続、凸値であり、弱いワルラス法則を満たすため、ゲール-二階堂-ドブリューの補題より、 ある $p^* \in \Delta$ が存在して $Z(p^*) \cap \mathbb{R}^L_- \neq \emptyset$ が成り立つ。よって、任意の $z^* \in Z(p^*) \cap \mathbb{R}^L_-$、任意の $i \in I$ について、ある $x_i^* \in X^*(p)$ が存在して、

$$\sum_i x_i^* - \sum_i w_i = z^* \leq 0$$

となる。

ワルラス均衡の存在定理

【証明（つづき）】
■ $\sum_i x_i^* = \sum_i w_i$ であることを示す。
任意の消費者 i について、効用関数 u_i は狭義単調増加であるため、
$p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot w_i$（予算を使い切る）となる。そのため、
$p^* \cdot \sum_i x_i^* = p^* \cdot \sum_i w_i$ が成り立つ。
よって、ある財 k について $\sum_i x_{i,k}^* < \sum_i w_{i,k}$ と仮定すると $p_k^* = 0$ となる。しかしながら、任意の消費者 i について、効用関数 u_i は狭義単調増加であるため、$x_{i,k}^* = c_k > \sum_i w_{i,k}$ となりこれは矛盾。そのため、【需給一致】$\sum_i x_i^* - \sum_i w_i$ が示された。

以上より、予算対応 B_i の代わりに $\bar{B}_i$ とした場合にワルラス均衡が存在することが示された。

ワルラス均衡の存在定理

【証明（つづき）】

■$\sum_i x_i^* = \sum_i w_i$ であることを示す。
任意の消費者 i について、効用関数 u_i は狭義単調増加であるため、
$p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot w_i$（予算を使い切る）となる。そのため、
$p^* \cdot \sum_i x_i^* = p^* \cdot \sum_i w_i$ が成り立つ。
よって、ある財 k について $\sum_i x_{i,k}^* < \sum_i w_{i,k}$ と仮定すると $p_k^* = 0$ となる。しかしながら、任意の消費者 i について、効用関数 u_i は狭義単調増加であるため、$x_{i,k}^* = c_k > \sum_i w_{i,k}$ となりこれは矛盾。そのため、【需給一致】$\sum_i x_i^* - \sum_i w_i$ が示された。

以上より、予算対応 B_i の代わりに $\bar{B}_i$ とした場合には、ワルラス均衡 (x^*, p^*) が存在する。

ワルラス均衡の存在定理

【証明（つづき）】

■ 予算対応 $\bar{B}_i$ でのワルラス均衡 (x^*, p^*) は、予算対応 B_i でもワルラス均衡であることを示す。

ある消費者 i について、$u_i(\hat{x}_i) > u_i(x_i^*), \hat{x}_i \not\leq c, p^* \cdot \hat{x}_i = p^* \cdot w_i$ を満たす $\hat{x}_i \in \mathbb{R}_+^L$ が存在するとして矛盾を導く。

$x_i^* \leq \sum_i w_{i,k} < c, \hat{x}_i \not\leq c$ より、$\tilde{x}_i = \alpha \hat{x}_i + (1-\alpha) x_i^* \leq c$ を満たす $\alpha \in (0,1)$ が存在する。

このとき、$p^* \cdot \tilde{x}_i = \alpha p^* \cdot \hat{x}_i + (1-\alpha) p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot w_i$ なので、$\tilde{x}_i$ は予算制約を満たす。そのため、$u_i(x_i^*) \geq u_i(\tilde{x}_i)$ である。

ワルラス均衡の存在定理

【証明（つづき）】
一方、u_i は狭義単調増加のため、$u_i(\beta\hat{x}_i) = u_i(x_i^*)$ を満たす $\beta \in (0,1)$ が存在する。u_i は狭義単調増加、準凹関数であるため、

$$\begin{aligned} u_i(\tilde{x}_i) &= u_i(\alpha\hat{x}_i + (1-\alpha)x_i^*) \\ &> u_i(\alpha\beta\hat{x}_i + (1-\alpha)x_i^*) \\ &\geq \min\{u_i(\beta\hat{x}_i), u_i(x_i^*)\} \\ &= u_i(x_i^*) \end{aligned}$$

となるが、これは $u_i(x_i^*) \geq u_i(\tilde{x}_i)$ に矛盾。

以上より、(x^*, p^*) がワルラス均衡である。

まとめ

- 『ワルラス均衡の存在定理』より、消費者が自分の効用を最大化するように市場で売買を行うとき、ある価格（均衡価格）の下で需要と供給が一致する。
- 『厚生経済学の第一基本定理』より、ワルラス均衡では社会全体として財の配分が効率的に行われる。
- 非線形システムの安定性理論が必要となるためここでは取り扱わないが、弱い条件（超過需要に対する顕示選好の小公理）のもとでワルラス均衡の大域的漸近安定性がいえる。

- ある意味でアダム・スミスの『神の見えざる手』の存在を示しているといえる。

参考情報

大学生がミクロ経済学を学習するうえで役に立つ講義

1. 理学系
   - 微分・積分・線形代数
   - 集合と位相
   - 確率・統計
   - 微分方程式
   - 関数解析
   - ・ルベーグ積分・測度論
2. 工学系
   - 線形計画法・非線形計画法・数理最適化
   - グラフ理論
   - 制御理論（古典制御・現代制御・最適制御）
   - 非線形システム論
   - アルゴリズム
3. その他
   - 数理論理学（様相論理学）

参考情報

参考書籍

1. ミクロ経済学
   - 神取道宏『ミクロ経済学の力』
   - 林貴志『ミクロ経済学［増補版]』
   - 浦井憲『ミクロ経済学 (経済学教室)』
   - 武隈慎一『数理経済学 (新経済学ライブラリ 25)』
   - G.A. Jehle and P. J. Reny; Advanced Microeconomic Theory
   - A.Mas-Colell, M.D.Whinston and J.R.Green; Micoroeconomic Theory
2. マクロ経済学
   - 齊藤誠『新しいマクロ経済学 -- クラシカルとケインジアンの邂逅』
   - デビッド・ローマー『上級マクロ経済学（第三版）』
3. 経済数学
   - A.C. チャン、K. ウエインライト『現代経済学の数学基礎（上）（下）』
   - 小山昭雄『経済数学教室 新装版 1~9』
   - 吉田 和男, 島 義博『経済学に最低限必要な数学』