線形順序集合とその上で定義される構造について

石宇哲也

Miami University

2022 年 5 月 1 日

定義

Definition

集合 X 上の関係 R (すなわち $X \times X$ の部分集合) が以下の条件を満たすときに、R は X 上の半順序であるという。

1. (反射律) 任意の $x \in X$ に対して、xRx.
2. (反対称律) 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy かつ yRx ならば $x = y$.
3. (推移律) 任意の $x, y, z \in X$ に対して、xRy かつ yRz ならば xRz.

これに加えて以下の条件を満たすときに R は X 上の線形順序（または全順序）であるという。

- 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy または yRx が成り立つ。

R が X 上の線形順序であるときに、(X, R) を線形順序集合と呼ぶ。

定義

Definition

集合 X 上の関係 R (すなわち $X \times X$ の部分集合) が以下の条件を満たすときに、R は X 上の半順序であるという。

1. (反射律) 任意の $x \in X$ に対して、xRx.
2. (反対称律) 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy かつ yRx ならば $x = y$.
3. (推移律) 任意の $x, y, z \in X$ に対して、xRy かつ yRz ならば xRz.

これに加えて以下の条件を満たすときに R は X 上の線形順序（または全順序）であるという。

- 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy または yRx が成り立つ。

R が X 上の線形順序であるときに、(X, R) を線形順序集合と呼ぶ。

定義

Definition

集合 X 上の関係 R (すなわち $X \times X$ の部分集合) が以下の条件を満たすときに、R は X 上の半順序であるという。

1. (反射律) 任意の $x \in X$ に対して、xRx.
2. (反対称律) 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy かつ yRx ならば $x = y$.
3. (推移律) 任意の $x, y, z \in X$ に対して、xRy かつ yRz ならば xRz.

これに加えて以下の条件を満たすときに R は X 上の線形順序（または全順序）であるという。

- 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy または yRx が成り立つ。

R が X 上の線形順序であるときに、(X, R) を線形順序集合と呼ぶ。

定義

Definition

集合 X 上の関係 R (すなわち $X \times X$ の部分集合) が以下の条件を満たすときに、R は X 上の半順序であるという。

1. (反射律) 任意の $x \in X$ に対して、xRx.
2. (反対称律) 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy かつ yRx ならば $x = y$.
3. (推移律) 任意の $x, y, z \in X$ に対して、xRy かつ yRz ならば xRz.

これに加えて以下の条件を満たすときに R は X 上の線形順序 (または全順序) であるという。

- 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy または yRx が成り立つ。

R が X 上の線形順序であるときに、(X, R) を線形順序集合と呼ぶ。

定義

Definition

集合 X 上の関係 R (すなわち $X \times X$ の部分集合) が以下の条件を満たすときに、R は X 上の半順序であるという。

1. (反射律) 任意の $x \in X$ に対して、xRx.
2. (反対称律) 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy かつ yRx ならば $x = y$.
3. (推移律) 任意の $x, y, z \in X$ に対して、xRy かつ yRz ならば xRz.

これに加えて以下の条件を満たすときに R は X 上の線形順序(または全順序)であるという。

- 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy または yRx が成り立つ。

R が X 上の線形順序であるときに、(X, R) を線形順序集合と呼ぶ。

定義

Definition

集合 X 上の関係 R (すなわち $X \times X$ の部分集合) が以下の条件を満たすときに、R は X 上の半順序であるという。

1. (反射律) 任意の $x \in X$ に対して、xRx.
2. (反対称律) 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy かつ yRx ならば $x = y$.
3. (推移律) 任意の $x, y, z \in X$ に対して、xRy かつ yRz ならば xRz.

これに加えて以下の条件を満たすときに R は X 上の線形順序(または全順序)であるという。

- 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy または yRx が成り立つ。

R が X 上の線形順序であるときに、(X, R) を線形順序集合と呼ぶ。

定義

Definition

集合 X 上の関係 R (すなわち $X \times X$ の部分集合) が以下の条件を満たすときに、R は X 上の半順序であるという。

1. (反射律) 任意の $x \in X$ に対して、xRx.
2. (反対称律) 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy かつ yRx ならば $x = y$.
3. (推移律) 任意の $x, y, z \in X$ に対して、xRy かつ yRz ならば xRz.

これに加えて以下の条件を満たすときに R は X 上の線形順序（または全順序）であるという。

- 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy または yRx が成り立つ。

R が X 上の線形順序であるときに、(X, R) を線形順序集合と呼ぶ。

定義

Definition

集合 X 上の関係 R (すなわち $X \times X$ の部分集合) が以下の条件を満たすときに、R は X 上の半順序であるという。

1. (反射律) 任意の $x \in X$ に対して、xRx.
2. (反対称律) 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy かつ yRx ならば $x = y$.
3. (推移律) 任意の $x, y, z \in X$ に対して、xRy かつ yRz ならば xRz.

これに加えて以下の条件を満たすときに R は X 上の線形順序（または全順序）であるという。

- 任意の $x, y \in X$ に対して、xRy または yRx が成り立つ。

R が X 上の線形順序であるときに、(X, R) を線形順序集合と呼ぶ。

例

Example

- $\mathbb{R}$ に普通の順序を入れたもの。
- $\mathbb{R}$ の任意の部分集合。
  - $\mathbb{N}$ とか $\mathbb{Z}$ とか $\mathbb{Q}$ とかが入る。
- 順序数の集合に普通の順序を入れたもの。
  - 順序数はフォン・ノイマン式に、それより小さい全ての順序数の集合で表されているとする。
  - 例えば、最小の非可算順序数 ω_1 は可算順序数全体の集合となる。

例

Example

- $\mathbb{R}$ に普通の順序を入れたもの。
- $\mathbb{R}$ の任意の部分集合。
  - $\mathbb{N}$ とか $\mathbb{Z}$ とか $\mathbb{Q}$ とかが入る。
- 順序数の集合に普通の順序を入れたもの。
  - 順序数はフォン・ノイマン式に、それより小さい全ての順序数の集合で表されているとする。
  - 例えば、最小の非可算順序数 ω_1 は可算順序数全体の集合となる。

例

Example

- $\mathbb{R}$ に普通の順序を入れたもの。
- $\mathbb{R}$ の任意の部分集合。
  - $\mathbb{N}$ とか $\mathbb{Z}$ とか $\mathbb{Q}$ とかが入る。
- 順序数の集合に普通の順序を入れたもの。
  - 順序数はフォン・ノイマン式に、それより小さい全ての順序数の集合で表されているとする。
  - 例えば、最小の非可算順序数 ω_1 は可算順序数全体の集合となる。

例

Example

- $\mathbb{R}$ に普通の順序を入れたもの。
- $\mathbb{R}$ の任意の部分集合。
  - $\mathbb{N}$ とか $\mathbb{Z}$ とか $\mathbb{Q}$ とかが入る。
- 順序数の集合に普通の順序を入れたもの。
  - 順序数はフォン・ノイマン式に、それより小さい全ての順序数の集合で表されているとする。
  - 例えば、最小の非可算順序数 ω_1 は可算順序数全体の集合となる。

逆順序

Definition

(X, R) を線形順序だとすると、(X, R^{-1}) も線形順序になる。これを、(X, R) の逆順序 (reverse) という。X で線形順序を表してしまっているときには、$-X$ でその逆順序を表すときがある。

Example

- ω が可算上昇列なので、$-\omega$ は可算下降列。
- $-\omega_1$ は非可算下降列。

逆順序

Definition

(X, R) を線形順序だとすると、(X, R^{-1}) も線形順序になる。これを、(X, R) の逆順序 (reverse) という。X で線形順序を表してしまっているときには、$-X$ でその逆順序を表すときがある。

Example

- ω が可算上昇列なので、$-\omega$ は可算下降列。
- $-\omega_1$ は非可算下降列。

逆順序

Definition

(X, R) を線形順序だとすると、(X, R^{-1}) も線形順序になる。これを、(X, R) の逆順序 (reverse) という。X で線形順序を表してしまっているときには、$-X$ でその逆順序を表すときがある。

Example

- ω が可算上昇列なので、$-\omega$ は可算下降列。
- $-\omega_1$ は非可算下降列。

逆順序

Definition

(X, R) を線形順序だとすると、(X, R^{-1}) も線形順序になる。これを、(X, R) の逆順序 (reverse) という。X で線形順序を表してしまっているときには、$-X$ でその逆順序を表すときがある。

Example

- ω が可算上昇列なので、$-\omega$ は可算下降列。
- $-\omega_1$ は非可算下降列。

Aronszajn 直線

これまでに出てきた非可算線形順序は、下記の 3 つの条件のどれか一つを満たしている

- $\mathbb{R}$ の部分順序になる
  - 可分、すなわち可算集合 D で、任意の非空開集合と交わるようなものが存在することと同値。
- 非可算上昇列が存在する
  - ω_1 が埋め込めることと同値
- 非可算下降列が存在する
  - $-\omega_1$ が埋め込めることと同値

なお、ここでの埋め込みは順序を保つ単射で定義される。

Aronszajn 直線

これまでに出てきた非可算線形順序は、下記の 3 つの条件のどれか一つを満たしている

- $\mathbb{R}$ の部分順序になる
  - 可分、すなわち可算集合 D で、任意の非空開集合と交わるようなものが存在することと同値。
- 非可算上昇列が存在する
  - ω_1 が埋め込めることと同値
- 非可算下降列が存在する
  - $-\omega_1$ が埋め込めることと同値

なお、ここでの埋め込みは順序を保つ単射で定義される。

Aronszajn 直線

これまでに出てきた非可算線形順序は、下記の 3 つの条件のどれか一つを満たしている

- $\mathbb{R}$ の部分順序になる
  - 可分、すなわち可算集合 D で、任意の非空開集合と交わるようなものが存在することと同値。
- 非可算上昇列が存在する
  - ω_1 が埋め込めることと同値
- 非可算下降列が存在する
  - $-\omega_1$ が埋め込めることと同値

なお、ここでの埋め込みは順序を保つ単射で定義される。

Aronszajn 直線

これまでに出てきた非可算線形順序は、下記の 3 つの条件のどれか一つを満たしている

- $\mathbb{R}$ の部分順序になる
    - 可分、すなわち可算集合 D で、任意の非空開集合と交わるようなものが存在することと同値。
- 非可算上昇列が存在する
    - ω_1 が埋め込めることと同値
- 非可算下降列が存在する
    - $-\omega_1$ が埋め込めることと同値

なお、ここでの埋め込みは順序を保つ単射で定義される。

Aronszajn 直線 (続き)

Definition

線形順序集合 X で、可分な非可算線形順序も ω_1 も $-\omega_1$ も埋め込めないようなものを、Aronszajn 直線と言う。

Aronszajn 直線が ZFC で存在することは 20 世紀前半から知られている。

Aronszajn 直線 (続き)

Definition

線形順序集合 X で、可分な非可算線形順序も ω_1 も $-\omega_1$ も埋め込めないようなものを、Aronszajn 直線と言う。

Aronszajn 直線が ZFC で存在することは 20 世紀前半から知られている。

基底問題

ここまできて五元基底定理のことにふれないのは不自然なので紹介する。

これは非可算線形順序に関する定理だが、まず簡単な無限線形順序のことについて見る。

基底問題

ここまできて五元基底定理のことにふれないのは不自然なので紹介する。

これは非可算線形順序に関する定理だが、まず簡単な無限線形順序のことについて見る。

基底問題

ここまできて五元基底定理のことにふれないのは不自然なので紹介する。

これは非可算線形順序に関する定理だが、まず簡単な無限線形順序のことについて見る。

無限線形順序の基底

X が無限線形順序だとすると、これには必ず無限上昇列か無限下降列が存在する。すなわち ω か $-\omega$ を埋め込むことができる。

このとき、$\mathcal{B} = \{\omega, -\omega\}$ とすると、任意の無限線形順序 X に対して、それに埋め込むことができるような $B \in \mathcal{B}$ が存在する。このような $\mathcal{B}$ のことを無限線形順序のクラスの基底 (basis) という。

任意の構造のクラスとその間の埋め込みが何かが定義できていれば、同様に基底を定義することができる。

無限線形順序の基底

X が無限線形順序だとすると、これには必ず無限上昇列か無限下降列が存在する。すなわち ω か $-\omega$ を埋め込むことができる。

このとき、$\mathcal{B} = \{\omega, -\omega\}$ とすると、任意の無限線形順序 X に対して、それに埋め込むことができるような $B \in \mathcal{B}$ が存在する。このような $\mathcal{B}$ のことを無限線形順序のクラスの基底 (basis) という。

任意の構造のクラスとその間の埋め込みが何かが定義できていれば、同様に基底を定義することができる。

無限線形順序の基底

X が無限線形順序だとすると、これには必ず無限上昇列か無限下降列が存在する。すなわち ω か $-\omega$ を埋め込むことができる。

このとき、$\mathcal{B} = \{\omega, -\omega\}$ とすると、任意の無限線形順序 X に対して、それに埋め込むことができるような $B \in \mathcal{B}$ が存在する。このような $\mathcal{B}$ のことを無限線形順序のクラスの基底 (basis) という。

任意の構造のクラスとその間の埋め込みが何かが定義できていれば、同様に基底を定義することができる。

非可算線形順序集合のクラスの基底

それでは、非可算線形順序集合全体のクラスではどうなるだろう？

定義から、任意の非可算線形順序集合は次の 4 つのタイプの非可算線形順序集合のうちどれかを埋め込むことができる。

- 非可算可分線形順序集合。
- 非可算上昇列。
- 非可算下降列。
- Aronszajn 直線。

よって、これら 4 つのクラスの基底を考えればよい。

非可算線形順序集合のクラスの基底

それでは、非可算線形順序集合全体のクラスではどうなるだろう？
定義から、任意の非可算線形順序集合は次の 4 つのタイプの非可算線形順序集合のうちどれかを埋め込むことができる。

- 非可算可分線形順序集合。
- 非可算上昇列。
- 非可算下降列。
- Aronszajn 直線。

よって、これら 4 つのクラスの基底を考えればよい。

非可算線形順序集合のクラスの基底

それでは、非可算線形順序集合全体のクラスではどうなるだろう？
定義から、任意の非可算線形順序集合は次の 4 つのタイプの非可算線形順序集合のうちどれかを埋め込むことができる。

- 非可算可分線形順序集合。
- 非可算上昇列。
- 非可算下降列。
- Aronszajn 直線。

よって、これら 4 つのクラスの基底を考えればよい。

非可算線形順序集合のクラスの基底

それでは、非可算線形順序集合全体のクラスではどうなるだろう？

定義から、任意の非可算線形順序集合は次の 4 つのタイプの非可算線形順序集合のうちどれかを埋め込むことができる。

- 非可算可分線形順序集合。
- 非可算上昇列。
- 非可算下降列。
- Aronszajn 直線。

よって、これら 4 つのクラスの基底を考えればよい。

非可算線形順序集合のクラスの基底

それでは、非可算線形順序集合全体のクラスではどうなるだろう？
定義から、任意の非可算線形順序集合は次の 4 つのタイプの非可算線形順序集合のうちどれかを埋め込むことができる。

- 非可算可分線形順序集合。
- 非可算上昇列。
- 非可算下降列。
- Aronszajn 直線。

よって、これら 4 つのクラスの基底を考えればよい。

非可算線形順序集合のクラスの基底

それでは、非可算線形順序集合全体のクラスではどうなるだろう？
定義から、任意の非可算線形順序集合は次の 4 つのタイプの非可算線形順序集合のうちどれかを埋め込むことができる。

- 非可算可分線形順序集合。
- 非可算上昇列。
- 非可算下降列。
- Aronszajn 直線。

よって、これら 4 つのクラスの基底を考えればよい。

非可算線形順序集合のクラスの基底

それでは、非可算線形順序集合全体のクラスではどうなるだろう？
定義から、任意の非可算線形順序集合は次の 4 つのタイプの非可算線形順序集合のうちどれかを埋め込むことができる。

- 非可算可分線形順序集合。
- 非可算上昇列。
- 非可算下降列。
- Aronszajn 直線。

よって、これら 4 つのクラスの基底を考えればよい。

ω_1 と $-\omega_1$

非可算上昇列を含む線形順序

線形順序が非可算上昇列を含むことと、ω_1 を埋め込めることは同値になる。よって、$\{\omega_1\}$ は非可算上昇列をもつ線形順序のクラスの基底になる。

非可算下降列を含む線形順序

線形順序が非可算下降列を含むことと、$-\omega_1$ を埋め込めることは同値になる。よって、$\{-\omega_1\}$ は非可算下降列をもつ線形順序のクラスの基底になる。

ω_1 と $-\omega_1$

非可算上昇列を含む線形順序

線形順序が非可算上昇列を含むことと、ω_1 を埋め込めることは同値になる。よって、$\{\omega_1\}$ は非可算上昇列をもつ線形順序のクラスの基底になる。

非可算下降列を含む線形順序

線形順序が非可算下降列を含むことと、$-\omega_1$ を埋め込めることは同値になる。よって、$\{-\omega_1\}$ は非可算下降列をもつ線形順序のクラスの基底になる。

非可算可分線形順序集合のクラスの場合は、ZFC では有限の基底は存在しない。

だが下記の結果が J. Baumgartner によって得られている。

Theorem (J. Baumgartner in 1973)

Proper Forcing Axiom(PFA) を仮定すると、任意の濃度 $\aleph_1$ の可分線形順序 X に対して、$\{X\}$ は非可算可分線形順序全体のクラスの基底となる。

非可算可分線形順序全体のクラスの基底

非可算可分線形順序集合のクラスの場合は、ZFC では有限の基底は存在しない。

だが下記の結果が J. Baumgartner によって得られている。

Theorem (J. Baumgartner in 1973)

Proper Forcing Axiom(PFA) を仮定すると、任意の濃度 $\aleph_1$ の可分線形順序 X に対して、$\{X\}$ は非可算可分線形順序全体のクラスの基底となる。

Proper Forcing Axiom

Proper Forcing Axiom(PFA) は、Forcing axioms と呼ばれるタイプの公理の一つで、とても頻繁に使われれる。

超コンパクト基数という巨大基数の無矛盾性から、PFA の無矛盾性が証明できることが知られている。

PFA は、数多くの無矛盾な「良い性質」を導くことで知られている。

Proper Forcing Axiom

Proper Forcing Axiom(PFA) は、Forcing axioms と呼ばれるタイプの公理の一つで、とても頻繁に使われれる。

超コンパクト基数という巨大基数の無矛盾性から、PFA の無矛盾性が証明できることが知られている。

PFA は、数多くの無矛盾な「良い性質」を導くことで知られている。

Proper Forcing Axiom

Proper Forcing Axiom(PFA) は、Forcing axioms と呼ばれるタイプの公理の一つで、とても頻繁に使われれる。

超コンパクト基数という巨大基数の無矛盾性から、PFA の無矛盾性が証明できることが知られている。

PFA は、数多くの無矛盾な「良い性質」を導くことで知られている。

Countryman 直線

残りは Aronszajn 直線である。ここでは、下記で定義される Countryman 直線が重要な役割を果たす。

Definition

C を線形順序とする。C^2 に下記の順序を入れて半順序集合とみなす。

$$\langle x_1, y_1 \rangle \leq_{C^2} \langle x_2, y_2 \rangle \iff x_1 \leq x_2 \text{ かつ } y_1 \leq y_2$$

C^2 の鎖 (chain) とは、C^2 の部分集合で、$\leq_{C^2}$ が線形順序となるようなものを指す。C^2 が可算個の鎖の和集合となるときに、C を Countryman 直線という。

Countryman 直線

残りは Aronszajn 直線である。ここでは、下記で定義される Countryman 直線が重要な役割を果たす。

Definition

C を線形順序とする。C^2 に下記の順序を入れて半順序集合とみなす。

$$\langle x_1, y_1\rangle \leq_{C^2} \langle x_2, y_2\rangle \iff x_1 \leq x_2 \text{ かつ } y_1 \leq y_2$$

C^2 の鎖 (chain) とは、C^2 の部分集合で、$\leq_{C^2}$ が線形順序となるようなものを指す。C^2 が可算個の鎖の和集合となるときに、C を Countryman 直線という。

Countryman 直線（その 2）

Countyman 直線は次のような性質を持つ。

Fact.

- Countryman 直線は Aronszajn 直線になる。
- ZFC で、Countryman 直線が存在することが証明できる (Shelah)。
- C が Countryman 直線であるとき、C を $-C$ へ埋め込むことはできない。

Countryman 直線（その 2）

Countyman 直線は次のような性質を持つ。

Fact.

- Countryman 直線は Aronszajn 直線になる。
- ZFC で、Countryman 直線が存在することが証明できる (Shelah)。
- C が Countryman 直線であるとき、C を $-C$ へ埋め込むことはできない。

Countryman 直線（その 2）

Countyman 直線は次のような性質を持つ。

Fact.

- Countryman 直線は Aronszajn 直線になる。
- ZFC で、Countryman 直線が存在することが証明できる (Shelah)。
- C が Countryman 直線であるとき、C を $-C$ へ埋め込むことはできない。

Countryman 直線（その 2）

Countyman 直線は次のような性質を持つ。

Fact.

- Countryman 直線は Aronszajn 直線になる。
- ZFC で、Countryman 直線が存在することが証明できる (Shelah)。
- C が Countryman 直線であるとき、C を $-C$ へ埋め込むことはできない。

Aronszajn 直線全体のクラスの基底

J. Moore が下記の定理を 2006 年に証明した。

Theorem

PFA を仮定すると、任意の *Countryman* 直線 C に対して、$\{C, -C\}$ は *Aronszajn* 直線全体のクラスの基底になる。

これにより、PFA を仮定した場合の、非可算線形順序集合全体のクラスの基底問題が解決した。

Aronszajn 直線全体のクラスの基底

J. Moore が下記の定理を 2006 年に証明した。

Theorem

PFA を仮定すると、任意の *Countryman* 直線 C に対して、$\{C, -C\}$ は *Aronszajn* 直線全体のクラスの基底になる。

これにより、PFA を仮定した場合の、非可算線形順序集合全体のクラスの基底問題が解決した。

Aronszajn 直線全体のクラスの基底

J. Moore が下記の定理を 2006 年に証明した。

Theorem

PFA を仮定すると、任意の *Countryman* 直線 C に対して、$\{C, -C\}$ は *Aronszajn* 直線全体のクラスの基底になる。

これにより、PFA を仮定した場合の、非可算線形順序集合全体のクラスの基底問題が解決した。

五元基底定理

まとめると、次の定理が証明されたことになる。

Theorem

PFA を仮定する。X を任意の濃度 $\aleph_1$ の可分線形順序集合、C を任意の *Countryman* 直線とする。このとき、$\{X, \omega_1, -\omega_1, C, -C\}$ は非可算線形順序集合全体のクラスの基底となる。

この定理は、最小な大きさの基底の存在を示しているだけではなく、簡潔な十分条件が与えられているという点で、美しいものだと言える (と私は思う)。

五元基底定理

まとめると、次の定理が証明されたことになる。

Theorem

PFA を仮定する。X を任意の濃度 $\aleph_1$ の可分線形順序集合、C を任意の *Countryman* 直線とする。このとき、$\{X, \omega_1, -\omega_1, C, -C\}$ は非可算線形順序集合全体のクラスの基底となる。

この定理は、最小な大きさの基底の存在を示しているだけではなく、簡潔な十分条件が与えられているという点で、美しいものだと言える(と私は思う)。

五元基底定理

まとめると、次の定理が証明されたことになる。

Theorem

PFA を仮定する。X を任意の濃度 $\aleph_1$ の可分線形順序集合、C を任意の *Countryman* 直線とする。このとき、$\{X, \omega_1, -\omega_1, C, -C\}$ は非可算線形順序集合全体のクラスの基底となる。

この定理は、最小な大きさの基底の存在を示しているだけではなく、簡潔な十分条件が与えられているという点で、美しいものだと言える (と私は思う)。

五元基底定理

まとめると、次の定理が証明されたことになる。

Theorem

PFA を仮定する。X を任意の濃度 $\aleph_1$ の可分線形順序集合、C を任意の *Countryman* 直線とする。このとき、$\{X, \omega_1, -\omega_1, C, -C\}$ は非可算線形順序集合全体のクラスの基底となる。

この定理は、最小な大きさの基底の存在を示しているだけではなく、簡潔な十分条件が与えられているという点で、美しいものだと言える (と私は思う)。

余談

J. Moore のもう一つの大きな仕事として知られているのが、ZFC から L 空間を構成したことである。
この結果により、次の系が得られる。

Corollary

非可算位相空間全体のクラスの基底の濃度は $\aleph_1$ より真に大きい。

すなわち、ZFC にどのような (無矛盾な) 公理を付け加えても、非可算位相空間全体のクラスに関しては、非可算線形順序のときのような有限で簡明な基底を作ることはできない。
このように、考えている構造のクラスによって、基底が持つ性質は大きく異なる。

余談

J. Moore のもう一つの大きな仕事として知られているのが、ZFC から L 空間を構成したことである。
この結果により、次の系が得られる。

Corollary

非可算位相空間全体のクラスの基底の濃度は $\aleph_1$ より真に大きい。

すなわち、ZFC にどのような (無矛盾な) 公理を付け加えても、非可算位相空間全体のクラスに関しては、非可算線形順序のときのような有限で簡明な基底を作ることはできない。
このように、考えている構造のクラスによって、基底が持つ性質は大きく異なる。

余談

J. Moore のもう一つの大きな仕事として知られているのが、ZFC から L 空間を構成したことである。
この結果により、次の系が得られる。

Corollary

非可算位相空間全体のクラスの基底の濃度は $\aleph_1$ より真に大きい。

すなわち、ZFC にどのような (無矛盾な) 公理を付け加えても、非可算位相空間全体のクラスに関しては、非可算線形順序のときのような有限で簡明な基底を作ることはできない。
このように、考えている構造のクラスによって、基底が持つ性質は大きく異なる。

余談

J. Moore のもう一つの大きな仕事として知られているのが、ZFC から L 空間を構成したことである。
この結果により、次の系が得られる。

Corollary

非可算位相空間全体のクラスの基底の濃度は $\aleph_1$ より真に大きい。

すなわち、ZFC にどのような (無矛盾な) 公理を付け加えても、非可算位相空間全体のクラスに関しては、非可算線形順序のときのような有限で簡明な基底を作ることはできない。
このように、考えている構造のクラスによって、基底が持つ性質は大きく異なる。

順序位相

線形順序集合には、次のような位相を入れるのが普通である。

Definition

X を線形順序集合とする。このとき、X の非空開区間全体の集合を開基とする位相を X の順序位相という。

この位相が入った空間のことを、線形順序位相空間 (linearly ordered topological space、略して LOTS) という。

順序位相

線形順序集合には、次のような位相を入れるのが普通である。

Definition

X を線形順序集合とする。このとき、X の非空開区間全体の集合を開基とする位相を X の順序位相という。

この位相が入った空間のことを、線形順序位相空間 (linearly ordered topological space、略して LOTS) という。

順序位相

線形順序集合には、次のような位相を入れるのが普通である。

Definition

X を線形順序集合とする。このとき、X の非空開区間全体の集合を開基とする位相を X の順序位相という。

この位相が入った空間のことを、線形順序位相空間 (linearly ordered topological space、略して LOTS) という。

この節では、連結線形順序位相空間を考える。連結性は、次の事実によって線形順序集合の性質としても記述できる。

Fact.

線形順序集合 K が、線形順序位相空間として連結になることと、自己稠密かつ任意の上に有界な K の部分集合が上限を持つことは同値。

連結線形順序位相空間

この節では、連結線形順序位相空間を考える。連結性は、次の事実によって線形順序集合の性質としても記述できる。

Fact.

線形順序集合 K が、線形順序位相空間として連結になることと、自己稠密かつ任意の上に有界な K の部分集合が上限を持つことは同値。

江田・上條の定理

次の定理が、江田先生とその学生であった上條さんによって証明されている。

Theorem

線形順序集合 K が、連結でありかつ非可算単調列の極限になるような点が稠密に存在するようなものとする。このとき、$f : K^2 \to K^2$ が同相写像ならば、f は *coordinate-wise* になる。すなわち、二つの同相写像 $g_1 : K \to K$ と $g_2 : K \to K$ が存在して、$f(x, y) = \langle g_1(x), g_2(y)\rangle$ または $f(x, y) = \langle g_1(y), g_2(x)\rangle$ となる。

つまり、そのような線形順序集合から作られた「平面」は、回転することも斜めに延ばすこともできず、単に上下または左右に伸縮・移動させることが可能なだけとなる。

江田・上條の定理

次の定理が、江田先生とその学生であった上條さんによって証明されている。

Theorem

線形順序集合 K が、連結でありかつ非可算単調列の極限になるような点が稠密に存在するようなものとする。このとき、$f : K^2 \to K^2$ が同相写像ならば、f は *coordinate-wise* になる。すなわち、二つの同相写像 $g_1 : K \to K$ と $g_2 : K \to K$ が存在して、$f(x, y) = \langle g_1(x), g_2(y) \rangle$ または $f(x, y) = \langle g_1(y), g_2(x) \rangle$ となる。

つまり、そのような線形順序集合から作られた「平面」は、回転することも斜めに延ばすこともできず、単に上下または左右に伸縮・移動させることが可能なだけとなる。

江田・上條の定理

次の定理が、江田先生とその学生であった上條さんによって証明されている。

Theorem

線形順序集合 K が、連結でありかつ非可算単調列の極限になるような点が稠密に存在するようなものとする。このとき、$f : K^2 \to K^2$ が同相写像ならば、f は *coordinate-wise* になる。すなわち、二つの同相写像 $g_1 : K \to K$ と $g_2 : K \to K$ が存在して、$f(x, y) = \langle g_1(x), g_2(y) \rangle$ または $f(x, y) = \langle g_1(y), g_2(x) \rangle$ となる。

つまり、そのような線形順序集合から作られた「平面」は、回転することも斜めに延ばすこともできず、単に上下または左右に伸縮・移動させることが可能なだけとなる。

江田先生の質問

この定理を踏まえて、次のような質問を江田先生から受けた。

Question.

この定理の結論は、線形順序集合 K が Aronszajn 直線の Dedekind 完備化でも成り立つか？

この問題から出発して、次のスライドにある定理を証明した。

江田先生の質問

この定理を踏まえて、次のような質問を江田先生から受けた。

Question.

この定理の結論は、線形順序集合 K が Aronszajn 直線の Dedekind 完備化でも成り立つか？

この問題から出発して、次のスライドにある定理を証明した。

江田先生の質問

この定理を踏まえて、次のような質問を江田先生から受けた。

Question.

この定理の結論は、線形順序集合 K が Aronszajn 直線の Dedekind 完備化でも成り立つか？

この問題から出発して、次のスライドにある定理を証明した。

Coordinate-wise Theorem

Definition

線形順序 K が至る所非可分 (nowhere separable) であるとは、可分な非空開集合が存在しないことをいう。

Theorem (Coordinate-wise Theorem)

K_1, K_2, L_1, L_2 を連結かつ至る所非可分な線形順序集合とする。このとき、任意の連続な単射 $f : K_1 \times K_2 \to L_1 \times L_2$ は *coordinate-wise* になる。

線形順序集合への条件が弱まっただけではなく、f は同相写像ではなく連続な単射でよく、またこれらの 4 つの線形順序集合は同じものであってもなくても良い。

Coordinate-wise Theorem

Definition

線形順序 K が至る所非可分 (nowhere separable) であるとは、可分な非空開集合が存在しないことをいう。

Theorem (Coordinate-wise Theorem)

K_1, K_2, L_1, L_2 を連結かつ至る所非可分な線形順序集合とする。このとき、任意の連続な単射 $f : K_1 \times K_2 \to L_1 \times L_2$ は *coordinate-wise* になる。

線形順序集合への条件が弱まっただけではなく、f は同相写像ではなく連続な単射でよく、またこれらの 4 つの線形順序集合は同じものであってもなくても良い。

Coordinate-wise Theorem

Definition

線形順序 K が至る所非可分 (nowhere separable) であるとは、可分な非空開集合が存在しないことをいう。

Theorem (Coordinate-wise Theorem)

K_1, K_2, L_1, L_2 を連結かつ至る所非可分な線形順序集合とする。このとき、任意の連続な単射 $f : K_1 \times K_2 \to L_1 \times L_2$ は *coordinate-wise* になる。

線形順序集合への条件が弱まっただけではなく、f は同相写像ではなく連続な単射でよく、またこれらの 4 つの線形順序集合は同じものであってもなくても良い。

証明のアイデア

この定理のステートメントは集合論的ではないが、その証明には集合論的な手法が強く用いられている。

ここで用いられた集合論的な手法を紹介しようと思う。

証明のアイデア

この定理のステートメントは集合論的ではないが、その証明には集合論的な手法が強く用いられている。

ここで用いられた集合論的な手法を紹介しようと思う。

ほとんど V みたいな集合

ZFC には基礎の公理 (Axiom of Foundation) というものが含まれている。この公理により、集合論の宇宙が階層的であることが保証される。このことから、対象と調べたい性質を絞れば、それらに関して宇宙と同じように振る舞う集合が存在することが証明できる。

例えば、この定理の条件をみたすような、K_1, K_2, L_1, L_2, f をとってくる。これらに関連した位相的または順序集合的性質について「正しい」ような集合 $H(\theta)$ が存在することが言える。

ほとんど V みたいな集合

ZFC には基礎の公理 (Axiom of Foundation) というものが含まれている。この公理により、集合論の宇宙が階層的であることが保証される。このことから、対象と調べたい性質を絞れば、それらに関して宇宙と同じように振る舞う集合が存在することが証明できる。

例えば、この定理の条件をみたすような、K_1, K_2, L_1, L_2, f をとってくる。これらに関連した位相的または順序集合的性質について「正しい」ような集合 $H(\theta)$ が存在することが言える。

ほとんど V みたいな集合

ZFC には基礎の公理 (Axiom of Foundation) というものが含まれている。この公理により、集合論の宇宙が階層的であることが保証される。このことから、対象と調べたい性質を絞れば、それらに関して宇宙と同じように振る舞う集合が存在することが証明できる。

例えば、この定理の条件をみたすような、K_1, K_2, L_1, L_2, f をとってくる。これらに関連した位相的または順序集合的性質について「正しい」ような集合 $H(\theta)$ が存在することが言える。

ほとんど V みたいな集合

ZFC には基礎の公理 (Axiom of Foundation) というものが含まれている。この公理により、集合論の宇宙が階層的であることが保証される。このことから、対象と調べたい性質を絞れば、それらに関して宇宙と同じように振る舞う集合が存在することが証明できる。

例えば、この定理の条件をみたすような、K_1, K_2, L_1, L_2, f をとってくる。これらに関連した位相的または順序集合的性質について「正しい」ような集合 $H(\theta)$ が存在することが言える。

初等部分モデル

この集合 $H(\theta)$ に対して、レーヴェンハイム・スコーレムの定理という定理を適用することで、$H(\theta)$ の可算部分集合 M で、任意の一階述語論理で書ける論理式に関しては $H(\theta)$ と真偽が変わらないようなものが取れる。すなわち、任意の一階述語論理の論理式 $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ と $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して、

$$H(\theta) \models \varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n] \iff M \models \varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

そのような M のことを、$H(\theta)$ の可算初等部分モデルと言う。

M の元をパラメータとして $H(\theta)$ 上で一階述語論理で定義可能な集合は、全て M の元になる。その意味で M は閉じている。

初等部分モデル

この集合 $H(\theta)$ に対して、レーヴェンハイム・スコーレムの定理という定理を適用することで、$H(\theta)$ の可算部分集合 M で、任意の一階述語論理で書ける論理式に関しては $H(\theta)$ と真偽が変わらないようなものが取れる。すなわち、任意の一階述語論理の論理式 $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ と $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して、

$$H(\theta) \vDash \varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n] \iff M \vDash \varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

そのような M のことを、$H(\theta)$ の可算初等部分モデルと言う。

M の元をパラメータとして $H(\theta)$ 上で一階述語論理で定義可能な集合は、全て M の元になる。その意味で M は閉じている。

初等部分モデル

この集合 $H(\theta)$ に対して、レーヴェンハイム・スコーレムの定理という定理を適用することで、$H(\theta)$ の可算部分集合 M で、任意の一階述語論理で書ける論理式に関しては $H(\theta)$ と真偽が変わらないようなものが取れる。すなわち、任意の一階述語論理の論理式 $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ と $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して、

$$H(\theta) \models \varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n] \iff M \models \varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

そのような M のことを、$H(\theta)$ の可算初等部分モデルと言う。

M の元をパラメータとして $H(\theta)$ 上で一階述語論理で定義可能な集合は、全て M の元になる。その意味で M は閉じている。

例

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考えて、それが「十分に見えて」いるような $H(\theta)$ をとる。そして、M を $H(\theta)$ の可算初等部分モデルで、$f \in M$ を満たすようなものとする。このとき、

- 任意の自然数は M に属している。
- f に最大値が存在するならば、それは M に属している。
- $f(x) = 0$ となるような $x \in \mathbb{R}$ が存在するならば、$f(x') = 0$ となるような $x' \in M \cap \mathbb{R}$ が存在する (x そのものとは限らない)。
- 一般に $y \in \mathrm{ran}(f) \cap M$ ならば、$f(x') = y$ となるような $x' \in M \cap \mathbb{R}$ が存在する。

例

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考えて、それが「十分に見えて」いるような $H(\theta)$ をとる。そして、M を $H(\theta)$ の可算初等部分モデルで、$f \in M$ を満たすようなものとする。このとき、

- 任意の自然数は M に属している。
- f に最大値が存在するならば、それは M に属している。
- $f(x) = 0$ となるような $x \in \mathbb{R}$ が存在するならば、$f(x') = 0$ となるような $x' \in M \cap \mathbb{R}$ が存在する (x そのものとは限らない)。
- 一般に $y \in \mathrm{ran}(f) \cap M$ ならば、$f(x') = y$ となるような $x' \in M \cap \mathbb{R}$ が存在する。

例

Example

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を考えて、それが「十分に見えて」いるような $H(\theta)$ をとる。そして、M を $H(\theta)$ の可算初等部分モデルで、$f\in M$ を満たすようなものとする。このとき、

- 任意の自然数は M に属している。
- f に最大値が存在するならば、それは M に属している。
- $f(x)=0$ となるような $x\in\mathbb{R}$ が存在するならば、$f(x')=0$ となるような $x'\in M\cap\mathbb{R}$ が存在する (x そのものとは限らない)。
- 一般に $y\in\operatorname{ran}(f)\cap M$ ならば、$f(x')=y$ となるような $x'\in M\cap\mathbb{R}$ が存在する。

例

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考えて、それが「十分に見えて」いるような $H(\theta)$ をとる。そして、M を $H(\theta)$ の可算初等部分モデルで、$f \in M$ を満たすようなものとする。このとき、

- 任意の自然数は M に属している。
- f に最大値が存在するならば、それは M に属している。
- $f(x) = 0$ となるような $x \in \mathbb{R}$ が存在するならば、$f(x') = 0$ となるような $x' \in M \cap \mathbb{R}$ が存在する (x そのものとは限らない)。
- 一般に $y \in \mathrm{ran}(f) \cap M$ ならば、$f(x') = y$ となるような $x' \in M \cap \mathbb{R}$ が存在する。

例

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考えて、それが「十分に見えて」いるような $H(\theta)$ をとる。そして、M を $H(\theta)$ の可算初等部分モデルで、$f \in M$ を満たすようなものとする。このとき、

- 任意の自然数は M に属している。
- f に最大値が存在するならば、それは M に属している。
- $f(x) = 0$ となるような $x \in \mathbb{R}$ が存在するならば、$f(x') = 0$ となるような $x' \in M \cap \mathbb{R}$ が存在する (x そのものとは限らない)。
- 一般に $y \in \mathrm{ran}(f) \cap M$ ならば、$f(x') = y$ となるような $x' \in M \cap \mathbb{R}$ が存在する。

η, ζ, I

次の定義が証明の要となる。M を任意の可算集合とする (通常は大きな $H(\theta)$ の可算初等部分モデルとなる)。面倒なので端点のこととかは気にしないことにする。K を M に属する連結線形順序集合、$p \in K \cap M$ とする。このとき

$$\eta(K, M, p) = \sup \{ q \in \mathrm{cl}(K \cap M) \mid q \leq p \}$$
$$\zeta(K, M, p) = \inf \{ q \in \mathrm{cl}(K \cap M) \mid q \geq p \}$$
$$I(K, M, p) = [\eta(K, M, p), \zeta(K, M, p)]$$

K や M が文脈から明らかな場合には省略する。η の定義で $\mathrm{cl}(K \cap M)$ を使っているのは、p が M には属していないが $K \cap M$ の上からの集積点になっているときに $\eta(K, M, p) = p$ になることを保証するためである。

η, ζ, I

次の定義が証明の要となる。M を任意の可算集合とする (通常は大きな $H(\theta)$ の可算初等部分モデルとなる)。面倒なので端点のこととかは気にしないことにする。K を M に属する連結線形順序集合、$p \in K \cap M$ とする。このとき

$$\eta(K, M, p) = \sup \{ q \in \mathrm{cl}(K \cap M) \mid q \leq p \}$$
$$\zeta(K, M, p) = \inf \{ q \in \mathrm{cl}(K \cap M) \mid q \geq p \}$$
$$I(K, M, p) = [\eta(K, M, p), \zeta(K, M, p)]$$

K や M が文脈から明らかな場合には省略する。η の定義で $\mathrm{cl}(K \cap M)$ を使っているのは、p が M には属していないが $K \cap M$ の上からの集積点になっているときに $\eta(K, M, p) = p$ になることを保証するためである。

η, ζ, I

次の定義が証明の要となる。M を任意の可算集合とする (通常は大きな $H(\theta)$ の可算初等部分モデルとなる)。面倒なので端点のこととかは気にしないことにする。K を M に属する連結線形順序集合、$p \in K \cap M$ とする。このとき

$$\eta(K, M, p) = \sup \{ q \in \mathrm{cl}(K \cap M) \mid q \leq p \}$$
$$\zeta(K, M, p) = \inf \{ q \in \mathrm{cl}(K \cap M) \mid q \geq p \}$$
$$I(K, M, p) = [\eta(K, M, p), \zeta(K, M, p)]$$

K や M が文脈から明らかな場合には省略する。η の定義で $\mathrm{cl}(K \cap M)$ を使っているのは、p が M には属していないが $K \cap M$ の上からの集積点になっているときに $\eta(K, M, p) = p$ になることを保証するためである。

$K \to L$

Theorem

K と L を連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間として、$g : K \to L$ を連続関数とする。M を十分に大きい $H(\theta)$ の可算初等部分モデルで、$K, L, g \in M$ となるようなものとする。
$p \in K \setminus \mathrm{cl}(K \cap M)$ とする。

このとき、$g \restriction I(p)$ は次のようなよい性質を持つ。

- $g \restriction I(p)$ の最大値や最小値は端点で取られる。
- $g(p) \in M$ ならば、$g \restriction I(p)$ は定数関数になる。
- $g(p) \notin \mathrm{cl}(L \cap M)$ ならば、$g^{\to}I(p) = I(g(p))$ となる。

$K \to L$

Theorem

K と L を連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間として、$g : K \to L$ を連続関数とする。M を十分に大きい $H(\theta)$ の可算初等部分モデルで、$K, L, g \in M$ となるようなものとする。$p \in K \setminus \mathrm{cl}(K \cap M)$ とする。

このとき、$g \restriction I(p)$ は次のようなよい性質を持つ。

- $g \restriction I(p)$ の最大値や最小値は端点で取られる。
- $g(p) \in M$ ならば、$g \restriction I(p)$ は定数関数になる。
- $g(p) \notin \mathrm{cl}(L \cap M)$ ならば、$g^{\to} I(p) = I(g(p))$ となる。

$K \to L$

Theorem

K と L を連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間として、$g : K \to L$ を連続関数とする。M を十分に大きい $H(\theta)$ の可算初等部分モデルで、$K, L, g \in M$ となるようなものとする。$p \in K \setminus \mathrm{cl}(K \cap M)$ とする。

このとき、$g \restriction I(p)$ は次のようなよい性質を持つ。

- $g \restriction I(p)$ の最大値や最小値は端点で取られる。
- $g(p) \in M$ ならば、$g \restriction I(p)$ は定数関数になる。
- $g(p) \notin \mathrm{cl}(L \cap M)$ ならば、$g^{\to} I(p) = I(g(p))$ となる。

$K \to L$

Theorem

K と L を連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間として、$g : K \to L$ を連続関数とする。M を十分に大きい $H(\theta)$ の可算初等部分モデルで、$K, L, g \in M$ となるようなものとする。$p \in K \setminus \mathrm{cl}(K \cap M)$ とする。

このとき、$g \restriction I(p)$ は次のようなよい性質を持つ。

- $g \restriction I(p)$ の最大値や最小値は端点で取られる。
- $g(p) \in M$ ならば、$g \restriction I(p)$ は定数関数になる。
- $g(p) \notin \mathrm{cl}(L \cap M)$ ならば、$g^{\to} I(p) = I(g(p))$ となる。

$K \to L$

Theorem

K と L を連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間として、$g : K \to L$ を連続関数とする。M を十分に大きい $H(\theta)$ の可算初等部分モデルで、$K, L, g \in M$ となるようなものとする。$p \in K \setminus \mathrm{cl}(K \cap M)$ とする。

このとき、$g \restriction I(p)$ は次のようなよい性質を持つ。

- $g \restriction I(p)$ の最大値や最小値は端点で取られる。
- $g(p) \in M$ ならば、$g \restriction I(p)$ は定数関数になる。
- $g(p) \notin \mathrm{cl}(L \cap M)$ ならば、$g^{\to} I(p) = I(g(p))$ となる。

Theorem

K と L を連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間として、$g : K \to L$ を連続関数とする。M を十分に大きい $H(\theta)$ の可算初等部分モデルで、$K, L, g \in M$ となるようなものとする。$p \in K \setminus \mathrm{cl}(K \cap M)$ とする。

このとき、$g \restriction I(p)$ は次のようなよい性質を持つ。

- $g \restriction I(p)$ の最大値や最小値は端点で取られる。
- $g(p) \in M$ ならば、$g \restriction I(p)$ は定数関数になる。
- $g(p) \notin \mathrm{cl}(L \cap M)$ ならば、$g^{\to} I(p) = I(g(p))$ となる。

証明

証明方法の例として、前スライドの命題を一つ証明する。

Theorem

$g \restriction I(p)$ の最大値は端点でとられる。

Proof.

$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ は、$K \cap M$ の元であるかその集積点になっている。よって、$\eta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 a と、$\zeta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 b をとることができる。

$g \restriction [a, b]$ は M の元になるので、その最大値をとるような点 q で M に属するようなものが存在する。$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ の定義により、$q \leq \eta(p)$ または $\zeta(p) \leq q$ が成り立つ。よって、$q \in [a, \eta(p)]$ または $q \in [\zeta(p), b]$ となる。

a は $\eta(p)$ に、b は $\zeta(p)$ にとても近いので、ほとんど I の端点だから、もう少しがんばれば証明できる。 □

証明

証明方法の例として、前スライドの命題を一つ証明する。

Theorem

$g \upharpoonright I(p)$ の最大値は端点でとられる。

Proof.

$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ は、$K \cap M$ の元であるかその集積点になっている。よって、$\eta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 a と、$\zeta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 b をとることができる。

$g \upharpoonright [a, b]$ は M の元になるので、その最大値をとるような点 q で M に属するようなものが存在する。$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ の定義により、$q \leq \eta(p)$ または $\zeta(p) \leq q$ が成り立つ。よって、$q \in [a, \eta(p)]$ または $q \in [\zeta(p), b]$ となる。

a は $\eta(p)$ に、b は $\zeta(p)$ にとても近いので、ほとんど I の端点だから、もう少しがんばれば証明できる。 □

証明

証明方法の例として、前スライドの命題を一つ証明する。

Theorem

$g \upharpoonright I(p)$ の最大値は端点でとられる。

Proof.

$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ は、$K \cap M$ の元であるかその集積点になっている。よって、$\eta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 a と、$\zeta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 b をとることができる。

$g \upharpoonright [a, b]$ は M の元になるので、その最大値をとるような点 q で M に属するようなものが存在する。$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ の定義により、$q \leq \eta(p)$ または $\zeta(p) \leq q$ が成り立つ。よって、$q \in [a, \eta(p)]$ または $q \in [\zeta(p), b]$ となる。

a は $\eta(p)$ に、b は $\zeta(p)$ にとても近いので、ほとんど I の端点だから、もう少しがんばれば証明できる。 □

証明

証明方法の例として、前スライドの命題を一つ証明する。

Theorem

$g \restriction I(p)$ の最大値は端点でとられる。

Proof.

$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ は、$K \cap M$ の元であるかその集積点になっている。よって、$\eta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 a と、$\zeta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 b をとることができる。

$g \restriction [a, b]$ は M の元になるので、その最大値をとるような点 q で M に属するようなものが存在する。$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ の定義により、$q \leq \eta(p)$ または $\zeta(p) \leq q$ が成り立つ。よって、$q \in [a, \eta(p)]$ または $q \in [\zeta(p), b]$ となる。

a は $\eta(p)$ に、b は $\zeta(p)$ にとても近いので、ほとんど I の端点だから、もう少しがんばれば証明できる。 □

証明

証明方法の例として、前スライドの命題を一つ証明する。

Theorem

$g \restriction I(p)$ の最大値は端点でとられる。

Proof.

$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ は、$K \cap M$ の元であるかその集積点になっている。よって、$\eta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 a と、$\zeta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 b をとることができる。

$g \restriction [a, b]$ は M の元になるので、その最大値をとるような点 q で M に属するようなものが存在する。$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ の定義により、$q \leq \eta(p)$ または $\zeta(p) \leq q$ が成り立つ。よって、$q \in [a, \eta(p)]$ または $q \in [\zeta(p), b]$ となる。

a は $\eta(p)$ に、b は $\zeta(p)$ にとても近いので、ほとんど I の端点だから、もう少しがんばれば証明できる。 □

証明

証明方法の例として、前スライドの命題を一つ証明する。

Theorem

$g \restriction I(p)$ の最大値は端点でとられる。

Proof.

$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ は、$K \cap M$ の元であるかその集積点になっている。よって、$\eta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 a と、$\zeta(p)$ にとても近い $K \cap M$ の元 b をとることができる。

$g \restriction [a, b]$ は M の元になるので、その最大値をとるような点 q で M に属するようなものが存在する。$\eta(p)$ や $\zeta(p)$ の定義により、$q \leq \eta(p)$ または $\zeta(p) \leq q$ が成り立つ。よって、$q \in [a, \eta(p)]$ または $q \in [\zeta(p), b]$ となる。

a は $\eta(p)$ に、b は $\zeta(p)$ にとても近いので、ほとんど I の端点だから、もう少しがんばれば証明できる。 $\square$

Box to box

定理の証明に戻る。K_1, K_2, L_1, L_2, f が仮定を満たすとして、それらに対して十分に大きい $H(\theta)$ の可算初等部分モデル M をとる。g_1, g_2 を f の成分関数とする。このときに、先の補題の証明と同じような議論を使うと次の補題が証明できる。

Lemma

p を $K_1 \setminus \mathrm{cl}(K_1 \cap M)$、$q$ を $K_2 \setminus \mathrm{cl}(K_2 \cap M)$ の元とする。このとき、次の式が成り立つ。

$$f^{\rightarrow}(I(p) \times I(q)) = I(g_1(p, q)) \times I(g_2(p, q))$$

つまり、矩形領域が矩形領域に写るということで、この局所的な現象をつなぎ合わせて大域的に広げてやれば、coordinate-wise 定理が証明できる。

Box to box

定理の証明に戻る。K_1, K_2, L_1, L_2, f が仮定を満たすとして、それらに対して十分に大きい $H(\theta)$ の可算初等部分モデル M をとる。g_1, g_2 を f の成分関数とする。このときに、先の補題の証明と同じような議論を使うと次の補題が証明できる。

Lemma

p を $K_1 \setminus \mathrm{cl}(K_1 \cap M)$、$q$ を $K_2 \setminus \mathrm{cl}(K_2 \cap M)$ の元とする。このとき、次の式が成り立つ。

$$f^{\rightarrow}(I(p) \times I(q)) = I(g_1(p, q)) \times I(g_2(p, q))$$

つまり、矩形領域が矩形領域に写るということで、この局所的な現象をつなぎ合わせて大域的に広げてやれば、coordinate-wise 定理が証明できる。

Box to box

定理の証明に戻る。K_1, K_2, L_1, L_2, f が仮定を満たすとして、それらに対して十分に大きい $H(\theta)$ の可算初等部分モデル M をとる。g_1, g_2 を f の成分関数とする。このときに、先の補題の証明と同じような議論を使うと次の補題が証明できる。

Lemma

p を $K_1 \setminus \mathrm{cl}(K_1 \cap M)$、$q$ を $K_2 \setminus \mathrm{cl}(K_2 \cap M)$ の元とする。このとき、次の式が成り立つ。

$$f^{\rightarrow}(I(p) \times I(q)) = I(g_1(p,q)) \times I(g_2(p,q))$$

つまり、矩形領域が矩形領域に写るということで、この局所的な現象をつなぎ合わせて大域的に広げてやれば、coordinate-wise 定理が証明できる。

高次元版

Coordinate-wise 定理は任意有限個の積に拡張できる。すなわち次の定理が成り立つ。

Theorem

n を任意の正自然数として、$K_1, K_2, \ldots, K_n$, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ を連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間とする。
$f : \prod_{i=1}^n K_i \to \prod_{i=1}^n L_i$ を連続な単射とする。このときに、f は *coordinate-wise* となる。

証明のアイデアは二次元の場合と変わらないけど書くのがすごく面倒なので別論文になった。

高次元版

Coordinate-wise 定理は任意有限個の積に拡張できる。すなわち次の定理が成り立つ。

Theorem

n を任意の正自然数として、$K_1, K_2, \ldots, K_n$, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ を連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間とする。
$f : \prod_{i=1}^n K_i \to \prod_{i=1}^n L_i$ を連続な単射とする。このときに、f は *coordinate-wise* となる。

証明のアイデアは二次元の場合と変わらないけど書くのがすごく面倒なので別論文になった。

高次元版

Coordinate-wise 定理は任意有限個の積に拡張できる。すなわち次の定理が成り立つ。

Theorem

n を任意の正自然数として、$K_1, K_2, \ldots, K_n$, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ を連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間とする。
$f : \prod_{i=1}^n K_i \to \prod_{i=1}^n L_i$ を連続な単射とする。このときに、f は *coordinate-wise* となる。

証明のアイデアは二次元の場合と変わらないけど書くのがすごく面倒なので別論文になった。

高次元版

Coordinate-wise 定理は任意有限個の積に拡張できる。すなわち次の定理が成り立つ。

Theorem

n を任意の正自然数として、$K_1, K_2, \ldots, K_n$, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ を連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間とする。
$f : \prod_{i=1}^n K_i \to \prod_{i=1}^n L_i$ を連続な単射とする。このときに、f は *coordinate-wise* となる。

証明のアイデアは二次元の場合と変わらないけど書くのがすごく面倒なので別論文になった。

新規性なかったその 1

この証明がとても気に入ったので、なにか他に証明できることはないかと考えていて次のような定理を証明した。

Theorem

K をコンパクトで連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間とする。このとき、K から K^2 への連続な全射は存在しない。

これを新規な結果だと思ってそう講演すらしてしまったのだけれども、Todorcevic 先生にメールで聞いたら数時間後にそれは既知であり、それよりはるかに強い Treybig の定理というものが知られていると返信が返ってきた。

新規性なかったその1

この証明がとても気に入ったので、なにか他に証明できることはないかと考えていて次のような定理を証明した。

Theorem

K をコンパクトで連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間とする。このとき、K から K^2 への連続な全射は存在しない。

これを新規な結果だと思ってそう講演すらしてしまったのだけれども、Todorcevic 先生にメールで聞いたら数時間後にそれは既知であり、それよりはるかに強い Treybig の定理というものが知られていると返信が返ってきた。

新規性なかったその1

この証明がとても気に入ったので、なにか他に証明できることはないかと考えていて次のような定理を証明した。

Theorem

K をコンパクトで連結かつ至る所非可分な線形順序位相空間とする。このとき、K から K^2 への連続な全射は存在しない。

これを新規な結果だと思ってそう講演すらしてしまったのだけれども、Todorcevic 先生にメールで聞いたら数時間後にそれは既知であり、それよりはるかに強い Treybig の定理というものが知られていると返信が返ってきた。

Treybig の定理について説明するために、ペアノの定理から始める。

Theorem (G. Peano)

$[0,1]$ から $[0,1] \times [0,1]$ への連続な全射が存在する。

そのような関数のことを、空間充填曲線と呼ぶ。

空間充填曲線

Treybig の定理について説明するために、ペアノの定理から始める。

Theorem (G. Peano)

$[0,1]$ から $[0,1] \times [0,1]$ への連続な全射が存在する。

そのような関数のことを、空間充填曲線と呼ぶ。

空間充填曲線

Treybig の定理について説明するために、ペアノの定理から始める。

Theorem (G. Peano)

$[0,1]$ から $[0,1]\times[0,1]$ への連続な全射が存在する。

そのような関数のことを、空間充填曲線と呼ぶ。

Kurepa の予想

この定理を踏まえて、1952 年に Đ. Kurepa は次のような予想をした。

予想

K が二つ以上の元を持つコンパクトで連結な線形順序位相空間で、K から K^2 への連続な全射が存在するならば、それは $[0, 1]$ と同型になる。

そして、K が Suslin の性質を持つ、すなわち任意の互いに素な開集合の族は可算になるならば、この予想が成り立つことを証明した。この結果と、1960 年の S. Mardešić による結果を合わせると、Kurepa の予想は一般に成り立つことがいえる。

Kurepa の予想

この定理を踏まえて、1952 年に Đ. Kurepa は次のような予想をした。

予想

K が二つ以上の元を持つコンパクトで連結な線形順序位相空間で、K から K^2 への連続な全射が存在するならば、それは $[0, 1]$ と同型になる。

そして、K が Suslin の性質を持つ、すなわち任意の互いに素な開集合の族は可算になるならば、この予想が成り立つことを証明した。この結果と、1960 年の S. Mardešić による結果を合わせると、Kurepa の予想は一般に成り立つことがいえる。

Kurepa の予想

この定理を踏まえて、1952 年に Đ. Kurepa は次のような予想をした。

予想

K が二つ以上の元を持つコンパクトで連結な線形順序位相空間で、K から K^2 への連続な全射が存在するならば、それは $[0,1]$ と同型になる。

そして、K が Suslin の性質を持つ、すなわち任意の互いに素な開集合の族は可算になるならば、この予想が成り立つことを証明した。この結果と、1960 年の S. Mardešić による結果を合わせると、Kurepa の予想は一般に成り立つことがいえる。

Kurepa の予想

この定理を踏まえて、1952 年に Đ. Kurepa は次のような予想をした。

予想

K が二つ以上の元を持つコンパクトで連結な線形順序位相空間で、K から K^2 への連続な全射が存在するならば、それは $[0,1]$ と同型になる。

そして、K が Suslin の性質を持つ、すなわち任意の互いに素な開集合の族は可算になるならば、この予想が成り立つことを証明した。この結果と、1960 年の S. Mardešić による結果を合わせると、Kurepa の予想は一般に成り立つことがいえる。

Treybig の定理

この定理は少しずつ拡張されていったが、それを大幅に改良したのが 1964 年に証明された次に挙げる Treybig の定理である。

Theorem

K をコンパクト線形順序位相空間 K、X と Y を無限なハウスドルフ空間とする。もし、K から $X \times Y$ への連続な全射が存在するならば、X と Y はともに距離化可能になる。

X と Y がこの定理の仮定をみたすときには、X と Y は距離化可能なコンパクト空間になるので可分になる。よって、Kurepa の予想は、この定理の系として得られる。

Treybig の定理

この定理は少しずつ拡張されていったが、それを大幅に改良したのが 1964 年に証明された次に挙げる Treybig の定理である。

Theorem

K をコンパクト線形順序位相空間 K、X と Y を無限なハウスドルフ空間とする。もし、K から $X \times Y$ への連続な全射が存在するならば、X と Y はともに距離化可能になる。

X と Y がこの定理の仮定をみたすときには、X と Y は距離化可能なコンパクト空間になるので可分になる。よって、Kurepa の予想は、この定理の系として得られる。

Treybig の定理

この定理は少しずつ拡張されていったが、それを大幅に改良したのが 1964 年に証明された次に挙げる Treybig の定理である。

Theorem

K をコンパクト線形順序位相空間 K、X と Y を無限なハウスドルフ空間とする。もし、K から $X \times Y$ への連続な全射が存在するならば、X と Y はともに距離化可能になる。

X と Y がこの定理の仮定をみたすときには、X と Y は距離化可能なコンパクト空間になるので可分になる。よって、Kurepa の予想は、この定理の系として得られる。

やっぱり新規性なかった

可算初等部分モデルを使った議論を使って、Treybig の定理の「コンパクト」を「可算コンパクト」に変えたものが証明できると薄葉さんに指摘してもらった。これで新規性が確保できたと思ったら、G. I. Čertanov という人がそれも証明していて、これもやっぱり新規性がなかった。ロシア語の引用 0、被引用 1 の論文で…。

Theorem

K を可算コンパクト GO 空間、X と Y が無限なハウスドルフ空間だとする。もし、K から $X \times Y$ への連続な全射が存在するならば、X と Y はコンパクト距離化可能空間になる。

GO 空間というのは、'generalized ordered 空間' の略で、線形順序位相空間の部分空間と同相になる空間のことをいう。コンパクトな GO 空間は線形順序位相空間となるので、Treybig の定理を GO 空間に拡張しても同値の命題となる。

やっぱり新規性なかった

可算初等部分モデルを使った議論を使って、Treybig の定理の「コンパクト」を「可算コンパクト」に変えたものが証明できると薄葉さんに指摘してもらった。これで新規性が確保できたと思ったら、G. I. Čertanov という人がそれも証明していて、これもやっぱり新規性がなかった。ロシア語の引用 0、被引用 1 の論文で…。

Theorem

K を可算コンパクト GO 空間、X と Y が無限なハウスドルフ空間だとする。もし、K から $X \times Y$ への連続な全射が存在するならば、X と Y はコンパクト距離化可能空間になる。

GO 空間というのは、'generalized ordered 空間' の略で、線形順序位相空間の部分空間と同相になる空間のことをいう。コンパクトな GO 空間は線形順序位相空間となるので、Treybig の定理を GO 空間に拡張しても同値の命題となる。

やっぱり新規性なかった

可算初等部分モデルを使った議論を使って、Treybig の定理の「コンパクト」を「可算コンパクト」に変えたものが証明できると薄葉さんに指摘してもらった。これで新規性が確保できたと思ったら、G. I. Čertanov という人がそれも証明していて、これもやっぱり新規性がなかった。ロシア語の引用 0、被引用 1 の論文で…。

Theorem

K を可算コンパクト GO 空間、X と Y が無限なハウスドルフ空間だとする。もし、K から $X \times Y$ への連続な全射が存在するならば、X と Y はコンパクト距離化可能空間になる。

GO 空間というのは、'generalized ordered 空間' の略で、線形順序位相空間の部分空間と同相になる空間のことをいう。コンパクトな GO 空間は線形順序位相空間となるので、Treybig の定理を GO 空間に拡張しても同値の命題となる。

やっぱり新規性なかった

可算初等部分モデルを使った議論を使って、Treybig の定理の「コンパクト」を「可算コンパクト」に変えたものが証明できると薄葉さんに指摘してもらった。これで新規性が確保できたと思ったら、G. I. Čertanov という人がそれも証明していて、これもやっぱり新規性がなかった。ロシア語の引用 0、被引用 1 の論文で…。

Theorem

K を可算コンパクト GO 空間、X と Y が無限なハウスドルフ空間だとする。もし、K から $X \times Y$ への連続な全射が存在するならば、X と Y はコンパクト距離化可能空間になる。

GO 空間というのは、'generalized ordered 空間' の略で、線形順序位相空間の部分空間と同相になる空間のことをいう。コンパクトな GO 空間は線形順序位相空間となるので、Treybig の定理を GO 空間に拡張しても同値の命題となる。

やっぱり新規性なかった

可算初等部分モデルを使った議論を使って、Treybig の定理の「コンパクト」を「可算コンパクト」に変えたものが証明できると薄葉さんに指摘してもらった。これで新規性が確保できたと思ったら、G. I. Čertanov という人がそれも証明していて、これもやっぱり新規性がなかった。ロシア語の引用 0、被引用 1 の論文で…。

Theorem

K を可算コンパクト GO 空間、X と Y が無限なハウスドルフ空間だとする。もし、K から $X \times Y$ への連続な全射が存在するならば、X と Y はコンパクト距離化可能空間になる。

GO 空間というのは、'generalized ordered 空間' の略で、線形順序位相空間の部分空間と同相になる空間のことをいう。コンパクトな GO 空間は線形順序位相空間となるので、Treybig の定理を GO 空間に拡張しても同値の命題となる。

やっぱり新規性なかった

可算初等部分モデルを使った議論を使って、Treybig の定理の「コンパクト」を「可算コンパクト」に変えたものが証明できると薄葉さんに指摘してもらった。これで新規性が確保できたと思ったら、G. I. Čertanov という人がそれも証明していて、これもやっぱり新規性がなかった。ロシア語の引用 0、被引用 1 の論文で…。

Theorem

K を可算コンパクト GO 空間、X と Y が無限なハウスドルフ空間だとする。もし、K から $X \times Y$ への連続な全射が存在するならば、X と Y はコンパクト距離化可能空間になる。

GO 空間というのは、'generalized ordered 空間' の略で、線形順序位相空間の部分空間と同相になる空間のことをいう。コンパクトな GO 空間は線形順序位相空間となるので、Treybig の定理を GO 空間に拡張しても同値の命題となる。

Mardešić 予想

それでも諦めずになにか新しいことが証明できないかと調べていて、1970 年に S. Mardešić が次の予想をしていることを知った。この予想は、Mardešić 予想と呼ばれる。

予想

d と s を正整数とする。$K_1, K_2, \ldots, K_d$ をコンパクト線形順序位相空間、$X_1, X_2, \ldots, X_{d+s}$ を無限コンパクトハウスドルフ空間とする。もし、$\prod_{i=1}^{d} K_i$ から $\prod_{j=1}^{d+s} X_j$ への連続な全射が存在するならば、$X_1, X_2, \ldots, X_{d+s}$ のうち $s+1$ 個は距離化可能になる。

$d = s = 1$ のときは、この予想は Treybig の定理そのものになる。

Mardešić 予想

それでも諦めずになにか新しいことが証明できないかと調べていて、1970 年に S. Mardešić が次の予想をしていることを知った。この予想は、Mardešić 予想と呼ばれる。

予想

d と s を正整数とする。$K_1, K_2, \ldots, K_d$ をコンパクト線形順序位相空間、$X_1, X_2, \ldots, X_{d+s}$ を無限コンパクトハウスドルフ空間とする。もし、$\prod_{i=1}^{d} K_i$ から $\prod_{j=1}^{d+s} X_j$ への連続な全射が存在するならば、$X_1, X_2, \ldots, X_{d+s}$ のうち $s+1$ 個は距離化可能になる。

$d = s = 1$ のときは、この予想は Treybig の定理そのものになる。

Mardešić 予想

それでも諦めずになにか新しいことが証明できないかと調べていて、1970 年に S. Mardešić が次の予想をしていることを知った。この予想は、Mardešić 予想と呼ばれる。

予想

d と s を正整数とする。$K_1, K_2, \ldots, K_d$ をコンパクト線形順序位相空間、$X_1, X_2, \ldots, X_{d+s}$ を無限コンパクトハウスドルフ空間とする。もし、$\prod_{i=1}^{d} K_i$ から $\prod_{j=1}^{d+s} X_j$ への連続な全射が存在するならば、$X_1, X_2, \ldots, X_{d+s}$ のうち $s+1$ 個は距離化可能になる。

$d = s = 1$ のときは、この予想は Treybig の定理そのものになる。

解けてた

「これ、証明できるじゃん！」と細部を詰めていたところ、2018 年に G. Martínez-Cervantes と G. Plebanek によってこの予想が肯定的に解かれていることを発見する。

彼らの証明は、コンパクトハウスドルフ空間に ‘free dimension’ と呼ばれる新しい次元を定義して、次のような性質を証明することでなされている。

- $K_1, K_2, \ldots, K_d$ をコンパクト線形順序位相空間とするとき、$\prod_{i=1}^{d} K_i$ の free-dimension は d 以下となる。
- $X_1, X_2, \ldots, X_d$ を距離化可能でないコンパクトハウスドルフ空間、X_{d+1} を無限コンパクトハウスドルフ空間とするときに、$\prod_{j=1}^{d+1} X_j$ の free-dimension は $d+1$ 以上になる。
- 連続像の free-dimension は定義域の free-dimension よりも大きくならない。
- $s = 1$ の場合が解ければ、Mardešić の予想が一般に解ける。

解けてた

「これ、証明できるじゃん！」と細部を詰めていたところ、2018 年に G. Martínez-Cervantes と G. Plebanek によってこの予想が肯定的に解かれていることを発見する。
彼らの証明は、コンパクトハウスドルフ空間に 'free dimension' と呼ばれる新しい次元を定義して、次のような性質を証明することでなされている。

- $K_1, K_2, \ldots, K_d$ をコンパクト線形順序位相空間とするとき、$\prod_{i=1}^{d} K_i$ の free-dimension は d 以下となる。
- $X_1, X_2, \ldots, X_d$ を距離化可能でないコンパクトハウスドルフ空間、X_{d+1} を無限コンパクトハウスドルフ空間とするときに、$\prod_{j=1}^{d+1} X_j$ の free-dimension は $d+1$ 以上になる。
- 連続像の free-dimension は定義域の free-dimension よりも大きくならない。
- $s = 1$ の場合が解ければ、Mardešić の予想が一般に解ける。

解けてた

「これ、証明できるじゃん！」と細部を詰めていたところ、2018 年に G. Martínez-Cervantes と G. Plebanek によってこの予想が肯定的に解かれていることを発見する。
彼らの証明は、コンパクトハウスドルフ空間に ‘free dimension’ と呼ばれる新しい次元を定義して、次のような性質を証明することでなされている。

- $K_1, K_2, \ldots, K_d$ をコンパクト線形順序位相空間とするとき、$\prod_{i=1}^{d} K_i$ の free-dimension は d 以下となる。
- $X_1, X_2, \ldots, X_d$ を距離化可能でないコンパクトハウスドルフ空間、X_{d+1} を無限コンパクトハウスドルフ空間とするときに、$\prod_{j=1}^{d+1} X_j$ の free-dimension は $d+1$ 以上になる。
- 連続像の free-dimension は定義域の free-dimension よりも大きくならない。
- $s=1$ の場合が解ければ、Mardešić の予想が一般に解ける。

解けてた

「これ、証明できるじゃん！」と細部を詰めていたところ、2018 年に G. Martínez-Cervantes と G. Plebanek によってこの予想が肯定的に解かれていることを発見する。
彼らの証明は、コンパクトハウスドルフ空間に ‘free dimension’ と呼ばれる新しい次元を定義して、次のような性質を証明することでなされている。

- $K_1, K_2, \ldots, K_d$ をコンパクト線形順序位相空間とするとき、$\prod_{i=1}^{d} K_i$ の free-dimension は d 以下となる。
- $X_1, X_2, \ldots, X_d$ を距離化可能でないコンパクトハウスドルフ空間、X_{d+1} を無限コンパクトハウスドルフ空間とするときに、$\prod_{j=1}^{d+1} X_j$ の free-dimension は $d+1$ 以上になる。
- 連続像の free-dimension は定義域の free-dimension よりも大きくならない。
- $s = 1$ の場合が解ければ、Mardešić の予想が一般に解ける。

解けてた

「これ、証明できるじゃん！」と細部を詰めていたところ、2018 年に G. Martínez-Cervantes と G. Plebanek によってこの予想が肯定的に解かれていることを発見する。
彼らの証明は、コンパクトハウスドルフ空間に ‘free dimension’ と呼ばれる新しい次元を定義して、次のような性質を証明することでなされている。

- $K_1, K_2, \ldots, K_d$ をコンパクト線形順序位相空間とすると き、$\prod_{i=1}^{d} K_i$ の free-dimension は d 以下となる。
- $X_1, X_2, \ldots, X_d$ を距離化可能でないコンパクトハウスドルフ空間、X_{d+1} を無限コンパクトハウスドルフ空間とするときに、$\prod_{j=1}^{d+1} X_j$ の free-dimension は $d+1$ 以上になる。
- 連続像の free-dimension は定義域の free-dimension よりも大きくならない。
- $s=1$ の場合が解ければ、Mardešić の予想が一般に解ける。

解けてた

「これ、証明できるじゃん！」と細部を詰めていたところ、2018 年に G. Martínez-Cervantes と G. Plebanek によってこの予想が肯定的に解かれていることを発見する。
彼らの証明は、コンパクトハウスドルフ空間に ‘free dimension’ と呼ばれる新しい次元を定義して、次のような性質を証明することでなされている。

- $K_1, K_2, \ldots, K_d$ をコンパクト線形順序位相空間とするとき、$\prod_{i=1}^{d} K_i$ の free-dimension は d 以下となる。
- $X_1, X_2, \ldots, X_d$ を距離化可能でないコンパクトハウスドルフ空間、X_{d+1} を無限コンパクトハウスドルフ空間とするときに、$\prod_{j=1}^{d+1} X_j$ の free-dimension は $d+1$ 以上になる。
- 連続像の free-dimension は定義域の free-dimension よりも大きくならない。
- $s = 1$ の場合が解ければ、Mardešić の予想が一般に解ける。

可算コンパクト版

それでもそれでも諦めずに考えてみると、Mardešić の予想の可算コンパクト版が多分証明できて、これはさすがに新規だろうと思う。

そうであってほしい。

可算コンパクト版

それでもそれでも諦めずに考えてみると、Mardešić の予想の可算コンパクト版が多分証明できて、これはさすがに新規だろうと思う。

そうであってほしい。

位相群についての Coordinate-wise 定理の系

Coordinate-wise 定理を使うと次の命題が証明できる。

命題

K を連結で至る所非可分な線形順序位相空間とするとき、連続な群演算は存在しない。

Proof.

$\cdot$ を K 上で定義された連続な群演算とする。このとき、$f : K^2 \to K^2$ を下記の通り定義する。

$$f(x, y) = \langle x, x \cdot y \rangle$$

この f が連続な単射であり、かつ coordinate-wise でないことは簡単に証明できるが、これは Coordinate-wise 定理に反する。 □

位相群についての Coordinate-wise 定理の系

Coordinate-wise 定理を使うと次の命題が証明できる。

命題

K を連結で至る所非可分な線形順序位相空間とするとき、連続な群演算は存在しない。

Proof.

$\cdot$ を K 上で定義された連続な群演算とする。このとき、$f : K^2 \to K^2$ を下記の通り定義する。

$$f(x, y) = \langle x, x \cdot y \rangle$$

この f が連続な単射であり、かつ coordinate-wise でないことは簡単に証明できるが、これは Coordinate-wise 定理に反する。 □

位相群についての Coordinate-wise 定理の系

Coordinate-wise 定理を使うと次の命題が証明できる。

命題

K を連結で至る所非可分な線形順序位相空間とするとき、連続な群演算は存在しない。

Proof.

$\cdot$ を K 上で定義された連続な群演算とする。このとき、$f : K^2 \to K^2$ を下記の通り定義する。

$$f(x, y) = \langle x, x \cdot y \rangle$$

この f が連続な単射であり、かつ coordinate-wise でないことは簡単に証明できるが、これは Coordinate-wise 定理に反する。 □

新規性なかったその 2

こんなきれいな結果が新規なわけがないといろいろな人に聞いたのに誰も知らなかったのだけれども、ある日突然先行研究にぶち当たった。

Theorem (E. Cartan 1930)

任意の連結な線形順序位相空間上で定義された位相群は、$\mathbb{R}$ と同型になる。

何もそこまでさかのぼらなくても…
より一般的な定理も証明されている。

新規性なかったその 2

こんなきれいな結果が新規なわけがないといろいろな人に聞いたのに誰も知らなかったのだけれども、ある日突然先行研究にぶち当たった。

Theorem (E. Cartan 1930)

任意の連結な線形順序位相空間上で定義された位相群は、$\mathbb{R}$ と同型になる。

何もそこまでさかのぼらなくても…

より一般的な定理も証明されている。

新規性なかったその 2

こんなきれいな結果が新規なわけがないといろいろな人に聞いたのに誰も知らなかったのだけれども、ある日突然先行研究にぶち当たった。

Theorem (E. Cartan 1930)

任意の連結な線形順序位相空間上で定義された位相群は、$\mathbb{R}$ と同型になる。

何もそこまでさかのぼらなくても…

より一般的な定理も証明されている。

新規性なかったその2

こんなきれいな結果が新規なわけがないといろいろな人に聞いたのに誰も知らなかったのだけれども、ある日突然先行研究にぶち当たった。

Theorem (E. Cartan 1930)

任意の連結な線形順序位相空間上で定義された位相群は、$\mathbb{R}$ と同型になる。

何もそこまでさかのぼらなくても…
より一般的な定理も証明されている。

Aczél の定理

Definition

S を半群とする。任意の $a, b, c \in S$ に対して、$a \cdot b = a \cdot c$ または $b \cdot a = c \cdot a$ ならば $b = c$ となるとき、S は cancellative であるという。

当然ながら群は cancellative な半群である。

Theorem (J. Aczél 1966)

任意の線形順序位相空間上で定義された *cancellative* な位相半群は、$\mathbb{R}$ の部分構造と同型になる。

1989 年に R. Craigen と Z. Páles がこの定理のより簡潔な証明を与えている。

Aczél の定理

Definition

S を半群とする。任意の $a, b, c \in S$ に対して、$a \cdot b = a \cdot c$ または $b \cdot a = c \cdot a$ ならば $b = c$ となるとき、S は cancellative であるという。

当然ながら群は cancellative な半群である。

Theorem (J. Aczél 1966)

任意の線形順序位相空間上で定義された *cancellative* な位相半群は、$\mathbb{R}$ の部分構造と同型になる。

1989 年に R. Craigen と Z. Páles がこの定理のより簡潔な証明を与えている。

Aczél の定理

Definition

S を半群とする。任意の $a, b, c \in S$ に対して、$a \cdot b = a \cdot c$ または $b \cdot a = c \cdot a$ ならば $b = c$ となるとき、S は cancellative であるという。

当然ながら群は cancellative な半群である。

Theorem (J. Aczél 1966)

任意の線形順序位相空間上で定義された *cancellative* な位相半群は、$\mathbb{R}$ の部分構造と同型になる。

1989 年に R. Craigen と Z. Páles がこの定理のより簡潔な証明を与えている。

Aczél の定理

Definition

S を半群とする。任意の $a, b, c \in S$ に対して、$a \cdot b = a \cdot c$ または $b \cdot a = c \cdot a$ ならば $b = c$ となるとき、S は cancellative であるという。

当然ながら群は cancellative な半群である。

Theorem (J. Aczél 1966)

任意の線形順序位相空間上で定義された *cancellative* な位相半群は、$\mathbb{R}$ の部分構造と同型になる。

1989 年に R. Craigen と Z. Páles がこの定理のより簡潔な証明を与えている。

線形順序半群

というようなことを調べているうちに、線形順序集合上で定義されている半群構造は位相半群だけでないことを知った。

Definition

$(S, \leq)$ が線形順序集合であり、$(S, \cdot)$ が半群であり、かつ任意の $a, b, c \in S$ に対して、$b \leq c$ ならば $a \cdot b \leq a \cdot c$ かつ $b \cdot a \leq c \cdot a$ となるときに、$(S, \cdot, \leq)$ を線形順序半群であるという。

要するに半群演算が順序を保つようなものということ。線形順序位相半群と似ているが、どちらかをどちらかが導くとかはない。

線形順序半群

というようなことを調べているうちに、線形順序集合上で定義されている半群構造は位相半群だけでないことを知った。

Definition

$(S, \leq)$ が線形順序集合であり、$(S, \cdot)$ が半群であり、かつ任意の $a, b, c \in S$ に対して、$b \leq c$ ならば $a \cdot b \leq a \cdot c$ かつ $b \cdot a \leq c \cdot a$ となるときに、$(S, \cdot, \leq)$ を線形順序半群であるという。

要するに半群演算が順序を保つようなものということ。線形順序位相半群と似ているが、どちらかをどちらかが導くとかはない。

線形順序半群

というようなことを調べているうちに、線形順序集合上で定義されている半群構造は位相半群だけでないことを知った。

Definition

$(S, \leq)$ が線形順序集合であり、$(S, \cdot)$ が半群であり、かつ任意の $a, b, c \in S$ に対して、$b \leq c$ ならば $a \cdot b \leq a \cdot c$ かつ $b \cdot a \leq c \cdot a$ となるときに、$(S, \cdot, \leq)$ を線形順序半群であるという。

要するに半群演算が順序を保つようなものということ。線形順序位相半群と似ているが、どちらかをどちらかが導くとかはない。

線形順序半群

ということを調べているうちに、線形順序集合上で定義されている半群構造は位相半群だけでないことを知った。

Definition

$(S, \leq)$ が線形順序集合であり、$(S, \cdot)$ が半群であり、かつ任意の $a, b, c \in S$ に対して、$b \leq c$ ならば $a \cdot b \leq a \cdot c$ かつ $b \cdot a \leq c \cdot a$ となるときに、$(S, \cdot, \leq)$ を線形順序半群であるという。

要するに半群演算が順序を保つようなものということ。線形順序位相半群と似ているが、どちらかをどちらかが導くとかはない。

Positively ordered semigroup

そのなかでも多く研究されているのが次のクラスである。

Definition

$(S, \cdot, \leq)$ を線形順序半群とする。任意の $a, b \in S$ に対して、$a \cdot b \geq a$ かつ $a \cdot b \geq b$ ならば、S を positively ordered semigroup という。もし、任意の $a, b \in S$ に対して、$a \cdot b > a$ かつ $a \cdot b > b$ ならば、S を strictly positively ordered semigroup という。

例えば、非負実数に通常の順序と加法を入れたもの $([0, \infty), \leq, +)$ は positively ordered semigroup である。
Positively ordered semigroup は大きさをはかる尺度の公理化として (そこそこは) 自然である。

Positively ordered semigroup

そのなかでも多く研究されているのが次のクラスである。

Definition

$(S, \cdot, \leq)$ を線形順序半群とする。任意の $a, b \in S$ に対して、$a \cdot b \geq a$ かつ $a \cdot b \geq b$ ならば、S を positively ordered semigroup という。もし、任意の $a, b \in S$ に対して、$a \cdot b > a$ かつ $a \cdot b > b$ ならば、S を strictly positively ordered semigroup という。

例えば、非負実数に通常の順序と加法を入れたもの $([0, \infty), \leq, +)$ は positively ordered semigroup である。Positively ordered semigroup は大きさをはかる尺度の公理化として (そこそこは) 自然である。

Positively ordered semigroup

そのなかでも多く研究されているのが次のクラスである。

Definition

$(S, \cdot, \leq)$ を線形順序半群とする。任意の $a, b \in S$ に対して、$a \cdot b \geq a$ かつ $a \cdot b \geq b$ ならば、S を positively ordered semigroup という。もし、任意の $a, b \in S$ に対して、$a \cdot b > a$ かつ $a \cdot b > b$ ならば、S を strictly positively ordered semigroup という。

例えば、非負実数に通常の順序と加法を入れたもの $([0, \infty), \leq, +)$ は positively ordered semigroup である。
Positively ordered semigroup は大きさをはかる尺度の公理化として (そこそこは) 自然である。

Positively ordered semigroup

そのなかでも多く研究されているのが次のクラスである。

Definition

$(S, \cdot, \leq)$ を線形順序半群とする。任意の $a, b \in S$ に対して、$a \cdot b \geq a$ かつ $a \cdot b \geq b$ ならば、S を positively ordered semigroup という。もし、任意の $a, b \in S$ に対して、$a \cdot b > a$ かつ $a \cdot b > b$ ならば、S を strictly positively ordered semigroup という。

例えば、非負実数に通常の順序と加法を入れたもの $([0, \infty), \leq, +)$ は positively ordered semigroup である。
Positively ordered semigroup は大きさをはかる尺度の公理化として (そこそこは) 自然である。

Positively ordered semigroup

そのなかでも多く研究されているのが次のクラスである。

Definition

$(S, \cdot, \leq)$ を線形順序半群とする。任意の $a, b \in S$ に対して、$a \cdot b \geq a$ かつ $a \cdot b \geq b$ ならば、S を positively ordered semigroup という。もし、任意の $a, b \in S$ に対して、$a \cdot b > a$ かつ $a \cdot b > b$ ならば、S を strictly positively ordered semigroup という。

例えば、非負実数に通常の順序と加法を入れたもの $([0, \infty), \leq, +)$ は positively ordered semigroup である。
Positively ordered semigroup は大きさをはかる尺度の公理化として (そこそこは) 自然である。

性質をいくつか

Positively ordered semigroup が $[0, \infty)$ の部分構造と同型になる条件のことはよく研究されている。それを述べるためにいくつかの定義をする。

Definition

$(S, \cdot, \leq)$ を positively ordered semigroup とする。

1. 任意の $a, b \in S$ に対して、a が単位元でなければ、$b \leq a^n$ となるような自然数 n が存在するときに、S はアルキメデス的であるという。
2. 任意の $a, b \in S$ に対して、$a < b$ ならば、$ax = b$ かつ $ya = b$ となるような $x, y \in S$ が存在するときに、S は自然に順序付けられている (naturally ordered) という。

乗法的な半群ではアルキメデス性の定義を変える流儀もあるようだが、ここでは加法的なときによく使われる方を一般に採用している。

性質をいくつか

Positively ordered semigroup が $[0, \infty)$ の部分構造と同型になる条件のことはよく研究されている。それを述べるためにいくつかの定義をする。

Definition

$(S, \cdot, \leq)$ を positively ordered semigroup とする。

1. 任意の $a, b \in S$ に対して、a が単位元でなければ、$b \leq a^n$ となるような自然数 n が存在するときに、S はアルキメデス的であるという。
2. 任意の $a, b \in S$ に対して、$a < b$ ならば、$ax = b$ かつ $ya = b$ となるような $x, y \in S$ が存在するときに、S は自然に順序付けられている (naturally ordered) という。

乗法的な半群ではアルキメデス性の定義を変える流儀もあるようだが、ここでは加法的なときによく使われる方を一般に採用している。

性質をいくつか

Positively ordered semigroup が $[0,\infty)$ の部分構造と同型になる条件のことはよく研究されている。それを述べるためにいくつかの定義をする。

Definition

$(S,\cdot,\leq)$ を positively ordered semigroup とする。

1. 任意の $a,b\in S$ に対して、a が単位元でなければ、$b\leq a^n$ となるような自然数 n が存在するときに、S はアルキメデス的であるという。
2. 任意の $a,b\in S$ に対して、$a<b$ ならば、$ax=b$ かつ $ya=b$ となるような $x,y\in S$ が存在するときに、S は自然に順序付けられている (naturally ordered) という。

乗法的な半群ではアルキメデス性の定義を変える流儀もあるようだが、ここでは加法的なときによく使われる方を一般に採用している。

性質をいくつか

Positively ordered semigroup が $[0, \infty)$ の部分構造と同型になる条件のことはよく研究されている。それを述べるためにいくつかの定義をする。

Definition

$(S, \cdot, \leq)$ を positively ordered semigroup とする。

1. 任意の $a, b \in S$ に対して、a が単位元でなければ、$b \leq a^n$ となるような自然数 n が存在するときに、S はアルキメデス的であるという。
2. 任意の $a, b \in S$ に対して、$a < b$ ならば、$ax = b$ かつ $ya = b$ となるような $x, y \in S$ が存在するときに、S は自然に順序付けられている (naturally ordered) という。

乗法的な半群ではアルキメデス性の定義を変える流儀もあるようだが、ここでは加法的なときによく使われる方を一般に採用している。

Hölder の定理

Theorem (O. Hölder, 1901)

$(S, \cdot, \leq)$ を自然に順序付けられた *strictly positively ordered semigroup* で、最小元を持たないようなものとする。このとき、

- S が *Dedekind* 完備であるならば、S は $((0, \infty), +, \leq)$ と同型になる。
- S がアルキメデス的になることと、S が $((0, \infty), +, \leq)$ の部分構造と同型になることが同値になる。

Hölder の定理より仮定を弱めた定理がいくつか証明されているが、そこで使われているのが次の概念である。Anomalous pair は、positively ordered semigroup 上では次のように定義される。

Definition

S を positively ordered semigroup とする。$a, b \in S$ が anomalous pair をなすとは、$a \neq b$ であり、かつ任意の正整数 n に対して、$a^n < b^{n+1}$ かつ $b^n < a^{n+1}$ となることを言う。

Anomalous pairs

Hölder の定理より仮定を弱めた定理がいくつか証明されているが、そこで使われているのが次の概念である。Anomalous pair は、positively ordered semigroup 上では次のように定義される。

Definition

S を positively ordered semigroup とする。$a, b \in S$ が anomalous pair をなすとは、$a \neq b$ であり、かつ任意の正整数 n に対して、$a^n < b^{n+1}$ かつ $b^n < a^{n+1}$ となることを言う。

Anomalous pairs

Hölder の定理より仮定を弱めた定理がいくつか証明されているが、そこで使われているのが次の概念である。Anomalous pair は、positively ordered semigroup 上では次のように定義される。

Definition

S を positively ordered semigroup とする。$a, b \in S$ が anomalous pair をなすとは、$a \neq b$ であり、かつ任意の正整数 n に対して、$a^n < b^{n+1}$ かつ $b^n < a^{n+1}$ となることを言う。

それ、何？

Example

$S = (0, \infty) \times [0, \infty)$ として、半群演算を coordinate-wise なもの、順序を辞書式順序で定める。このとき S はアルキメデス的な positively ordered semigroup である。任意の $a \in (0, \infty)$ と互いに異なる $x, y \in [0, \infty)$ に対して、$\langle a, x \rangle$ と $\langle a, y \rangle$ が anomalous pair をなすことが容易に証明できる。

つまり、anomalous pair は同じではないけどものすごく近いものからなるといえる。

それ、何？

線形順序集合とその上で定義される構造について

石宇哲也

線形順序集合の定義と例

五元基底定理

至る所非可分な線形順序の有限積

Treybig の定理と Mardešić の予想

線形順序位相半群と線形順序半群

S-距離付可能空間

未解決問題

Example

$S = (0, \infty) \times [0, \infty)$ として、半群演算を coordinate-wise なもの、順序を辞書式順序で定める。このとき S はアルキメデス的な positively ordered semigroup である。任意の $a \in (0, \infty)$ と互いに異なる $x, y \in [0, \infty)$ に対して、$\langle a, x \rangle$ と $\langle a, y \rangle$ が anomalous pair をなすことが容易に証明できる。

つまり、anomalous pair は同じではないけどものすごく近いものからなるといえる。

それ、何？

Example

$S = (0, \infty) \times [0, \infty)$ として、半群演算を coordinate-wise なもの、順序を辞書式順序で定める。このとき S はアルキメデス的な positively ordered semigroup である。任意の $a \in (0, \infty)$ と互いに異なる $x, y \in [0, \infty)$ に対して、$\langle a, x \rangle$ と $\langle a, y \rangle$ が anomalous pair をなすことが容易に証明できる。

つまり、anomalous pair は同じではないけどものすごく近いものからなるといえる。

それ、何？

Example

$S = (0, \infty) \times [0, \infty)$ として、半群演算を coordinate-wise なもの、順序を辞書式順序で定める。このとき S はアルキメデス的な positively ordered semigroup である。任意の $a \in (0, \infty)$ と互いに異なる $x, y \in [0, \infty)$ に対して、$\langle a, x \rangle$ と $\langle a, y \rangle$ が anomalous pair をなすことが容易に証明できる。

つまり、anomalous pair は同じではないけどものすごく近いものからなるといえる。

L. Fuchs の定理

Hölder の定理の仮定を弱めた定理の中でも強力なものが次の L. Fuchs による定理である。

Theorem (L. Fuchs, 1961)

S を *positively ordered semigroup* とする。このとき、S が $([0,\infty),+,\leq)$ の部分構造と同型になることは、S がアルキメデス的であり、*anomalous pair* を持たず、S が一元集合でないかぎり最大元をもたないことと同値である。

L. Fuchs の定理

Hölder の定理の仮定を弱めた定理の中でも強力なものが次の L. Fuchs による定理である。

Theorem (L. Fuchs, 1961)

S を *positively ordered semigroup* とする。このとき、S が $([0, \infty), +, \leq)$ の部分構造と同型になることは、S がアルキメデス的であり、*anomalous pair* を持たず、S が一元集合でないかぎり最大元をもたないことと同値である。

Kowalski の定理、または新規性なかったその 3

「これ、anomalous pair があるときもかなり近いことが言えるけど、なんか誰も書いてないっぽいよね」とか思って書き始めてずいぶん経ってから、O. Kowalski という人が全く同じことを考え出版していたことを知る。

Theorem (O. Kowalski, 1965)

S をアルキメデス的な *positively ordered semigroup* とする。このとき、下記は同値になる。

1. S は最大元を持たない。
2. S から $[0, \infty)$ への非自明な準同型写像 f が存在する。

f が *(ii)* の結論をみたすものとすると、任意の異なる $x, y \in S$ に対して、$f(x) = f(y)$ となることと、x と y が *anomalous pair* をなすことが同値である。

Kowalski の定理、または新規性なかったその 3

「これ、anomalous pair があるときもかなり近いことが言えるけど、なんか誰も書いてないっぽいよね」とか思って書き始めてずいぶん経ってから、O. Kowalski という人が全く同じことを考え出版していたことを知る。

Theorem (O. Kowalski, 1965)

S をアルキメデス的な *positively ordered semigroup* とする。このとき、下記は同値になる。

1. S は最大元を持たない。
2. S から $[0, \infty)$ への非自明な準同型写像 f が存在する。

f が *(ii)* の結論をみたすものとすると、任意の異なる $x, y \in S$ に対して、$f(x) = f(y)$ となることと、x と y が *anomalous pair* をなすことが同値である。

証明

今回は、証明まで私が考えていたものと同じなのでなんかイヤ。

Proof.

- S 上の関係 $\sim$ を、$a = b$ または a と b が anomalous pair をなすときに $a \sim b$ とする、と定義する。
- $\sim$ は同値関係になる。
- $S/\sim$ 上で、普通に商構造を定義できて、これが L. Fuchs の定義の仮定をみたす (特に、anomalous pair を持たないものになる)。

□

P_1 と P_1^*

では、最大元を持つ場合にはどうかと考えると、次の二つの positively ordered semigroup が重要な役割を果たす。

Example

$P_1 = ([0,1], +_1, \leq)$ とする。ここで、$+_1$ は次のように定義される $[0,1]$ 上の演算である。

$$a +_1 b = \max\{a+b, 1\}$$

$P_1^* = ([0,1] \cup \{\infty\}, +_1^*, \leq)$ とする。ここで、∞ は最大元を表す記号で、$+_1^*$ は次のように定義される $[0,1]$ 上の演算である。

$$a +_1^* b = \begin{cases} a+b & \text{if } a, b \in [0,1] \wedge a+b \leq 1 \\ \infty & \text{if } a, b \in [0,1] \wedge a+b > 1 \\ \infty & \text{if } a = \infty \vee b = \infty \end{cases}$$

Fuchs の定理その 2

Theorem

S が自然に順序付けられたアルキメデス的な *positively ordered semigroup* ならば、S は $([0, \infty), +, \leq)$, P_1, P_1^* のうちどれか一つの部分構造と同型となる。

Corollary

S が自然に順序付けられたアルキメデス的な *positively ordered semigroup* で最大元を持つようなものならば、S は P_1 または P_1^* の部分構造と同型となる。

Fuchs の定理その 2

Theorem

S が自然に順序付けられたアルキメデス的な *positively ordered semigroup* ならば、*S* は $([0,\infty),+,\leq)$, P_1, P_1^* のうちどれか一つの部分構造と同型となる。

Corollary

S が自然に順序付けられたアルキメデス的な *positively ordered semigroup* で最大元を持つようなものならば、*S* は P_1 または P_1^* の部分構造と同型となる。

自然に順序付けられていないときは？

「自然に順序付けられた」という仮定はやはり強すぎると思うのでなんとかしたい。

それを弱めた次の性質を考える。

Definition

S が (B) をみたすとは、S を最大元を持つアルキメデス的な positively ordered semigroup とする。任意の $a, b \in S$ に対して、$a < b$ ならば、$a \cdot c \leq b$ かつ $c \cdot a \leq b$ となるような単位元でない $c \in S$ が存在することをいう。

自然に順序付けられていないときは？

「自然に順序付けられた」という仮定はやはり強すぎると思うのでなんとかしたい。
それを弱めた次の性質を考える。

Definition

S が (B) をみたすとは、S を最大元を持つアルキメデス的な positively ordered semigroup とする。任意の $a, b \in S$ に対して、$a < b$ ならば、$a \cdot c \leq b$ かつ $c \cdot a \leq b$ となるような単位元でない $c \in S$ が存在することをいう。

今度こそ新規？

このとき次の定理が証明できる。

Theorem (石宇, 2021)

S を最大元 z を持つアルキメデス的な *positively ordered semigroup* で、(B) をみたすものとする。このとき、順序を保つ半群準同型写像 $f : S \to P_1$ で次の条件をみたすもののことをいう。

1. 任意の $r \in [0,1)$ に対して、$|f^{-1}\{r\}| \leq 1$。
2. $|f^{-1}\{1\}| \leq 2$。
3. 任意の $x, y \in S$ に対して、$f(x) + f(y) > 1$ ならば、$xy = z$。

今度こそ新規？

このとき次の定理が証明できる。

Theorem (石宇, 2021)

S を最大元 z を持つアルキメデス的な *positively ordered semigroup* で、*(B)* をみたすものとする。このとき、順序を保つ半群準同型写像 $f : S \to P_1$ で次の条件をみたすもののことをいう。

1. 任意の $r \in [0,1)$ に対して、$|f^{-1}\{r\}| \leq 1$。
2. $|f^{-1}\{1\}| \leq 2$。
3. 任意の $x, y \in S$ に対して、$f(x) + f(y) > 1$ ならば、$xy = z$。

つまり？

この定理の結論は、条件をみたすような S の適切な商構造をとると、それは P_1 と P_1^* の中間にあるものと同型であると解釈できる。

$|f^{-1}\{1\}| = 1$ ならば、P_1 に埋め込める。

$|f^{-1}\{1\}| = 2$ ならば、P_1^* に似た構造
$P = ([0,1] \cup \{\infty\}, +', \leq)$ で、$r + s = 1$ のときに $r +' s$ が 1 となる場合と ∞ になる場合があるものに埋め込める。

真に P_1 と P_1^* の間にあるようなものは、ちょっと面倒だけれども作れる。

つまり？

この定理の結論は、条件をみたすような S の適切な商構造をとると、それは P_1 と P_1^* の中間にあるものと同型であると解釈できる。

$|f^{-1}\{1\}| = 1$ ならば、P_1 に埋め込める。

$|f^{-1}\{1\}| = 2$ ならば、P_1^* に似た構造
$P = ([0,1] \cup \{\infty\}, +', \leq)$ で、$r + s = 1$ のときに $r +' s$ が 1 となる場合と ∞ になる場合があるものに埋め込める。

真に P_1 と P_1^* の間にあるようなものは、ちょっと面倒だけれども作れる。

つまり？

この定理の結論は、条件をみたすような S の適切な商構造をとると、それは P_1 と P_1^* の中間にあるものと同型であると解釈できる。

$|f^{-1}\{1\}| = 1$ ならば、P_1 に埋め込める。

$|f^{-1}\{1\}| = 2$ ならば、P_1^* に似た構造
$P = ([0,1] \cup \{\infty\}, +', \leq)$ で、$r + s = 1$ のときに $r +' s$ が 1 となる場合と ∞ になる場合があるものに埋め込める。

真に P_1 と P_1^* の間にあるようなものは、ちょっと面倒だけれども作れる。

つまり？

この定理の結論は、条件をみたすような S の適切な商構造をとると、それは P_1 と P_1^* の中間にあるものと同型であると解釈できる。

$|f^{-1}\{1\}| = 1$ ならば、P_1 に埋め込める。

$|f^{-1}\{1\}| = 2$ ならば、P_1^* に似た構造
$P = ([0,1] \cup \{\infty\}, +', \leq)$ で、$r + s = 1$ のときに $r +' s$ が 1 となる場合と ∞ になる場合があるものに埋め込める。

真に P_1 と P_1^* の間にあるようなものは、ちょっと面倒だけれども作れる。

S-距離

Positively ordered semigroup という「大きさの尺度」の一般化を使って距離空間を一般化してみる。

Definition

X を集合とし、S を単位元 e を持つ positively ordered semigroup とする。$d : X \times X \to S$ が S-距離であるとは、任意の $x, y, z \in X$ に対して次の 3 つの条件をみたすことをいう。

1. $d(x, y = e)$ であることと、$x = y$ が同値。
2. $d(x, y) = d(y, x)$。
3. $d(x, z) \leq d(x, y) d(y, z)$

S-距離 d を用いて距離によって導かれる位相と同様に集合族を定義した場合に、それが常に位相となるかは未解決である。それが位相となるときには、d から導かれる位相という。

S-距離

Positively ordered semigroup という「大きさの尺度」の一般化を使って距離空間を一般化してみる。

Definition

X を集合とし、S を単位元 e を持つ positively ordered semigroup とする。$d : X \times X \to S$ が S-距離であるとは、任意の $x, y, z \in X$ に対して次の３つの条件をみたすことをいう。

1. $d(x, y = e)$ であることと、$x = y$ が同値。
2. $d(x, y) = d(y, x)$。
3. $d(x, z) \leq d(x, y)d(y, z)$

S-距離 d を用いて距離によって導かれる位相と同様に集合族を定義した場合に、それが常に位相となるかは未解決である。それが位相となるときには、d から導かれる位相という。

S-距離

Positively ordered semigroup という「大きさの尺度」の一般化を使って距離空間を一般化してみる。

Definition

X を集合とし、S を単位元 e を持つ positively ordered semigroup とする。$d: X \times X \to S$ が S-距離であるとは、任意の $x, y, z \in X$ に対して次の３つの条件をみたすことをいう。

1. $d(x, y = e)$ であることと、$x = y$ が同値。
2. $d(x, y) = d(y, x)$。
3. $d(x, z) \leq d(x, y)d(y, z)$

S-距離 d を用いて距離によって導かれる位相と同様に集合族を定義した場合に、それが常に位相となるかは未解決である。それが位相となるときには、d から導かれる位相という。

S-距離化可能空間

Definition

X を位相空間とする。X が S-距離化可能空間であるとは、X の位相と d から導かれる位相が一致するような S-距離 d が存在することをいう。

ここまでは良いのだが、この拡張があまり意味のないものであることが、すでに知られている議論からわかる。そのことを説明する。

S-距離化可能空間

Definition

X を位相空間とする。X が S-距離化可能空間であるとは、X の位相と d から導かれる位相が一致するような S-距離 d が存在することをいう。

ここまでは良いのだが、この拡張があまり意味のないものであることが、すでに知られている議論からわかる。そのことを説明する。

L-超距離付可能空間

超距離空間を同様に拡張して次のようなものを考えることができる。超距離においては演算を定義する必要がないので、最小元のある線形順序集合上で定義することができる。

Definition

L を最小元 e を持つような線形順序集合とする。
$d : X \times X \to L$ が、任意の $x, y, z \in X$ に対して次の条件をみたすとき集合 X 上の L-超距離であるという。

1. $d(x, y) = e$ と $x = y$ が同値。
2. $d(x, y) = d(y, x)$。
3. $d(x, z) \leq_L \max\{d(x, y), d(y, z)\}$。

d によって導かれる位相は、S-距離と同様に定義できる。S-距離の場合と違い、L-超距離は常に位相を導く。

L-超距離付可能空間

超距離空間を同様に拡張して次のようなものを考えることができる。超距離においては演算を定義する必要がないので、最小元のある線形順序集合上で定義することができる。

Definition

L を最小元 e を持つような線形順序集合とする。
$d : X \times X \to L$ が、任意の $x, y, z \in X$ に対して次の条件をみたすとき集合 X 上の L-超距離であるという。

1. $d(x, y) = e$ と $x = y$ が同値。
2. $d(x, y) = d(y, x)$。
3. $d(x, z) \leq_L \max\{ d(x, y), d(y, z) \}$。

d によって導かれる位相は、S-距離と同様に定義できる。S-距離の場合と違い、L-超距離は常に位相を導く。

L-超距離付可能空間

超距離空間を同様に拡張して次のようなものを考えることができる。超距離においては演算を定義する必要がないので、最小元のある線形順序集合上で定義することができる。

Definition

L を最小元 e を持つような線形順序集合とする。
$d : X \times X \to L$ が、任意の $x, y, z \in X$ に対して次の条件をみたすとき集合 X 上の L-超距離であるという。

1. $d(x, y) = e$ と $x = y$ が同値。
2. $d(x, y) = d(y, x)$。
3. $d(x, z) \leq_L \max\{ d(x, y), d(y, z) \}$。

d によって導かれる位相は、S-距離と同様に定義できる。S-距離の場合と違い、L-超距離は常に位相を導く。

実は、線形順序群に関しては同様なことを R. Sikorski が 1950 年の論文で考えている (1946 年に講演したとも書いてある)。

Character、すなわち単位元に収束するような正の元の列の最小の長さが ω_μ となるような線形順序群 G 上で定義された距離で距離付けられるような空間のことを ω_μ-距離化可能空間と呼んでいる。

ω_μ-距離化可能空間

実は、線形順序群に関しては同様なことを R. Sikorski が 1950 年の論文で考えている (1946 年に講演したとも書いてある)。

Character、すなわち単位元に収束するような正の元の列の最小の長さが ω_μ となるような線形順序群 G 上で定義された距離で距離付けられるような空間のことを ω_μ-距離化可能空間と呼んでいる。

ω_μ-距離化可能空間についての結果

F. W. Stevenson と W. J. Thron は、次の定理で ω_μ-距離化可能空間と一様空間を関係づけた。

Theorem

X をハウスドルフ空間とする。このとき、X が ω_μ-距離化可能となるような μ が存在することと、$\subseteq$ で全順序がつけられるような *base* を持つような一様構造 $\mathcal{U}$ でそこから定まる位相が X の位相と一致するようなものが存在することが同値になる。

ω_μ-距離化可能空間についての結果

F. W. Stevenson と W. J. Thron は、次の定理で ω_μ-距離化可能空間と一様空間を関係づけた。

Theorem

X をハウスドルフ空間とする。このとき、X が ω_μ-距離化可能となるような μ が存在することと、$\subseteq$ で全順序がつけられるような *base* を持つような一様構造 $\mathcal{U}$ でそこから定まる位相が X の位相と一致するようなものが存在することが同値になる。

Nyikos と Reichel による考察

P. Nyikos と H. C. Reichel は実質的に次のことが成り立つことを考察している。

Theorem

全ての距離化可能でない ω_μ-距離化可能空間 X は、ある線形順序集合 L に対して L-超距離化可能となる。

つまり、全ての距離化可能でない ω_μ-距離化可能空間 X においては、その距離での演算を使う必要はない。

Nyikos と Reichel による考察

P. Nyikos と H. C. Reichel は実質的に次のことが成り立つことを考察している。

Theorem

全ての距離化可能でない ω_μ-距離化可能空間 X は、ある線形順序集合 L に対して L-超距離化可能となる。

つまり、全ての距離化可能でない ω_μ-距離化可能空間 X においては、その距離での演算を使う必要はない。

Nyikos と Reichel による考察

P. Nyikos と H. C. Reichel は実質的に次のことが成り立つことを考察している。

Theorem

全ての距離化可能でない ω_μ-距離化可能空間 X は、ある線形順序集合 L に対して L-超距離化可能となる。

つまり、全ての距離化可能でない ω_μ-距離化可能空間 X においては、その距離での演算を使う必要はない。

性質 (A)

S-距離化可能空間に対しても、次の仮定をおけばほとんど同じ議論が適用できる。

Definition

Positively ordered semigroup S が (A) をみたすとは、任意の単位元でない $a \in S$ に対して、$b^2 \leq a$ となるような単位元でない $b \in S$ が存在することをいう。

事実

S がアルキメデス的な positively ordered semigroup で、(B) をみたし、任意の単位元でない $a \in S$ に対して、$b < a$ をみたすような単位元でない $b \in S$ が存在するならば、S は (A) をみたす。

性質 (A)

S-距離化可能空間に対しても、次の仮定をおけばほとんど同じ議論が適用できる。

Definition

Positively ordered semigroup S が (A) をみたすとは、任意の単位元でない $a \in S$ に対して、$b^2 \leq a$ となるような単位元でない $b \in S$ が存在することをいう。

事実

S がアルキメデス的な positively ordered semigroup で、(B) をみたし、任意の単位元でない $a \in S$ に対して、$b < a$ をみたすような単位元でない $b \in S$ が存在するならば、S は (A) をみたす。

性質 (A)

S-距離化可能空間に対しても、次の仮定をおけばほとんど同じ議論が適用できる。

Definition

Positively ordered semigroup S が (A) をみたすとは、任意の単位元でない $a \in S$ に対して、$b^2 \leq a$ となるような単位元でない $b \in S$ が存在することをいう。

事実

S がアルキメデス的な positively ordered semigroup で、(B) をみたし、任意の単位元でない $a \in S$ に対して、$b < a$ をみたすような単位元でない $b \in S$ が存在するならば、S は (A) をみたす。

新規性なかったその 4

というわけで、ほぼ既知の議論で次の定理が証明できる。(iii) と (iv) の同値性が証明できて喜んでいたのがぬか喜びになった。

Theorem

X をハウスドルフ空間とするこのとき、以下は同値である。

1. $\subseteq$ で全順序がつけられるような *base* を持つような一様構造 $\mathcal{U}$ でそこから定まる位相が X の位相と一致するようなものが存在する。
2. X が ω_μ-距離化可能となるような μ が存在する。
3. X は距離化可能であるか、X が L-超距離化可能となるような最小元をもつ線形順序 L が存在する。
4. X が S-距離化可能となるような、(A) をみたす *positively ordered semigroup* S が存在する。

新規性なかったその 4

というわけで、ほぼ既知の議論で次の定理が証明できる。(iii) と (iv) の同値性が証明できて喜んでいたのがぬか喜びになった。

Theorem

X をハウスドルフ空間とするこのとき、以下は同値である。

1. $\subseteq$ で全順序がつけられるような *base* を持つような一様構造 $\mathcal{U}$ でそこから定まる位相が X の位相と一致するようなものが存在する。
2. X が ω_μ-距離化可能となるような μ が存在する。
3. X は距離化可能であるか、X が L-超距離化可能となるような最小元をもつ線形順序 L が存在する。
4. X が S-距離化可能となるような、(A) をみたす *positively ordered semigroup* S が存在する。

新規性なかったその 4

というわけで、ほぼ既知の議論で次の定理が証明できる。(iii) と (iv) の同値性が証明できて喜んでいたのがぬか喜びになった。

Theorem

X をハウスドルフ空間とするこのとき、以下は同値である。

1. $\subseteq$ で全順序がつけられるような *base* を持つような一様構造 $\mathcal{U}$ でそこから定まる位相が X の位相と一致するようなものが存在する。
2. X が ω_μ-距離化可能となるような μ が存在する。
3. X は距離化可能であるか、X が L-超距離化可能となるような最小元をもつ線形順序 L が存在する。
4. X が S-距離化可能となるような、*(A)* をみたす *positively ordered semigroup* S が存在する。

つまり…

要するに、三角不等式が実質的な意味を持つような距離みたいなものを定義できるのは、本当に距離化可能な空間に限るということ。

だから、S-距離みたいなのを考えるのはあまり意味がない。定義されたそばから意味がないといわれるのはちょっとかわいそうではある。

S が (A) だけでなく (B) もみたすなら、(iv) は S が P_1 の部分構造にほとんど埋め込めることからも言える。

つまり…

要するに、三角不等式が実質的な意味を持つような距離みたいなものを定義できるのは、本当に距離化可能な空間に限るということ。

だから、S-距離みたいなのを考えるのはあまり意味がない。
定義されたそばから意味がないといわれるのはちょっとかわいそうではある。

S が (A) だけでなく (B) もみたすなら、(iv) は S が P_1 の部分構造にほとんど埋め込めることからも言える。

つまり…

要するに、三角不等式が実質的な意味を持つような距離みたいなものを定義できるのは、本当に距離化可能な空間に限るということ。

だから、S-距離みたいなのを考えるのはあまり意味がない。定義されたそばから意味がないといわれるのはちょっとかわいそうではある。

S が (A) だけでなく (B) もみたすなら、(iv) は S が P_1 の部分構造にほとんど埋め込めることからも言える。

つまり…

要するに、三角不等式が実質的な意味を持つような距離みたいなものを定義できるのは、本当に距離化可能な空間に限るということ。

だから、S-距離みたいなのを考えるのはあまり意味がない。定義されたそばから意味がないといわれるのはちょっとかわいそうではある。

S が (A) だけでなく (B) もみたすなら、(iv) は S が P_1 の部分構造にほとんど埋め込めることからも言える。

未解決問題（位相関連）

そもそも問題が定義できていないものが多いが。

Question

連結かつ至る所非可分な位相空間は「回転」できないのではないか？

- そもそもどうやって「回転」を定義する？

Question

実数でできるけどそれ以外の線形順序では無理なことはもっとないのか？

- 多様体とか作ってみたらどのくらい違う？

未解決問題（位相関連）

そもそも問題が定義できていないものが多いが。

Question

連結かつ至る所非可分な位相空間は「回転」できないのではないか？

- そもそもどうやって「回転」を定義する？

Question

実数でできるけどそれ以外の線形順序では無理なことはもっとないのか？

- 多様体とか作ってみたらどのくらい違う？

未解決問題（位相関連）

そもそも問題が定義できていないものが多いが。

Question

連結かつ至る所非可分な位相空間は「回転」できないのではないか？

- そもそもどうやって「回転」を定義する？

Question

実数でできるけどそれ以外の線形順序では無理なことはもっととないのか？

- 多様体とか作ってみたらどのくらい違う？

未解決問題（代数関連）

Question

Positively ordered semigroup の構造定理から (B) という条件を外せないか。

- 最大元があるときに anomalous pairs みたいなものをどう定義するか？

Question

非可分な位相群（とか位相半群とか）はすごく限定されているのではないか？

- 今更になって江田先生の弟子みたいなことやり始めている。

未解決問題（代数関連）

Question

Positively ordered semigroup の構造定理から (B) という条件を外せないか。

- 最大元があるときに anomalous pairs みたいなものをどう定義するか？

Question

非可分な位相群（とか位相半群とか）はすごく限定されているのではないか？

- 今更になって江田先生の弟子みたいなことやり始めている。