$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式

～Lorentz スピン幾何学入門～

一人セミナー数理物理

2022/05/01

今日のテーマ

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは？

1. $Spin(1,3)$ って何？
2. Dirac 方程式って何？ (そもそも何に対する方程式)
3. $Spin(1,3)$ と Dirac 方程式の関係は？
4. Dirac 方程式と Spin 幾何学との関係は？

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは (回答)

1. $Spin(1,3)$ とは本義 Lorentz 群 $SO_0(1,3)$ の普遍被覆群
2. スピン多様体上のスピノル束という複素ベクトル束の切断、すなわちスピノル場に対する方程式
3. $Spin(1,3)$ はスピノル束のファイバーに作用する構造群
4. Dirac 方程式の解としてのスピノルは電子の状態を表すからスピノル束は電子の住処 (スピン多様体上のスピノル束を考えることは多様体の接ベクトル束を考えるくらい自然)

今日のテーマ

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは？

1. $Spin(1,3)$ って何？
2. Dirac 方程式って何？ (そもそも何に対する方程式)
3. $Spin(1,3)$ と Dirac 方程式の関係は？
4. Dirac 方程式と Spin 幾何学との関係は？

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは (回答)

1. $Spin(1,3)$ とは本義 Lorentz 群 $SO_0(1,3)$ の普遍被覆群
2. スピン多様体上のスピノル束という複素ベクトル束の切断、すなわちスピノル場に対する方程式
3. $Spin(1,3)$ はスピノル束のファイバーに作用する構造群
4. Dirac 方程式の解としてのスピノルは電子の状態を表すからスピノル束は電子の住処 (スピン多様体上のスピノル束を考えることは多様体の接ベクトル束を考えるくらい自然)

今日のテーマ

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは？

1. $Spin(1,3)$ って何？
2. Dirac 方程式って何？ (そもそも何に対する方程式)
3. $Spin(1,3)$ と Dirac 方程式の関係は？
4. Dirac 方程式と Spin 幾何学との関係は？

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは (回答)

1. $Spin(1,3)$ とは本義 Lorentz 群 $SO_0(1,3)$ の普遍被覆群
2. スピン多様体上のスピノル束という複素ベクトル束の切断、すなわちスピノル場に対する方程式
3. $Spin(1,3)$ はスピノル束のファイバーに作用する構造群
4. Dirac 方程式の解としてのスピノルは電子の状態を表すからスピノル束は電子の住処 (スピン多様体上のスピノル束を考えることは多様体の接ベクトル束を考えるくらい自然)

今日のテーマ

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは？

1. $Spin(1,3)$ って何？
2. Dirac 方程式って何？ (そもそも何に対する方程式)
3. $Spin(1,3)$ と Dirac 方程式の関係は？
4. Dirac 方程式と Spin 幾何学との関係は？

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは (回答)

1. $Spin(1,3)$ とは本義 Lorentz 群 $SO_0(1,3)$ の普遍被覆群
2. スピン多様体上のスピノル束という複素ベクトル束の切断、すなわちスピノル場に対する方程式
3. $Spin(1,3)$ はスピノル束のファイバーに作用する構造群
4. Dirac 方程式の解としてのスピノルは電子の状態を表すからスピノル束は電子の住処 (スピン多様体上のスピノル束を考えることは多様体の接ベクトル束を考えるくらい自然)

今日のテーマ

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは？

1. $Spin(1,3)$ って何？
2. Dirac 方程式って何？ (そもそも何に対する方程式)
3. $Spin(1,3)$ と Dirac 方程式の関係は？
4. Dirac 方程式と Spin 幾何学との関係は？

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは (回答)

1. $Spin(1,3)$ とは本義 Lorentz 群 $SO_0(1,3)$ の普遍被覆群
2. スピン多様体上のスピノル束という複素ベクトル束の切断、すなわちスピノル場に対する方程式
3. $Spin(1,3)$ はスピノル束のファイバーに作用する構造群
4. Dirac 方程式の解としてのスピノルは電子の状態を表すからスピノル束は電子の住処 (スピン多様体上のスピノル束を考えることは多様体の接ベクトル束を考えるくらい自然)

今日のテーマ

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは？

1. $Spin(1,3)$ って何？
2. Dirac 方程式って何？ (そもそも何に対する方程式)
3. $Spin(1,3)$ と Dirac 方程式の関係は？
4. Dirac 方程式と Spin 幾何学との関係は？

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは (回答)

1. $Spin(1,3)$ とは本義 Lorentz 群 $SO_0(1,3)$ の普遍被覆群
2. スピン多様体上のスピノル束という複素ベクトル束の切断、すなわちスピノル場に対する方程式
3. $Spin(1,3)$ はスピノル束のファイバーに作用する構造群
4. Dirac 方程式の解としてのスピノルは電子の状態を表すからスピノル束は電子の住処 (スピン多様体上のスピノル束を考えることは多様体の接ベクトル束を考えるくらい自然)

今日のテーマ

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは？

1. $Spin(1,3)$ って何？
2. Dirac 方程式って何？ (そもそも何に対する方程式)
3. $Spin(1,3)$ と Dirac 方程式の関係は？
4. Dirac 方程式と Spin 幾何学との関係は？

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは (回答)

1. $Spin(1,3)$ とは本義 Lorentz 群 $SO_0(1,3)$ の普遍被覆群
2. スピン多様体上のスピノル束という複素ベクトル束の切断、すなわちスピノル場に対する方程式
3. $Spin(1,3)$ はスピノル束のファイバーに作用する構造群
4. Dirac 方程式の解としてのスピノルは電子の状態を表すからスピノル束は電子の住処 (スピン多様体上のスピノル束を考えることは多様体の接ベクトル束を考えるくらい自然)

今日のテーマ

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは？

1. $Spin(1,3)$ って何？
2. Dirac 方程式って何？ (そもそも何に対する方程式)
3. $Spin(1,3)$ と Dirac 方程式の関係は？
4. Dirac 方程式と Spin 幾何学との関係は？

$Spin(1,3)$ と Dirac 方程式とは (回答)

1. $Spin(1,3)$ とは本義 Lorentz 群 $SO_0(1,3)$ の普遍被覆群
2. スピン多様体上のスピノル束という複素ベクトル束の切断、すなわちスピノル場に対する方程式
3. $Spin(1,3)$ はスピノル束のファイバーに作用する構造群
4. Dirac 方程式の解としてのスピノルは電子の状態を表すからスピノル束は電子の住処 (スピン多様体上のスピノル束を考えることは多様体の接ベクトル束を考えるくらい自然)

言いたいこと 1

相対論的量子論でいうところの Lorentz 共変性の多くは Spin(1,3) のスピノル表現あるいは随伴表現による不変性のことなので、本当は物理としては Spin(1,3) 共変性というべきである。Dirac 方程式は電子の相対論的量子力学の方程式として考えられたので、スピン幾何学としての起源は Riemann 多様体よりむしろ Lorentz 多様体にある。

言いたいこと 2

多様体にスピン構造 (あるいはスピン c 構造) がないと電子は住めない！

※今日は Riemann 多様体上のスピン幾何学ではなく、電子の Dirac 方程式と Lorentz スピン幾何学の関係についての話をします。

言いたいこと 3

発表途中の質問もよろしくお願いします！

動機

元々物理を研究したくて大学に入った

- 量子論とか相対論かっこいい (B1)
- どうやら自分がやっていることは物理ではなく数学らしい (B3)
- 微分幾何は楽しいけど、研究とか何やればいいねん (M1)
- 何も出来るようにならないまま (修士課程修了→就職)
- スピン幾何やろう (今ここ)

なんでスピン幾何学なのか

- 物理の本に書いてあるスピノルがよくわからなくて場の量子論は挫折
- 数学的にちゃんとした手順を踏めば自分にも理解できそう
- どうせやるなら物理的に自然な Lorentz 多様体上のスピン幾何学かな

記法

Einstein 既約

上下に出てくる添字について $a^\mu e_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu e_\mu$ のように和をとる約束をする。(μ, ν などギリシャ文字は $0 \sim 3$, i, j, k などは $1 \sim 3$)

例

具体的には $qF_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}$, $\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right]$ など。

時空の計量について

不定値計量 $(1,3)$ を$-+++$で取ることにする。

行列について

$\mathbb{C}(n)$ と書いてこれを複素 n 次正方行列とする。行列としては $n = 2, 4$ しか出てこない予定。また行列 $X \in \mathbb{C}(n)$ の Hermite 共役を $X^\dagger$ で表す。

記法

Einstein 既約

上下に出てくる添字について $a^\mu e_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu e_\mu$ のように和をとる約束をする。(μ, ν などギリシャ文字は $0 \sim 3$, i, j, k などは $1 \sim 3$)

例

具体的には $qF_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}$, $\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right]$ など。

時空の計量について

不定値計量 $(1, 3)$ を－＋＋＋で取ることにする。

行列について

$\mathbb{C}(n)$ と書いてこれを複素 n 次正方行列とする。行列としては $n = 2, 4$ しか出てこない予定。また行列 $X \in \mathbb{C}(n)$ の Hermite 共役を $X^\dagger$ で表す。

記法

Einstein 既約

上下に出てくる添字について $a^\mu e_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu e_\mu$ のように和をとる約束をする。(μ, ν などギリシャ文字は $0 \sim 3$, i, j, k などは $1 \sim 3$)

例

具体的には $qF_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}$, $\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right]$ など。

時空の計量について

不定値計量 $(1, 3)$ を$-+++$で取ることにする。

行列について

$\mathbb{C}(n)$ と書いてこれを複素 n 次正方行列とする。行列としては $n = 2, 4$ しか出てこない予定。また行列 $X \in \mathbb{C}(n)$ の Hermite 共役を $X^\dagger$ で表す。

記法

Einstein 既約

上下に出てくる添字について $a^\mu e_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu e_\mu$ のように和をとる約束をする。(μ, ν などギリシャ文字は $0 \sim 3$, i, j, k などは $1 \sim 3$)

例

具体的には $qF_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}$, $\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right]$ など。

時空の計量について

不定値計量 $(1, 3)$ を－＋＋＋で取ることにする。

行列について

$\mathbb{C}(n)$ と書いてこれを複素 n 次正方行列とする。行列としては $n = 2, 4$ しか出てこない予定。また行列 $X \in \mathbb{C}(n)$ の Hermite 共役を $X^\dagger$ で表す。

目次

$Spin(1,3)$ の話

1. Minkowski 時空と Lorentz 群
2. Dirac 代数 (Clifford 代数)
3. 被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

スピノルと Dirac 方程式

1. スピノル表現とスピノル束
2. Dirac 作用素と Dirac 方程式
3. 曲がった時空における Dirac 方程式

目次

$Spin(1,3)$ の話

1. Minkowski 時空と Lorentz 群
2. Dirac 代数 (Clifford 代数)
3. 被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

スピノルと Dirac 方程式

1. スピノル表現とスピノル束
2. Dirac 作用素と Dirac 方程式
3. 曲がった時空における Dirac 方程式

Minkowski 時空と Lorentz 群

定義 (Minkowski 時空)

$\mathbb{R}^4$ と符号数が $(1,3)$ である非退化対称 2 次形式 η の組 $(\mathbb{R}^4,\eta)$ のことを Minkowski 時空または Lorentz ベクトル空間という。これを $\mathbb{R}^{1,3}$ と書く。この η は Lorentz 計量とも呼ばれ、ある基底が存在し $\eta=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ と対角化出来る。この基底を $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ と表す。(マイナス方向を e_0 とし、時間方向を表す)

Minkowski 時空における (時間的) 曲線

Minkowski 時空においては (時間的) 曲線は質点の事象を表す。例えば、$c(t)=(t,0,0,0)$ によって表される (時間的) 曲線は質点が空間的にずっと同じ場所にいることを表している。Minkowski 時空 $\mathbb{R}^{1,3}\simeq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ は時間方向 $\mathbb{R}$ と空間方向 $\mathbb{R}^3$ が一体となった Euclid 空間のことである。

Minkowski 時空では曲線の弧長パラメーター τ が質点に流れる時間 (固有時) になる。

Minkowski 時空と Lorentz 群

定義 (Minkowski 時空)

$\mathbb{R}^4$ と符号数が $(1,3)$ である非退化対称 2 次形式 η の組 $(\mathbb{R}^4, \eta)$ のことを Minkowski 時空または Lorentz ベクトル空間という。これを $\mathbb{R}^{1,3}$ と書く。この η は Lorentz 計量とも呼ばれ、ある基底が存在し $\eta = diag(-1,1,1,1)$ と対角化出来る。この基底を $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ と表す。(マイナス方向を e_0 とし、時間方向を表す)

Minkowski 時空は特殊相対論の舞台

Minkowski 時空における運動方程式

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = f_\mu + qF_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}, \ (p, f \text{ は 4 元運動量、4 元力})$$

$$dF = 0, d^\dagger F = j. \ (\text{Maxwell 方程式、} F \text{ は電磁場テンソル})$$

Minkowski 時空と Lorentz 群

定義 (Lorentz 群)

Minkowski 時空 $\mathbb{R}^{1,3} = (\mathbb{R}^4, \eta)$ における符号数 $(1,3)$ の非退化対称 2 次形式 η を不変にする線形 Lie 群 (行列のこと) を Lorentz 群 $O(1,3)$ という。これは物理的には慣性系を慣性系に移す座標変換であると考えることが出来る。$O(1,3) = \{\Lambda \in GL(4,\mathbb{R}) \mid \Lambda \eta^t \Lambda = \eta\}$ のことである。
つまり $\Lambda\colon \ \in$ に対して線型写像

$$\Lambda\colon \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}^{1,3} \tag{1}$$

が定まる。

Lorentz 群の岩澤分解

Lorentz 群は位相的には回転とブーストの直積特にノンコンパクト

$O(1,3) \simeq O(1) \times O(3) \times \mathbb{R}^3$. (Lorentz 群は 4 つの連結成分を持つ)

$SO(1,3) \simeq O(1) \times SO(3) \times \mathbb{R}^3$. (3 次元回転とブースト (等速直線運動))

Minkowski 時空と Lorentz 群

定義 (Lorentz 群)

Minkowski 時空 $\mathbb{R}^{1,3} = (\mathbb{R}^4, \eta)$ における符号数 $(1,3)$ の非退化対称 2 次形式 η を不変にする線形 Lie 群 (行列のこと) を Lorentz 群 $O(1,3)$ という。
これは物理的には慣性系を慣性系に移す座標変換であると考えることが出来る。$O(1,3) = \{\Lambda \in GL(4,\mathbb{R}) \mid \Lambda\eta^t\Lambda = \eta\}$ のことである。
つまり $\Lambda\colon\ \in$ に対して線型写像

$$\Lambda\colon \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}^{1,3} \tag{1}$$

が定まる。

Lorentz 群の岩澤分解

Lorentz 群は位相的には回転とブーストの直積特にノンコンパクト

$O(1,3) \simeq O(1) \times O(3) \times \mathbb{R}^3$. (Lorentz 群は 4 つの連結成分を持つ)
$SO(1,3) \simeq O(1) \times SO(3) \times \mathbb{R}^3$. (3 次元回転とブースト (等速直線運動))

目次

$Spin(1,3)$ の話

1. Minkowski 時空と Lorentz 群
2. Dirac 代数 (Clifford 代数)
3. 被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

スピノルと Dirac 方程式

1. スピノル表現とスピノル束
2. Dirac 作用素と Dirac 方程式
3. 曲がった時空における Dirac 方程式

Dirac 代数

Clifford 代数

$\mathbb{R}^{1,3}$ の非退化対称 2 次形式 $\eta\colon \mathbb{R}^{1,3}\otimes\mathbb{R}^{1,3}\to\mathbb{R}$ に対して $S := \{v\otimes v+\eta(v,v)1 \mid v\in\mathbb{R}^{1,3}\}$ で生成される $\mathbb{R}^{1,3}$ のテンソル代数 T の両側イデアルで割った商代数を Clifford 代数 $Cl_{1,3}$ という。さらに $Cl_{1,3}$ を複素化した複素 Clifford 代数 $\mathbb{C}l_{1,3}$ を Dirac 代数という。

実は Dirac 代数は 4 次の複素正方行列 $\mathbb{C}(4)$ と代数同型である。

Dirac 行列

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=-2\eta^{\mu\nu}I_4 \tag{2}$$

を満たす 4 次の複素正方行列 $\{\gamma^\mu\}_{\mu=0}^{3}\subset\mathbb{C}(4)$ が $\mathbb{R}^{1,3}$ の基底を貼るので、これらを Dirac 行列という。

Dirac 代数

Clifford 代数

$\mathbb{R}^{1,3}$ の非退化対称 2 次形式 $\eta\colon \mathbb{R}^{1,3}\otimes\mathbb{R}^{1,3}\to\mathbb{R}$ に対して $S := \{v\otimes v+\eta(v,v)1 \mid v\in\mathbb{R}^{1,3}\}$ で生成される $\mathbb{R}^{1,3}$ のテンソル代数 T の両側イデアルで割った商代数を Clifford 代数 $Cl_{1,3}$ という。さらに $Cl_{1,3}$ を複素化した複素 Clifford 代数 $\mathbb{C}l_{1,3}$ を Dirac 代数という。

Dirac 代数 $\mathbb{C}l_{1,3}$ と 4 次の複素正方行列 $\mathbb{C}(4)$ には以下の代数同型がある。

$$\begin{tikzcd}
T_{\mathbb{C}} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & & \mathbb{C}l_{1,3} \arrow[dl, "\exists! F"] \\
& \mathbb{C}(4) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R}^{1,3}\ni e_\mu \mapsto \gamma_\mu = \gamma^\nu\eta_{\nu\mu}\in\mathbb{C}(4),\\
\tilde{f}(v_1\otimes\cdots\otimes v_k) := f(v_1)\cdots f(v_k),\\
F(v_1\cdots v_k) = f(v_1)\cdots f(v_k).
\end{aligned}$$

Dirac 代数

Clifford 代数の表現

(2) を満たす Dirac 行列 $\{\gamma^\mu\}_{\mu=0}^3 \subset \mathbb{C}(4)$ の具体的な行列の表式が以下の Pauli 行列を用いて作られることが知られている。

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Dirac 表現

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_k \\ -\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Weyl 表現

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_k \\ -\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3)$$

目次

$Spin(1,3)$ の話

1. Minkowski 時空と Lorentz 群
2. Dirac 代数 (Clifford 代数)
3. 被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

スピノルと Dirac 方程式

1. スピノル表現とスピノル束
2. Dirac 作用素と Dirac 方程式
3. 曲がった時空における Dirac 方程式

被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

定義（ $Spin(1,3)$ ）

$$Spin(1,3) := \{v_1 v_2 \cdots v_{2k} \in Cl_{1,3} \mid ||v_1|| = \cdots = ||v_{2k}|| = \pm 1\}$$

$v \in \mathbb{R}^{1,3}$ は $Cl_{1,3}(\mathbb{R})$ の元としてみれば、作用
$v\colon \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}^{1,3} \ni x \mapsto vxv^{-1} \in \mathbb{R}^{1,3}$ を考えることができる。

定義

被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$ を $g = v_1 \cdots v_{2k}$ に対して $Ad_g\colon \mathbb{R}^{1,3} \ni x \mapsto gxg^{-1} \in \mathbb{R}^{1,3}$ によって定義するとこれが本義 Lorentz 群 $SO_0(1,3)$ に入る。ここで本義 Lorentz 群とは $SO_0(1,3) \simeq SO(3) \times \mathbb{R}^3$ つまり $SO(1,3)$ の単位元を含む連結成分のことである。(Lorentz 群の連結成分は 4 つ)

被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

定義（ $Spin(1,3)$ ）

$Spin(1,3) := \{v_1 v_2 \cdots v_{2k} \in Cl_{1,3} \mid ||v_1|| = \cdots = ||v_{2k}|| = \pm 1\}$

定義（ 被覆写像 ）

被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$ を $g = v_1 \cdots v_{2k}$ に対して $Ad_g : \mathbb{R}^{1,3} \ni x \mapsto gxg^{-1}\mathbb{R}^{1,3}$ によって定義するとこれが本義 Lorentz 群 $SO_0(1,3)$ に入る。ここで本義 Lorentz 群とは $SO_0(1,3) \simeq SO(3) \times \mathbb{R}^3$ つまり $SO(1,3)$ の単位元を含む連結成分のことである。$SO_0(1,3)$ の基本群 $\pi_1(SO_0(1,3))$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

命題

$Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$ は Lie 群としての普遍被覆写像である。

被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

命題

$Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$ は位相群としての二重被覆写像である。

$Spin(1,3)$ は $GL(4,\mathbb{C})$ の閉部分群であるので Lie 群である。また Cartan-Dieudonne の定理からこの写像は全射であることがわかる。準同型であることも明らかであるので、全準同型である。また $\forall x \in \mathbb{R}^{1,3}$ に対し、$gxg^{-1} = x \Leftrightarrow gx = xg$ となるとき $g \in Spin(1,3) \subset Cl_{1,3}$ は中心元なので、それは $\mathbb{R}$ しかありえない。よって $g = \pm 1$ となり、$\ker Ad = \{\pm 1\}$ となる。位相群の準同型定理より、$SO_0(1,3) \simeq Spin(1,3)/\mathbb{Z}_2$. □

命題 (位相群の準同型定理)

$f\colon G \to G'$ が第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 位相群から局所コンパクト Hausdorff 位相群への位相群の準同型であるとき、次の位相群としての同型が成り立つ。

$$G/\ker f \simeq \operatorname{Im} f.$$

被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

定義

$\mathfrak{spin}(1,3) := \{c^{ab}e_ae_b \mid c^{ab} \in \mathbb{R}(0 \le a < b \le 3)\}$ が $Spin(1,3)$ の Lie 環になることが指数写像を計算することで確かめられる。Lie 括弧積は Clifford 積である。すなわち $[e_ae_b, e_ce_d] = e_ae_be_ce_d - e_ce_de_ae_b$ のことである。

命題

$Ad\colon Spin(1,3)\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$ は Lie 群としての二重被覆写像である。

局所微分同相であることを示せば良いがこれは Lie 環が同型であることを言えば十分である。$ad\colon \mathfrak{spin}(1,3) \ni \frac{1}{2}e_ae_b \mapsto e_a \wedge e_b \in \mathfrak{so}(1,3)$ は同型である。 $\square$

最後に被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$ が普遍被覆写像であることを示したいがこれは $Spin(1,3)$ が単連結であることを示せば良い。

被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

定義

$SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ を複素 2 次の特殊線形群という。

岩澤分解より、こちらは $SL(2,\mathbb{C}) \simeq SU(2) \times \mathbb{R}^3$ となる。すなわち $SL(2,\mathbb{C})$ は単連結である。　今から $SL(2,\mathbb{C})$ と $Spin(1,3)$ が Lie 群として同型であることを示す。

$SO(1,3)$ と $SL(2,\mathbb{C})$ の Lie 環について

以下で用いた Pauli 行列を用いて $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ が生成される。

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\{\sqrt{-1}\hat{\sigma}_k\}_{k=1}^3 \subset \mathfrak{k}$ が回転 $SO(3)$ の Lie 環を貼り、$\{\hat{\sigma}_k\}_{k=1}^3 \subset \mathfrak{p}$ がブーストを生成することが確かめられる。$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.
但しこれは Lie 環の直和分解ではない。

被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

定義

$SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ を複素 2 次の特殊線形群という。

岩澤分解より、こちらは $SL(2,\mathbb{C}) \simeq SU(2) \times \mathbb{R}^3$ となる。すなわち $SL(2,\mathbb{C})$ は単連結である。　今から $SL(2,\mathbb{C})$ と $Spin(1,3)$ が Lie 群として同型であることを示す。

$SO(1,3)$ と $SL(2,\mathbb{C})$ の Lie 環について

以下で用いた Pauli 行列を用いて $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ が生成される。

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\{\sqrt{-1}\hat{\sigma}_k\}_{k=1}^3 \subset \mathfrak{k}$ が回転 $SO(3)$ の Lie 環を貼り、$\{\hat{\sigma}_k\}_{k=1}^3 \subset \mathfrak{p}$ がブーストを生成することが確かめられる。$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.
但しこれは Lie 環の直和分解ではない。

被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

命題

$\exp\colon \mathfrak{so}(1,3) \to SO_0(1,3)$ は全射である。

この命題の証明は省略する。これを使えば次の命題が示せる。

命題

$Ad^\dagger\colon SL(2,\mathbb{C}) \to SO_0(1,3)$ は普遍被覆写像である。ここで、
$M = \{X \in \mathbb{C}(4) \mid X^\dagger = -X\} \simeq \mathbb{R}^{1,3}$ に対する作用
$Ad^\dagger_A\colon M \ni X \mapsto AXA^\dagger \in M$ で M には $|X| = \det X$ で定まる非退化対称 2 次形式で符号数が $(1,3)$ のものが取れる。(これが M の Lorentz 計量)

被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

命題

$Ad^\dagger\colon SL(2,\mathbb{C}) \to SO_0(1,3)$ は普遍被覆写像である。ここで、$M = \{X \in \mathbb{C}(4) \mid X^\dagger = -X\} \simeq \mathbb{R}^{1,3}$ に対する作用 $Ad^\dagger_A\colon M \ni X \mapsto AXA^\dagger \in M$ で M には $|X| = \det X$ で定まる非退化対称 2 次形式で符号数が $(1,3)$ のものが取れる。(これが M の Lorentz 計量)

$\exp\left(\sqrt{-1}\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_k\right) \in SL(2,\mathbb{C})$ これは k 軸周りの回転を表している。一方で、$\exp\left(\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_k\right) \in SL(2,\mathbb{C})$ は k 軸方向へのブーストを表している。従って全射準同型であり、しかも全ての Pauli 行列と可換になる行列は単位行列のスカラー倍しかありえないため核が $\{\pm I_2\}$ であることもわかる。従って、位相群として $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(1,3)$ となり、$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}(1,3)$ であるからこれは Lie 群としての普遍被覆写像である。 □

被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

命題

$SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ に対して $Spin(1,3) \simeq SL(2,\mathbb{C})$.

$Spin(1,3)$ を $\mathbb{C}(4)$ に埋め込んで考える。

$$\exp\left(\frac{\theta}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\right) \mapsto \begin{cases} \exp\left(\sqrt{-1}\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_k\right) & (\mu = i, \nu = j) \\ \exp\left(\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_k\right) & (\mu = 0, \nu = k) \end{cases}$$

により準同型 $Spin(1,3) \to SL(2,\mathbb{C})$ がある。これは Lie 群の同型写像である。 □

従って、$Spin(1,3)$ が単連結になることがわかり、以下が成り立つ。

命題

$Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$ は Lie 群としての普遍被覆写像である。

目次

$Spin(1,3)$ の話

1. Minkowski 時空と Lorentz 群
2. Dirac 代数 (Clifford 代数)
3. 被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$

スピノルと Dirac 方程式

1. スピノル表現とスピノル束
2. Dirac 作用素と Dirac 方程式
3. 曲がった時空における Dirac 方程式

スピノル表現とスピノル束

定義

今まで出てきた $Spin(1,3)$ の行列 $\mathbb{C}(4)$ への埋め込み
$Spin(1,3) \hookrightarrow GL(4,\mathbb{C})$ を $Spin(1,3)$ のスピノル表現という。

Lorentz 群や特殊線型群に対する表現空間は $\mathbb{R}^{1,3}$ や $\mathbb{R}^3$ であったが、これらは多様体の接空間に対応する。一方で、スピン群固有の表現は被覆写像で落とした Lorentz 群や特殊線型群ではなく、スピノル表現であり、その表現空間は $\mathbb{C}^4$ である。これは多様体にスピノル空間を考えることが対応している。多様体 M には接空間を束ねた接ベクトル束 TM が自然に考えられるが、スピノル空間を束ねたスピノル束 $\mathbf{S}$ は常に考えられるとは限らない。このようなスピノル束を考えることができる時空 (多様体)M はスピン多様体と呼ばれる。スピン構造を持つ必要十分条件は完全に底空間の多様体 M の位相的な条件で決まる。

多様体の G 構造

一般に多様体 M の接ベクトル束 TM の構造群 $GL(n,\mathbb{R})$ が Lie 群 G に簡約できるとき多様体 M の G 構造という。(スピン構造は持ち上げる)

スピノル表現とスピノル束

定義

今まで出てきた $Spin(1,3)$ の行列 $\mathbb{C}(4)$ への埋め込み $Spin(1,3) \hookrightarrow GL(4,\mathbb{C})$ を $Spin(1,3)$ のスピノル表現という。

Lorentz 群や特殊線型群に対する表現空間は $\mathbb{R}^{1,3}$ や $\mathbb{R}^3$ であったが、これらは多様体の接空間に対応する。一方で、スピン群固有の表現は被覆写像で落とした Lorentz 群や特殊線型群ではなく、スピノル表現であり、その表現空間は $\mathbb{C}^4$ である。これは多様体にスピノル空間を考えることが対応している。多様体 M には接空間を束ねた接ベクトル束 TM が自然に考えられるが、スピノル空間を束ねたスピノル束 $\mathbf{S}$ は常に考えられるとは限らない。このようなスピノル束を考えることができる時空 (多様体)M はスピン多様体と呼ばれる。スピン構造を持つ必要十分条件は完全に底空間の多様体 M の位相的な条件で決まる。

多様体の G 構造

一般に多様体 M の接ベクトル束 TM の構造群 $GL(n,\mathbb{R})$ が Lie 群 G に簡約できるとき多様体 M の G 構造という。(スピン構造は持ち上げる)

スピノル表現とスピノル束

多様体の G 構造

一般に多様体 M の接ベクトル束 TM の構造群 $GL(n, \mathbb{R})$ が Lie 群 G に簡約できるとき多様体 M の G 構造という。但し、スピノル束の場合はスピン群の表現空間が接ベクトル空間ではないため構造群が $GL(n, \mathbb{R})$ より大きくなってしまうため、被覆写像で持ち上げる。

Minkowski 時空での Lorentz 群、スピン群のファイバーへの作用

$G = SO(1,3), Spin(1,3)$ が $M = \mathbb{R}^{1,3}$ 上の接空間、スピノル空間への作用はただの行列の積 (自然表現) である。$TM \simeq \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{R}^{1,3}, \mathbf{S} \simeq \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{C}^4$ は、どちらも自明束になる。

$$SO(1,3) \times \mathbb{R}^{1,3} \ni (\Lambda, x) \mapsto \Lambda x \in \mathbb{R}^{1,3}.$$
$$Spin(1,3) \times \mathbb{C}^4 \ni (g, \psi) \mapsto \rho(g)\psi \in \mathbb{C}^4.$$

目次

Dirac 作用素と Dirac 方程式

物理系の G 対称性

一般に物理系は Lagrangian(密度) や Hamiltonian(密度) と呼ばれる多様体上の関数により記述される。運動方程式が Lagrangian または Hamiltonian の変分により決定されることから、これらを解析することで物理系の理解は深まる。一方で運動方程式を解かなくとも物理系の G 対称性から保存則がわかるなどの利点があるため、運動方程式そのものよりも、Lagrangian や Hamiltonian は重要だと言える。

量子力学における G 対称性

量子力学では系の物理状態はベクトルで表される。運動方程式もその状態ベクトルに関する方程式であり、物理系に Lie 群 G 作用に関する対称性があれば、系の保存量として Hamiltonian と可換な G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対応する Hermite 作用素としての物理量が存在する。

Dirac 作用素と Dirac 方程式

物理系の G 対称性

一般に物理系は Lagrangian(密度) や Hamiltonian(密度) と呼ばれる多様体上の関数により記述される。運動方程式が Lagrangian または Hamiltonian の変分により決定されることから、これらを解析することで物理系の理解は深まる。一方で運動方程式を解かなくとも物理系の G 対称性から保存則がわかるなどの利点があるため、運動方程式そのものよりも、Lagrangian や Hamiltonian は重要だと言える。

量子力学における G 対称性

量子力学では系の物理状態はベクトルで表される。運動方程式もその状態ベクトルに関する方程式であり、物理系に Lie 群 G 作用に関する対称性があれば、系の保存量として Hamiltonian と可換な G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対応する Hermite 作用素としての物理量が存在する。

Dirac 作用素と Dirac 方程式

物理系の G 対称性

一般に物理系は Lagrangian(密度) や Hamiltonian(密度) と呼ばれる多様体上の関数により記述される。運動方程式が Lagrangian または Hamiltonian の変分により決定されることから、これらを解析することで物理系の理解は深まる。一方で運動方程式を解かなくとも物理系の G 対称性から保存則がわかるなどの利点があるため、運動方程式そのものよりも、Lagrangian や Hamiltonian は重要だと言える。

量子力学における G 対称性

量子力学では系の物理状態はベクトルで表される。[a] 運動方程式もその状態ベクトルに関する方程式であり、物理系に Lie 群 G 作用に関する対称性があれば、系の保存量として Hamiltonian と可換な G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対応する Hermite 作用素として物理量が存在する。

---

[a] Shrodinger 方程式では電子のスピン角運動量を表すことができない。

Dirac 作用素と Dirac 方程式

Dirac 方程式

Dirac 方程式はスピン構造を持つ時空 M 上のスピノル束の切断 $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$ に関する方程式であり、その Lagrangian 密度と Dirac 方程式は以下で表される。

$$\mathcal{L}_D = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu \nabla^S_\mu \psi - (\nabla^S_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi\right] + m\bar{\psi}\psi. \tag{4}$$

$$\sqrt{-1}\gamma^\mu \nabla^S_\mu \psi - m\psi = 0. \tag{5}$$

Minkowski 時空における Dirac 方程式

時空多様体が $M = \mathbb{R}^{1,3}$ のときは色々簡単になる。まず接ベクトル束は $TM \simeq \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{R}^{1,3}$ だからベクトル場 $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^{1,3}) = \Gamma(TM)$ はベクトル値関数だし、スピノル束も $\mathbf{S} \simeq \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{C}^4$ のように自明だから、スピノル場 $\Gamma(\mathbf{S})$ もただの複素ベクトル値関数である。

Dirac 作用素と Dirac 方程式

Minkowski 時空における Dirac 方程式

時空多様体が $M=\mathbb{R}^{1,3}$ のときは色々簡単になる。まず接ベクトル束は $TM \simeq \mathbb{R}^{1,3}\times\mathbb{R}^{1,3}$ だからベクトル場 $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^{1,3})=\Gamma(TM)$ はベクトル値関数だし、スピノル束も $\mathbf{S}\simeq\mathbb{R}^{1,3}\times\mathbb{C}^4$ より自明束だから、スピノル場 $\Gamma(\mathbf{S})$ もただの (4 成分の) ベクトル値関数である。Lagrangian 密度や Dirac 方程式もいくらか単純になる。

$$\mathcal{L}_D = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right] + m\bar{\psi}\psi. \tag{6}$$

$$\sqrt{-1}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0. \tag{7}$$

定義 (Dirac 作用素)

Dirac 作用素 $D\colon\Gamma(\mathbf{S})\to\Omega^1(M,\mathbf{S})$ を $D=\gamma^\mu\partial_\mu$ とすると定義から座標に依存しない。Dirac 作用素を用いれば Dirac 方程式は $(\sqrt{-1}D-m)\psi=0$.

Dirac 作用素と Dirac 方程式

Dirac 系における共変性

Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_D$ で表される物理系のことを Dirac 系と呼ぶことにすると、Dirac 系における Dirac 方程式 (5) を満たすスピノルを考える。Dirac 系における物理量と対称性とはなんだろうか？

運動方程式の共変性

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = f_\mu + qF_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}, \text{ (特殊相対論は Lorentz 共変)}$$

$$\sqrt{-1}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0 \text{(相対論的量子論だと?)}$$

Dirac 作用素と Dirac 方程式

Dirac 系における共変性

Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_D$ で表される物理系のことを Dirac 系と呼ぶことにすると、Dirac 系における Dirac 方程式 (5) を満たすスピノルを考える。Dirac 系における物理量と対称性とはなんだろうか？共変性とは方程式の形が座標変換によらないことを意味する。特殊相対論において座標変換は慣性系間における変換だから、ベクトル場に対する線型変換として Lorentz 変換となる。一方で相対論的量子力学において座標変換はスピノル場のスピノル変換になる。

運動方程式の共変性

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = f_\mu + qF_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}, \text{ (特殊相対論は } SO_0(1,3) \text{ 共変)}$$

$$\sqrt{-1}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \text{(相対論的量子論だと } Spin(1,3) \text{ 共変)}$$

Dirac 作用素と Dirac 方程式

3 次元空間の奇跡

実は非相対論的量子力学においてはスピノル空間における内積が取れることが知られている。それは普遍被覆 $Ad\colon Spin(3) \to SO(3)$ が二重被覆で、同型 $Spin(3) \simeq SU(2)$ の自然表現がスピノル表現 $SU(2) \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ になるからである。また普遍被覆 $Ad\colon Spin(n) \to SO(n)$ において $n = 3$ のとき Lie 群としての随伴表現として実現できることも知られている。

Dirac 共役と Lorentz 共変性

スピン構造を持つ時空 (M, g) のスピノル束にもファイバー計量を取りたいがそれは無理 ($Spin(1,3) \simeq SL(2, \mathbb{C})$) なのだが、Dirac 共役 $\mathbf{S} \to \overline{\mathbf{S}}$ を $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$ に対して $\psi \mapsto \overline{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$ と定めると $\overline{\psi}\psi \in C^\infty(M)$ は $Spin(1,3)$ の作用で不変となる。(内積っぽいものにはなっている)

$\overline{\psi}\psi$ は実であるが、正になるとは限らず、これから内積を作ることはできない。

Dirac 作用素と Dirac 方程式

$\mathbf{S}$ と $\overline{\mathbf{S}}$ への $Spin(1,3)$ の作用はそれぞれ $g \in Spin(1,3)$ について

$$g\colon \mathbf{S} \ni \psi \mapsto \rho(g)\psi \in \mathbf{S}.$$
$$g\colon \overline{\mathbf{S}} \ni \overline{\psi} \mapsto \overline{\rho(g)\psi} \in \overline{\mathbf{S}}.$$

によって定めると、$\overline{\rho(g)\psi} = \psi^\dagger \rho(g)^\dagger \gamma^0 = \overline{\psi}\gamma^0\rho(g)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}\rho(g)^{-1}$. また、Spin(1,3) の $\mathbf{S}$ への作用は Ad で TM に落ちるので、
$Ad_g\colon TM \ni X \mapsto Ad_g(X) \in TM$ を誘導する。$Ad_g = \Lambda \in SO_0(1,3)$ とすると、

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \mapsto \overline{\psi}Ad_{g^{-1}}(\gamma^\mu)\Lambda(\partial_\mu)\psi = \overline{\psi}(\Lambda^{-1})^\mu_\nu\gamma^\nu\Lambda^\kappa_\mu\partial_\kappa\psi = \overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi.$$

以上より、Minkowski 時空の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}_D = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right] + m\bar{\psi}\psi.$$

は $Spin(1,3)$ 不変であることがわかった。(Dirac 方程式が不変)

目次

曲がった時空における Dirac 方程式

定義 (Lorentz 計量)

非退化対称 2 次形式 $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ で符号数が $(1, 3)$ であるものを線型 Lorentz 計量という。Minkowski 時空 $\mathbb{R}^{1,3}$ とは $\mathbb{R}^4$ と線型 Lorentz 計量 $g\colon \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の組 $(\mathbb{R}^4, g)$ のことであった。可微分多様体 M 上の Lorentz 計量とは切断の元 $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ で各点 $x \in M$ において $g_x \in T_x^*M \otimes T_x^*M$ が線型 Lorentz 計量となるものである。

定義 (4 次元時空多様体)

多様体 M とその上の Lorentz 計量 g の組 (M, g) を Lorentz 多様体という。連結で向き付け可能かつ時間的向き付け可能な 4 次元 Lorentz 多様体のことを (4 次元) 時空と呼ぶ。

Lorentz 計量の存在条件

Lorentz 計量が多様体に存在する必要十分条件は多様体に 1 次元接分布が存在することである。またこの 1 次元接分布が定める接束の 1 次元部分束が自明であることを、時間的向き付け可能という。

定義 (スピン構造)

向き付けられた 4 次元時空 (M,g) のスピン構造とは主 $Spin(1,3)$ 束 $Spin(M)$ の $Spin(1,3)$ 作用と主 $SO_0(1,3)$ 束 $SO_0(M)$ の $SO_0(1,3)$ 作用が被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3)\to SO_0(1,3)$ によって同変な束準同型 $\Phi\colon Spin(M)\to SO(M)$ の組 $(\Phi, Spin(M))$ のことをいう。

$$\begin{tikzcd}
Spin(M)\times Spin(1,3) \arrow[rr, "\Phi\times Ad"] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright"] & & SO(M)\times SO_0(1,3) \arrow[d] \\
Spin(M) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[r, phantom, bend right, ""] & \circlearrowright & SO_0(M) \arrow[dl, "\pi"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

曲がった時空における Dirac 方程式

定義 (スピン構造)

向き付けられた 4 次元時空 (M, g) のスピン構造とは主 $Spin(1,3)$ 束 $Spin(M)$ の $Spin(1,3)$ 作用と主 $SO_0(1,3)$ 束 $SO_0(M)$ の $SO_0(1,3)$ 作用が被覆写像 $Ad\colon Spin(1,3) \to SO_0(1,3)$ によって同変な束準同型 $\Phi\colon Spin(M) \to SO(M)$ の組 $(\Phi, Spin(M))$ のことをいう。

定義 (スピノル束)

スピノル束とはスピン構造を持つ多様体 M を底空間、$Spin(1,3)$ のスピノル空間 $\mathbb{C}^4$ をファイバーにもつ同伴ベクトル束 $\mathbf{S} = Spin(M) \times \mathbb{C}^4/\sim$ のことである。(複素ベクトル束)

$(u, z) \sim (u', z') \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in Spin(1,3), u' = ug, z' = \rho(g)^{-1}z.$

スピン構造の存在条件

多様体にスピン構造が存在する必要十分条件は接ベクトル束の 1 次と 2 次の Stiefel-Whitney 類が自明であることである。

曲がった時空における Dirac 方程式

スピン構造の存在条件

多様体にスピン構造が存在する必要十分条件は接ベクトル束の 1 次と 2 次の Stiefel-Whitney 類が自明であることである。

定理 (Geroch,1968)

4 次元時空 M にスピン構造が存在するための必要十分条件は M が平行化可能であることである。

曲がった時空における Dirac 方程式

スピン接続

時空 (M, g) には一般に Lorentz 計量 g から定まるただ一つの Levi-Civita 接続と呼ばれる $\nabla\colon \Gamma(TM) \to \Omega^1(M, TM)$ が存在する。スピン構造を持つ時空 (M, g) 上のスピノル束は、Levi-Civita 接続 ∇ から自然に定まるスピノル束の接続スピン接続 $\nabla^S\colon \Gamma(\mathbf{S}) \to \Omega^1(M, \mathbf{S})$ を持つ。

スピノル束のファイバー計量

ベクトル束の接続にはファイバー計量と両立する計量接続という概念があったが、Lorentz 多様体上のスピノル束に自然なファイバー計量は存在しない。(スピノル表現がユニタリ表現になるかという問題)

自然な接続として計量を保存するものを取りたいと思うのが人情というものだが、コンパクト群でないためそのようなものは存在しない。内積っぽいものは先ほど出てきた Dirac 共役で定義される。

曲がった時空における Dirac 方程式

(M, g, ∇) で 4 次元時空を表す。TM の g に関する正規直交局所標構場 $\{e_a\}_{a=0}^3 \subset \Gamma(U, TM)$ に対して、接続形式を $\{\omega_b^a\}$ とする。すなわち $\nabla e_a = \omega_a^b e_b$ である。これからスピン接続 $\nabla^S \colon \Gamma(\mathbf{S}) \to \Omega^1(M; \mathbf{S})$ が、任意の $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$ に対して正規直交標構場 $\{e_a\}_{a=0}^3 \subset \Gamma(U, TM)$ を用いて局所的に

$$
\begin{aligned}
\nabla^S \psi &= \left(d + \frac{1}{4} g(\nabla e_a, e_b) \gamma^a \gamma^b \right) \psi \\
&= \left(d + \frac{1}{4} \omega_{ba} \gamma^a \gamma^b \right) \psi .
\end{aligned}
$$

として定義される。

これは Levi-Civita 接続が以下のように表せることから、Lie 環の同型を考えれば自然な定義である。

$$
\nabla e_c = \frac{1}{2} \sum_{ab} g(\nabla e_a, e_b)(e_a \wedge e_b) e_c .
$$

曲がった時空における Dirac 方程式

Dirac 方程式

Dirac 方程式はスピン構造を持つ時空 M 上のスピノル束の切断 $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$ に関する方程式であり、その Lagrangian 密度と Dirac 方程式は以下で表される。

$$\mathcal{L}_D = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu \nabla^S_\mu \psi - (\nabla^S_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi\right] + m\bar{\psi}\psi.$$

$$\sqrt{-1}\gamma^\mu \nabla^S_\mu \psi - m\psi = 0.$$

定義 (Dirac 作用素)

スピン接続 $\nabla^S \colon \Gamma(\mathbf{S}) \to \Omega^1(M, \mathbf{S})$ に対して Dirac 作用素 $D \colon \Gamma(\mathbf{S}) \to \Omega^1(M, \mathbf{S})$ を $D = \gamma^\mu \nabla^S_\mu$ とすると定義から座標に依存しない。Dirac 作用素を用いれば Dirac 方程式は $(\sqrt{-1}D - m)\psi = 0$ と簡単にかける。

曲がった時空における Dirac 方程式

電磁場のある時空

次は スピノル束を捻ることで電磁場ありの時空における Dirac 方程式を考える。$Spin^c$ 束のスピノル束ともいう。

定義 (捻れスピノル束)

スピン構造を持つ時空 M 上の主 $U(1)$ 束 $P_{U(1)}$ を考える。埋め込み $\rho\colon U(1) \hookrightarrow \mathbb{C}$ を表現とする $P_{U(1)}$ の同伴ベクトル束 $L := P_{U(1)} \times_\rho \mathbb{C} := P_{U(1)} \times \mathbb{C}/\sim$ すなわち、

$$(u,z) \sim (u',z') \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \exists\theta \in \mathbb{R}, u' = ue^{\sqrt{-1}\theta}, z' = e^{-\sqrt{-1}\theta}z$$

に対して捻れスピノル束 E とは L とスピノル束 $\mathbf{S}$ のテンソル積束 $E = \mathbf{S} \otimes L$ のことである。

曲がった時空における Dirac 方程式

電磁場のある時空の Dirac 方程式

電磁場ありの Dirac 方程式はスピン構造を持つ時空 M 上の捻れスピノル束 $E = \mathbf{S} \otimes L$ の切断 $\psi \in \Gamma(E)$ に関する方程式になる。その Lagrangian 密度と Dirac 方程式は以下で表される。

$$\mathcal{L}_D = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu \nabla^E_\mu \psi - (\nabla^E_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi\right] + m\bar{\psi}\psi. \tag{8}$$

$$\sqrt{-1}\gamma^\mu \nabla^E_\mu \psi - m\psi = 0. \tag{9}$$

これは見ればわかる通り、単に $\mathbf{S}$ を E に置き換えた式になっている。問題はベクトル束 E の接続がどうなっているかである。

テンソル積束の接続の復習

一般にベクトル束 E_1, E_2 のテンソル積束 $E = E_1 \otimes E_2$ の接続は E_1, E_2 の接続 $\nabla^{E_1}, \nabla^{E_2}$ を用いて、以下のように表せるのであった。

$$\nabla^E = \nabla^{E_1} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{E_2}.$$

曲がった時空における Dirac 方程式

電磁場のある時空の Dirac 方程式

電磁場ありの Dirac 方程式はスピン構造を持つ時空 M 上の捻れスピノル束 $E = \mathbf{S} \otimes L$ の切断 $\psi \in \Gamma(E)$ に関する方程式になる。その Lagrangian 密度と Dirac 方程式は以下で表される。

$$\mathcal{L}_D = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu \nabla_\mu^E \psi - (\nabla_\mu^E \bar{\psi})\gamma^\mu \psi\right] + m\bar{\psi}\psi. \tag{8}$$

$$\sqrt{-1}\gamma^\mu \nabla_\mu^E \psi - m\psi = 0. \tag{9}$$

これは見ればわかる通り、単に $\mathbf{S}$ を E に置き換えた式になっている。問題はベクトル束 E の接続がどうなっているかである。

テンソル積束の接続の復習

一般にベクトル束 E_1, E_2 のテンソル積束 $E = E_1 \otimes E_2$ の接続は E_1, E_2 の接続 $\nabla^{E_1}, \nabla^{E_2}$ を用いて、以下のように表せるのであった。

$$\nabla^E = \nabla^{E_1} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{E_2}.$$

曲がった時空における Dirac 方程式

電磁場のある時空の Dirac 方程式

電磁場ありの Dirac 方程式はスピン構造を持つ時空 M 上の捻れスピノル束 $E = \mathbf{S} \otimes L$ の切断 $\psi \in \Gamma(E)$ に関する方程式になる。その Lagrangian 密度と Dirac 方程式は以下で表される。

$$\mathcal{L}_D = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu \nabla^E_\mu \psi - (\nabla^E_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi\right] + m\bar{\psi}\psi. \tag{10}$$

$$\sqrt{-1}\gamma^\mu \nabla^E_\mu \psi - m\psi = 0. \tag{11}$$

定義 (捻れ Dirac 作用素)

主 $U(1)$ 束 $P_{U(1)}$ の接続 1 形式を $\sqrt{-1}qA, E$ の切断を $\psi \in \Gamma(E)$ とすると、

$$\nabla^E = \nabla^{\mathbf{S}} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^L, \tag{12}$$

$$\nabla^E \psi = (\nabla^{\mathbf{S}} + \sqrt{-1}qA)\psi, \tag{13}$$

のようにかけるので捻れ Dirac 作用素は $D = \gamma^\mu \nabla^E_\mu$ となる。

曲がった時空における Dirac 方程式

電磁場の満たす方程式

電磁場ありの時空では、どういう電磁場があるべきかを決定する方程式が存在する。すなわち Maxwell 方程式である。曲率 $F = dA$ を物理では電磁場テンソルと言って、接続 1 形式 A のことを物理ではベクトルポテンシャル、一般にゲージポテンシャルと言う。

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{14}$$

$$dF = 0, d^\dagger F = j. \ (j_\mu = q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) \tag{15}$$

スピンを持つ時空の Dirac-Maxwell 系

時空のスピン構造と Dirac 方程式の解の関係や、主 $U(1)$ 束の構造と Maxwell 方程式の解の関係を調べたい。(以下の連立微分方程式の解)

$$\sqrt{-1}\gamma^\mu\nabla^E_\mu\psi = m\psi, \tag{16}$$

$$dF = 0, d^\dagger F = j. \ (j_\mu = q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) \tag{17}$$

曲がった時空における Dirac 方程式

時空の満たす方程式

最後に電磁場とスピノルから時空の満たす方程式を考える。時空の満たす方程式を Einstein 方程式と言う。Einstein 方程式は $\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{16\pi}\mathcal{R}$ に電磁場、スピノルの Lagrangian を加えた $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_D$ と体積形式をかけた以下の作用積分を g で変分してできる方程式である。

$$S = \int_M \mathcal{L} vol_g, \tag{18}$$

$$Ric^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi T^{\mu\nu}. \tag{19}$$

Einstein-Dirac-Maxwell 系

時空の計量を Einstein 方程式の解として適切なスピノル (と電磁場) の設定から得られれば面白いと思う。

最後に

結論

Dirac 方程式は元々 Minkowski 時空における電子の運動方程式であり、それを曲がった時空の方程式に拡張すればその幾何学的対象としての起源は Riemann スピン多様体ではなく、Lorentz スピン多様体である。

問題意識と今日のまとめ

1. $Spin(1,3)$ のスピノル表現と $SO_0(1,3)$ の表現は区別してね。
2. Lorentz 多様体自体一般相対論の舞台なので、電磁場やスピノルなどの物理的な状況設定とも相性が良い。
3. [a] スピノルの住んでいる Lorentz 多様体のスピン構造を調べたい。

[a] Dirac 方程式の解という意味

最後に

結論

Dirac 方程式は元々 Minkowski 時空における電子の運動方程式であり、それを曲がった時空の方程式に拡張すればその幾何学的対象としての起源は Riemann スピン多様体ではなく、Lorentz スピン多様体である。

問題意識と今日のまとめ

1. $Spin(1,3)$ のスピノル表現と $SO_0(1,3)$ の表現は区別してね。
2. Lorentz 多様体自体一般相対論の舞台なので、電磁場やスピノルなどの物理的な状況設定とも相性が良い。
3. [a] スピノルの住んでいる Lorentz 多様体のスピン構造を調べたい。

[a] Dirac 方程式の解という意味

最後に

結論

Dirac 方程式は元々 Minkowski 時空における電子の運動方程式であり、それを曲がった時空の方程式に拡張すればその幾何学的対象としての起源は Riemann スピン多様体ではなく、Lorentz スピン多様体である。

問題意識と今日のまとめ

1. $Spin(1,3)$ のスピノル表現と $SO_0(1,3)$ の表現は区別してね。
2. Lorentz 多様体自体一般相対論の舞台なので、電磁場やスピノルなどの物理的な状況設定とも相性が良い。
3. [a] スピノルの住んでいる Lorentz 多様体のスピン構造を調べたい。

[a] Dirac 方程式の解という意味