レーヴェンハイム-スコーレムの定理とその応用

田尻翔平

April 29, 2022

講義の目的

数学基礎論のイメージ
$\longleftarrow$ niche, 支流, 過剰にテクニカル, 応用は効かない
（田尻の被害妄想含む）

数学基礎論における有名な定理
「レーヴェンハイム-スコーレム (-タルスキ) の定理」
と, その応用例を紹介することで
「数学基礎論の手法は広範に活用できる可能性がある」
「数学基礎論的な観点が実践的アイデアを生む」
と感じてもらうこと.

講義の目的

数学基礎論のイメージ
$\longleftarrow$ niche, 支流, 過剰にテクニカル, 応用は効かない
（田尻の被害妄想含む）

数学基礎論における有名な定理
「レーヴェンハイム-スコーレム (-タルスキ) の定理」
と, その応用例を紹介することで
「数学基礎論の手法は広範に活用できる可能性がある」
「数学基礎論的な観点が実践的アイデアを生む」
と感じてもらうこと.

つまり……

数学基礎論は専攻問わず興味深い！

数学基礎論という立場

数学基礎論の主な目的：
「数学のロジックを形式的な記号操作と見なして，
ロジックそのものが持つメタ的な構造を解明したい」

メタ的な構造：
「この公理系は無矛盾である」
「この公理系からこの命題は証明できない」

数学基礎論の難点

さっさと準備を終えて本題に行きたいところだが……

しかしながら，ただの準備でも
ありがちな疑問で躓く可能性が高い分野

ありがちな疑問に注意しながら，
可能な限り最短で説明を試みたい．

数学基礎論の難点

さっさと準備を終えて本題に行きたいところだが……

しかしながら, ただの準備でも
ありがちな疑問で躓く可能性が高い分野

ありがちな疑問に注意しながら,
可能な限り最短で説明を試みたい.

数学基礎論の難点

さっさと準備を終えて本題に行きたいところだが……

しかしながら, ただの準備でも
ありがちな疑問で躓く可能性が高い分野

ありがちな疑問に注意しながら,
可能な限り最短で説明を試みたい.

命題論理 - 1

命題論理：
文の真偽の組み合わせがなすロジック構造の研究

集合I：なんでもいい.
$p, q \in I$：命題変数

$p \wedge q \vdash p, \qquad p \vdash p \vee q, \qquad \vdash p \longleftrightarrow \neg\neg p$
ド・モルガンの法則：$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

文の意味内容には真偽性より深くは立ち入らない.

命題論理 - 1

命題論理：
文の真偽の組み合わせがなすロジック構造の研究

集合I：なんでもいい.
$p, q \in I$：命題変数

$p \wedge q \vdash p, \qquad p \vdash p \vee q, \qquad \vdash p \longleftrightarrow \neg\neg p$
ド・モルガンの法則：$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

文の意味内容には真偽性より深くは立ち入らない.

命題論理 - 1

命題論理：
文の真偽の組み合わせがなすロジック構造の研究

集合I：なんでもいい.
$p, q \in I$：命題変数

$p \wedge q \vdash p, \qquad p \vdash p \vee q, \qquad \vdash p \longleftrightarrow \neg\neg p$
ド・モルガンの法則：$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

文の意味内容には真偽性より深くは立ち入らない.

命題論理 - 1

命題論理：
文の真偽の組み合わせがなすロジック構造の研究

集合 I：なんでもいい. $\longleftarrow$???
$p, q \in I$：命題変数

$p \wedge q \vdash p, \qquad p \vdash p \vee q, \qquad \vdash p \longleftrightarrow \neg\neg p$
ド・モルガンの法則：$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

文の意味内容には真偽性より深くは立ち入らない.

命題論理 - 2

理論：論理式の集合のこと.
$\{p, \neg q, p \to r\}$

モデル：理論の論理式全てを真にするような
命題変数への真偽値の割り当てのこと.
$p = T, q = F, r = T$ は上の理論のモデル.

無矛盾：理論から推論規則によって
矛盾が導かれないこと.
$\{p, \neg p\}$ は矛盾した理論

命題論理の完全性定理（要 AC） $\leftarrow$???

「理論がモデルを持つこと」（意味論的条件）と
「理論が無矛盾であること」（統語論的条件）は同値

命題論理 - 2

理論：論理式の集合のこと.
$\{p, \neg q, p \to r\}$

モデル：理論の論理式全てを真にするような
命題変数への真偽値の割り当てのこと.
$p = T, q = F, r = T$ は上の理論のモデル.

無矛盾：理論から推論規則によって
矛盾が導かれないこと.
$\{p, \neg p\}$ は矛盾した理論

命題論理の完全性定理（要 AC） $\leftarrow$???

「理論がモデルを持つこと」（意味論的条件）と
「理論が無矛盾であること」（統語論的条件）は同値

命題論理 - 2

理論：論理式の集合のこと.
$\{p, \neg q, p \to r\}$

モデル：理論の論理式全てを真にするような
命題変数への真偽値の割り当てのこと.
$p = T, q = F, r = T$ は上の理論のモデル.

無矛盾：理論から推論規則によって
矛盾が導かれないこと.
$\{p, \neg p\}$ は矛盾した理論

命題論理の完全性定理（要 AC） $\leftarrow$???

「理論がモデルを持つこと」（意味論的条件）と
「理論が無矛盾であること」（統語論的条件）は同値

命題論理 - 2

理論：論理式の集合のこと.
$\{p, \neg q, p \to r\}$

モデル：理論の論理式全てを真にするような
命題変数への真偽値の割り当てのこと.
$p = T, q = F, r = T$ は上の理論のモデル.

無矛盾：理論から推論規則によって
矛盾が導かれないこと.
$\{p, \neg p\}$ は矛盾した理論

命題論理の完全性定理（要 AC） $\leftarrow$???

「理論がモデルを持つこと」（意味論的条件）と
「理論が無矛盾であること」（統語論的条件）は同値

命題論理 - 2

理論：論理式の集合のこと.
$\{p, \neg q, p \rightarrow r\}$

モデル：理論の論理式全てを真にするような
命題変数への真偽値の割り当てのこと.
$p = T, q = F, r = T$ は上の理論のモデル.

無矛盾：理論から推論規則によって
矛盾が導かれないこと.
$\{p, \neg p\}$ は矛盾した理論

命題論理の完全性定理（要 AC）$\leftarrow$???

「理論がモデルを持つこと」（意味論的条件）と
「理論が無矛盾であること」（統語論的条件）は同値

一階述語論理

一階述語論理：
文を主語＋述語の構造に分解した上での
ロジックの構造の研究（命題変数は廃止, $\exists, \forall$ を導入）

変数記号：「主語」になりえる対象の仮置き
$x_0, x_1, x_2, \ldots$（可算無限個）
$\mathcal{F}_n$：n 項関数記号の集合（制限なし）
$\mathcal{P}_n$：n 項述語記号の集合（制限なし）
定数記号：$\mathcal{F}_0$ の元のこと．「主語」になりえる特定の対象
真偽値：$\mathcal{P}_0$ の元に相当するが不要

非論理記号：関数記号と述語記号のこと
語彙（言語）：非論理記号全体の集合

一階述語論理

一階述語論理：
文を主語 + 述語の構造に分解した上での
ロジックの構造の研究（命題変数は廃止, $\exists, \forall$ を導入）

変数記号：「主語」になりえる対象の仮置き
$x_0, x_1, x_2, \ldots$（可算無限個）
$\mathcal{F}_n$：n 項関数記号の集合（制限なし）
$\mathcal{P}_n$：n 項述語記号の集合（制限なし）
定数記号：$\mathcal{F}_0$ の元のこと．「主語」になりえる特定の対象
真偽値：$\mathcal{P}_0$ の元に相当するが不要

非論理記号：関数記号と述語記号のこと
語彙（言語）：非論理記号全体の集合

一階述語論理

一階述語論理：
文を主語 + 述語の構造に分解した上での
ロジックの構造の研究（命題変数は廃止, $\exists, \forall$ を導入）

変数記号：「主語」になりえる対象の仮置き
$x_0, x_1, x_2, \ldots$（可算無限個）
$\mathcal{F}_n$：n 項関数記号の集合（制限なし）
$\mathcal{P}_n$：n 項述語記号の集合（制限なし）
定数記号：$\mathcal{F}_0$ の元のこと．「主語」になりえる特定の対象
真偽値：$\mathcal{P}_0$ の元に相当するが不要

非論理記号：関数記号と述語記号のこと
語彙（言語）：非論理記号全体の集合

一階述語論理

一階述語論理：
文を主語 + 述語の構造に分解した上での
ロジックの構造の研究（命題変数は廃止, $\exists, \forall$ を導入）

変数記号：「主語」になりえる対象の仮置き
$x_0, x_1, x_2, \ldots$（可算無限個）
$\mathcal{F}_n$ ：n 項関数記号の集合（制限なし）
$\mathcal{P}_n$ ：n 項述語記号の集合（制限なし）
定数記号：$\mathcal{F}_0$ の元のこと．「主語」になりえる特定の対象
真偽値：$\mathcal{P}_0$ の元に相当するが不要

非論理記号：関数記号と述語記号のこと
語彙（言語）：非論理記号全体の集合

一階述語論理

一階述語論理：
文を主語 + 述語の構造に分解した上での
ロジックの構造の研究（命題変数は廃止, $\exists, \forall$ を導入）

変数記号：「主語」になりえる対象の仮置き
$x_0, x_1, x_2, \ldots$（可算無限個）
$\mathcal{F}_n$：n 項関数記号の集合（制限なし）
$\mathcal{P}_n$：n 項述語記号の集合（制限なし）
定数記号：$\mathcal{F}_0$ の元のこと．「主語」になりえる特定の対象
真偽値：$\mathcal{P}_0$ の元に相当するが不要

非論理記号：関数記号と述語記号のこと
語彙（言語）：非論理記号全体の集合

一階述語論理の使用例：群 - 1

群論

語彙：$\mathcal{F}_0 = \{e\}, \mathcal{F}_2 = \{\cdot\}$.
公理系：

- $\forall x_0, x_1, x_2 (x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2) = (x_0 \cdot x_1) \cdot x_2)$
- $\forall x_0 (x_0 \cdot e = e \cdot x_0 = x_0)$
- $\forall x_0 \exists x_1 (x_0 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_0 = e)$

「群」：群論の公理系が内部で成立している集合
（ただし $\cdot$ の解釈：群演算, e の解釈：単位元）

一階述語論理の使用例：群 - 2

述語論理的観点の成果：

定理

いかなる群においても，単位元は一意的に定まる

群論の公理系と論理の性質のみで導かれる
$\rightarrow$ 群の実体が何であるかに依存しない性質

述語論理の枠組みに落とし込んだからこそ
群の公理系とそれぞれの群の特殊性を分離できた
(実際の歴史的な哲学の変遷は無視)

一階述語論理の使用例：群 - 2

述語論理的観点の成果：

定理

いかなる群においても，単位元は一意的に定まる

群論の公理系と論理の性質のみで導かれる
$\longrightarrow$ 群の実体が何であるかに依存しない性質

述語論理の枠組みに落とし込んだからこそ
群の公理系とそれぞれの群の特殊性を分離できた
(実際の歴史的な哲学の変遷は無視)

一階述語論理の使用例：群 - 2

述語論理的観点の成果：

定理

いかなる群においても，単位元は一意的に定まる

群論の公理系と論理の性質のみで導かれる
→ 群の実体が何であるかに依存しない性質

述語論理の枠組みに落とし込んだからこそ
群の公理系とそれぞれの群の特殊性を分離できた
(実際の歴史的な哲学の変遷は無視)

一階述語論理の使用例：ZFC

特大の例：集合論（を形式的に見直したもの）
一階述語論理の枠組みで,
語彙：2 項関係記号 $\in$ のみ,
公理系：ZFC,
として行う記号操作.

議論の例：空集合の存在を証明する.
集合の存在公理 $\exists x_0(x_0 = x_0)$ で x_0 という集合を得る.
内包公理図式 $\exists x_1 \forall x_3(x_3 \in x_1 \longleftrightarrow x_3 \in x_0 \wedge \neg(x_0 = x_0))$ で x_1 を得る. x_1 が空集合となっている.

現代数学のほぼ全ての内容が集合論でコード可能
一階述語論理での公理的集合論が最重要（Kunen 曰く）

一階述語論理の使用例：ZFC

特大の例：集合論（を形式的に見直したもの）
一階述語論理の枠組みで,
語彙：2 項関係記号 $\in$ のみ,
公理系：ZFC,
として行う記号操作.

議論の例：空集合の存在を証明する.
集合の存在公理 $\exists x_0(x_0 = x_0)$ で x_0 という集合を得る.
内包公理図式 $\exists x_1 \forall x_3(x_3 \in x_1 \longleftrightarrow x_3 \in x_0 \land \neg(x_0 = x_0))$ で x_1 を得る. x_1 が空集合となっている.

現代数学のほぼ全ての内容が集合論でコード可能
一階述語論理での公理的集合論が最重要（Kunen 曰く）

一階述語論理の使用例：ZFC

特大の例：集合論（を形式的に見直したもの）
一階述語論理の枠組みで,
語彙：2 項関係記号 $\in$ のみ,
公理系：ZFC,
として行う記号操作.

議論の例：空集合の存在を証明する.
集合の存在公理 $\exists x_0(x_0 = x_0)$ で x_0 という集合を得る.
内包公理図式 $\exists x_1 \forall x_3(x_3 \in x_1 \longleftrightarrow x_3 \in x_0 \land \neg(x_0 = x_0))$ で x_1 を得る. x_1 が空集合となっている.

現代数学のほぼ全ての内容が集合論でコード可能
一階述語論理での公理的集合論が最重要（Kunen 曰く）

一階述語論理の使用例：ZFC

特大の例：集合論（を形式的に見直したもの）
一階述語論理の枠組みで，
語彙：2 項関係記号 $\in$ のみ，
公理系：ZFC，
として行う記号操作．

議論の例：空集合の存在を証明する．
集合の存在公理 $\exists x_0(x_0 = x_0)$ で x_0 という集合を得る．
内包公理図式 $\exists x_1 \forall x_3(x_3 \in x_1 \longleftrightarrow x_3 \in x_0 \wedge \neg(x_0 = x_0))$ で x_1 を得る．x_1 が空集合となっている．

現代数学のほぼ全ての内容が集合論でコード可能
一階述語論理での公理的集合論が最重要 （Kunen 曰く）

無限の利用は如何に正当化されるか - 1

命題論理や一階述語論理の枠組みの説明に有限でもなく可算無限ですらなくて良い集合を利用した.

集合：一階述語論理の ZFC 公理系で規定される対象
$\rightarrow$ 循環論法でしかも有限の立場を無視 ???

有限の立場

有限的操作は特別な数学の仮定無しに行えるはずで
有限的な手法を用いるからこそ
数学の形式化は合法的にできると考える立場

無限の利用は如何に正当化されるか - 1

命題論理や一階述語論理の枠組みの説明に有限でもなく可算無限ですらなくて良い集合を利用した.

集合：一階述語論理の ZFC 公理系で規定される対象
→ 循環論法でしかも有限の立場を無視 ???

有限の立場

有限的操作は特別な数学の仮定無しに行えるはずで
有限的な手法を用いるからこそ
数学の形式化は合法的にできると考える立場

無限の利用は如何に正当化されるか - 2

有限的操作の例

- 記号の有限列と推論規則から新しい記号列を作る.
- 変数記号をいくらでも大きい有限個使う.
- 有限的操作をいくらでも大きい有限回繰り返す.

無限集合を断りなく持ち出すことは
数学の合法的な形式化という目的に合致しない

実は……
メタ的に有限の立場に留まって行う集合論の中で
数学の形式化は実行できる！

無限の利用は如何に正当化されるか - 2

有限的操作の例

- 記号の有限列と推論規則から新しい記号列を作る.
- 変数記号をいくらでも大きい有限個使う.
- 有限的操作をいくらでも大きい有限回繰り返す.

無限集合を断りなく持ち出すことは
数学の合法的な形式化という目的に合致しない

実は……
メタ的に有限の立場に留まって行う集合論の中で
数学の形式化は実行できる！

無限の利用は如何に正当化されるか - 2

有限的操作の例

- 記号の有限列と推論規則から新しい記号列を作る.
- 変数記号をいくらでも大きい有限個使う.
- 有限的操作をいくらでも大きい有限回繰り返す.

無限集合を断りなく持ち出すことは
数学の合法的な形式化という目的に合致しない

実は……
メタ的に有限の立場に留まって行う集合論の中で
数学の形式化は実行できる！

無限の利用は如何に正当化されるか - 3

推論行為：ペアノ算術でエミュレート可能
そして, ペアノ算術 $\subset$ ZFC

可算個の変数の件：
実際の証明や論理式一つの記述は所詮有限の長さであり,
本質的に異なる意味で推論に使える変数記号は有限個
（定数記号など非論理記号はこの説明に当てはまらない）

また, 変数記号の別の定式化として,
$\{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \to \{A, A', A'', \ldots\}$
二つの記号だけ用意, 必要になり次第途中で変数を作成.

いずれにしても変数記号の扱いは「有限的」の範疇.
（論理式の集合等に言及しない限り）

無限の利用は如何に正当化されるか - 3

推論行為：ペアノ算術でエミュレート可能
そして, ペアノ算術 $\subset$ ZFC

可算個の変数の件：
実際の証明や論理式一つの記述は所詮有限の長さであり,
本質的に異なる意味で推論に使える変数記号は有限個
(定数記号など非論理記号はこの説明に当てはまらない)

また, 変数記号の別の定式化として,
$\{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \rightarrow \{A, A', A'', \ldots\}$
二つの記号だけ用意, 必要になり次第途中で変数を作成.

いずれにしても変数記号の扱いは「有限的」の範疇.
(論理式の集合等に言及しない限り)

無限の利用は如何に正当化されるか - 3

推論行為：ペアノ算術でエミュレート可能
そして, ペアノ算術 $\subset$ ZFC

可算個の変数の件：
実際の証明や論理式一つの記述は所詮有限の長さであり,
本質的に異なる意味で推論に使える変数記号は有限個
(定数記号など非論理記号はこの説明に当てはまらない)

また, 変数記号の別の定式化として,
$\{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \to \{A, A', A'', \ldots\}$
二つの記号だけ用意, 必要になり次第途中で変数を作成.

いずれにしても変数記号の扱いは「有限的」の範疇.
(論理式の集合等に言及しない限り)

無限の利用は如何に正当化されるか - 4

ZFC は無限個の公理からなる公理系である
← 実際に推論規則を用いて記号操作をするとき
有限個の公理しか参照できない
ZFC そのものの構造に言及しない限りは「有限の立場」を逸脱しない.

つまるところ……

- ZFC 公理系そのものは語彙が有限な公理系
- 推論や変数記号の扱いも実際は有限的

無限の利用は如何に正当化されるか - 4

ZFC は無限個の公理からなる公理系である
$\leftarrow$ 実際に推論規則を用いて記号操作をするとき
有限個の公理しか参照できない
ZFC そのものの構造に言及しない限りは「有限の立場」を逸脱しない.

つまるところ……

- ZFC 公理系そのものは語彙が有限な公理系
- 推論や変数記号の扱いも実際は有限的

無限の利用は如何に正当化されるか - 5

以上のことを踏まえて次のように考える.

最初に, ZFC そのものの取り扱いを有限の立場から逸脱せずに限定的な形の一階述語論理で定式化する.

そして, ZFC を通すことでメタな立場での「有限の立場での形式的推論」によって無限集合を導入して, ZFC 内で一般的な形の命題論理や述語論理の定式化を再度行っている.

これにより, 超限的な手法や選択公理を論理式の集合などに合法的に用いて議論できる. そのような手法の結果の例に完全性定理などがある.

モデル理論の考え方

モデル理論：
述語論理で形式化された公理系と
それを満たす数学的構造物（これをモデルという）
との関係を研究する.

群論

語彙：$\mathcal{F}_0 = \{e\}, \mathcal{F}_2 = \{\cdot\}$.
公理系：

- $\forall x_0, x_1, x_2 (x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2) = (x_0 \cdot x_1) \cdot x_2)$
- $\forall x_0 (x_0 \cdot e = e \cdot x_0 = x_0)$
- $\forall x_0 \exists x_1 (x_0 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_0 = e)$

群論の公理系のモデル ＝ 「群」

一階述語論理のモデル理論におけるターム

命題論理のアナロジーが利く.

閉論理式：自由変数が無く命題として解釈できる論理式
理論：閉論理式の集合
モデル：理論に属する論理式を全て真にするように
非論理記号の解釈を与える構造
無矛盾：理論から推論規則によって
矛盾が導かれないこと.

一階述語論理の完全性定理（ZFC の定理）

「理論がモデルを持つこと」（意味論的条件）と
「理論が無矛盾であること」（統語論的条件）は同値
(ゲーデルの完全性定理とも呼ばれる.)

一階述語論理のモデル理論におけるターム

命題論理のアナロジーが利く.

閉論理式：自由変数が無く命題として解釈できる論理式
理論：閉論理式の集合
モデル：理論に属する論理式を全て真にするように
非論理記号の解釈を与える構造
無矛盾：理論から推論規則によって
矛盾が導かれないこと.

一階述語論理の完全性定理（ZFC の定理）

「理論がモデルを持つこと」（意味論的条件）と
「理論が無矛盾であること」（統語論的条件）は同値
(ゲーデルの完全性定理とも呼ばれる.)

クラスモデルと集合モデルの誤解 - 1

モデル ＝ 「公理系や理論が成り立つ構造物」
← 一般に「モデル」と言えば集合サイズのものをさす.
(もしモデルが集合として存在せずクラスサイズなら
明示的に「クラスモデル」と呼ぶ.)

一階述語論理の完全性定理（ZFC の定理）

「理論が集合モデルを持つこと」と
「理論が無矛盾であること」　は同値

クラスモデルと集合モデルの誤解 - 1

モデル ＝ 「公理系や理論が成り立つ構造物」
← 一般に「モデル」と言えば集合サイズのものをさす.
(もしモデルが集合として存在せずクラスサイズなら
明示的に「クラスモデル」と呼ぶ.)

一階述語論理の完全性定理（ZFC の定理）

「理論が集合モデルを持つこと」と
「理論が無矛盾であること」　は同値

クラスモデルと集合モデルの誤解 - 2

ZFC 公理系での誤解の例：
集合論の宇宙 $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$
は全ての集合からなるクラス.

ZFC の公理は集合を同定する条件（外延性の公理）と
集合を生成する規則のみからなる.

$\mathbf{V}$ は問答無用でZFC のクラスモデルとなる.

ZFC によって ZFC が無矛盾であることを証明できた！
……という解釈で良いはずがない.
そうでなければゲーデルの不完全性定理に反するし,
ZFC が "ロジカル" に矛盾する可能性は残されている.

クラスモデルと集合モデルの誤解 - 2

ZFC 公理系での誤解の例：
集合論の宇宙 $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$
は全ての集合からなるクラス.

ZFC の公理は集合を同定する条件（外延性の公理）と
集合を生成する規則のみからなる.

$\mathbf{V}$ は問答無用でZFC のクラスモデルとなる.

ZFC によって ZFC が無矛盾であることを証明できた！
……という解釈で良いはずがない.
そうでなければゲーデルの不完全性定理に反するし,
ZFC が “ロジカル” に矛盾する可能性は残されている.

クラスモデルと集合モデルの誤解 - 2

ZFC 公理系での誤解の例：
集合論の宇宙 $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$
は全ての集合からなるクラス.

ZFC の公理は集合を同定する条件（外延性の公理）と
集合を生成する規則のみからなる.

$\mathbf{V}$ は問答無用でZFC のクラスモデルとなる.

ZFC によって ZFC が無矛盾であることを証明できた！
……という解釈で良いはずがない.
そうでなければゲーデルの不完全性定理に反するし,
ZFC が “ロジカル” に矛盾する可能性は残されている.

完全性定理と不完全性定理

$\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner$：ZFC の中で形式化された ZFC.
(ただし, これは単独で参照するような文言ではない)

$\mathrm{Con(ZFC)}$：ZFC が無矛盾であること.
$\mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner)$：形式化された ZFC が無矛盾であること.

ゲーデルの完全性定理

$\mathrm{ZFC} \vdash (\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner$ の集合モデルが存在する $\longleftrightarrow \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner))$

ゲーデルの不完全性定理

$\mathrm{Con(ZFC)}$ である限り, $\mathrm{ZFC} \nvdash \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner)$

「ZFC の無矛盾性を仮定した上で」という文言は
ここでの $\mathrm{Con(ZFC)}$ であって $\mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner)$ のことではない.

完全性定理と不完全性定理

$\ulcorner$ZFC$\urcorner$：ZFC の中で形式化された ZFC.
(ただし, これは単独で参照するような文言ではない)

Con(ZFC)：ZFC が無矛盾であること.
Con($\ulcorner$ZFC$\urcorner$)：形式化された ZFC が無矛盾であること.

ゲーデルの完全性定理

ZFC $\vdash$ ($\ulcorner$ZFC$\urcorner$ の集合モデルが存在する $\longleftrightarrow$ Con($\ulcorner$ZFC$\urcorner$))

ゲーデルの不完全性定理

Con(ZFC) である限り, ZFC $\nvdash$ Con($\ulcorner$ZFC$\urcorner$)

「ZFC の無矛盾性を仮定した上で」という文言は
ここでの Con(ZFC) であって Con($\ulcorner$ZFC$\urcorner$) のことではない.

無矛盾性の議論 - 1

しかし, 強到達不能基数が存在すること（SI）
を仮定した議論で ZFC の集合モデルを構成できる.

κ : 強到達不能基数
$V(\kappa) = \{x : \mathrm{rank}(x) < \kappa\}$ は ZFC の集合モデル.
$\rightarrow$ZFC の無矛盾性を証明できている.

つまり……

ZFC+SI $\vdash$ (⌜ZFC⌝ の集合モデルが存在する $\wedge$ Con(⌜ZFC⌝))

SI は ZFC で証明できない.
(もし証明できるなら ZFC+SI は ZFC と同値になって
　不完全性定理に反する.)

無矛盾性の議論 - 1

しかし, 強到達不能基数が存在すること（SI）
を仮定した議論で ZFC の集合モデルを構成できる.

κ : 強到達不能基数
$V(\kappa) = \{x : \mathrm{rank}(x) < \kappa\}$ は ZFC の集合モデル.
$\rightarrow$ZFC の無矛盾性を証明できている.

つまり……

ZFC+SI $\vdash$ (⌜ZFC⌝ の集合モデルが存在する $\wedge$ Con(⌜ZFC⌝))

SI は ZFC で証明できない.
(もし証明できるなら ZFC+SI は ZFC と同値になって
不完全性定理に反する.)

無矛盾性の議論 - 1

しかし, 強到達不能基数が存在すること（SI）
を仮定した議論で ZFC の集合モデルを構成できる.

κ : 強到達不能基数
$V(\kappa) = \{x : \mathrm{rank}(x) < \kappa\}$ は ZFC の集合モデル.
$\rightarrow$ZFC の無矛盾性を証明できている.

つまり……

ZFC+SI $\vdash$ (「ZFC」の集合モデルが存在する $\wedge$ Con(「ZFC」))

SI は ZFC で証明できない.
(もし証明できるなら ZFC+SI は ZFC と同値になって
不完全性定理に反する.)

無矛盾性の議論 - 2

実際にはより強い結果として……

Con(ZFC) を仮定しても Con(ZFC+SI) は証明できない．
Con(ZFC+SI) は Con(ZFC) より真に強い主張となる．

もし Con(ZFC) を仮定して Con(ZFC+SI) が証明できるのならそのことを ZFC+SI の中で形式化することで，

$$\mathrm{ZFC{+}SI} \vdash \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner) \longrightarrow \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC{+}SI} \urcorner)$$

という形にできる．実際に ZFC+SI $\vdash$ Con(⌜ZFC⌝) なので，

$$\mathrm{ZFC{+}SI} \vdash \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC{+}SI} \urcorner)$$

となってしまい不完全性定理に反する．

無矛盾性の議論 - 2

実際にはより強い結果として……

Con(ZFC) を仮定しても Con(ZFC+SI) は証明できない.
Con(ZFC+SI) は Con(ZFC) より真に強い主張となる.

もし Con(ZFC) を仮定して Con(ZFC+SI) が証明できるのならそのことを ZFC+SI の中で形式化することで,

$$\mathrm{ZFC{+}SI} \vdash \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner) \longrightarrow \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC{+}SI} \urcorner)$$

という形にできる. 実際に ZFC+SI $\vdash$ Con(⌜ZFC⌝) なので,

$$\mathrm{ZFC{+}SI} \vdash \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC{+}SI} \urcorner)$$

となってしまい不完全性定理に反する.

部分モデル

$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$：同じ語彙の同じ理論のモデル
M, N：台（構造を無視した単純な集合），$M \subset N$.

部分モデル

$\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{N}$ の**部分モデル**であるとは
各非論理記号の $\mathfrak{M}$ での解釈が
$\mathfrak{N}$ の解釈を M に制限したものに一致すること

$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ で表す.
n 項述語記号 P については $P^{\mathfrak{M}} = P^{\mathfrak{N}} \cap M^n$ であり,
n 項関数記号 f と $a_1, \ldots, a_n \in M$ については
$f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{N}}(a_1, \ldots, a_n)$ となること.

部分モデル

$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$：同じ語彙の同じ理論のモデル
M, N：台（構造を無視した単純な集合），$M \subset N$.

部分モデル

$\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{N}$ の部分モデルであるとは
各非論理記号の $\mathfrak{M}$ での解釈が
$\mathfrak{N}$ の解釈を M に制限したものに一致すること

$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ で表す.
n 項述語記号 P については $P^{\mathfrak{M}} = P^{\mathfrak{N}} \cap M^n$ であり,
n 項関数記号 f と $a_1, \ldots, a_n \in M$ については
$f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{N}}(a_1, \ldots, a_n)$ となること.

初等部分モデル

$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$: モデル, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$

初等部分モデル

$\mathfrak{M}$ の元全てを定数として許容した任意の閉論理式 φ について，その真偽が $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ で一致しているとき，$\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{N}$ の初等部分モデルであると言う

$\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ で表す．

おおざっぱに言えば，
同じ文が成り立つ部分モデルということ．

部分モデルと初等部分モデルの違い

部分モデルと初等部分モデルの違いの例：
語彙：2 項関係 $<$ のみ
$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$：空な公理系のモデル
$M = \{0\}$, $N = \{0, 1\}$：台
$0, 1, <$ の解釈：普通の自然数論での解釈と同じ

$<^{\mathfrak{M}} = \emptyset$, $<^{\mathfrak{N}} = \{\langle 0, 1\rangle\}$.
$1 \notin M$ なので $<^{\mathfrak{N}} \cap M^2 = \emptyset = <^{\mathfrak{M}}$. よって$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

一方で, $\mathfrak{N} \models \exists x \exists y (x < y)$ だが $\mathfrak{M} \not\models \exists x \exists y (x < y)$
よって$\mathfrak{M} \not\prec \mathfrak{N}$.

量化子のスコープの変化が文の真偽に影響する

部分モデルと初等部分モデルの違い

部分モデルと初等部分モデルの違いの例：
語彙：2 項関係 $<$ のみ
$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$：空な公理系のモデル
$M = \{0\}$, $N = \{0, 1\}$：台
$0, 1, <$ の解釈：普通の自然数論での解釈と同じ

$<^{\mathfrak{M}} = \emptyset$, $<^{\mathfrak{N}} = \{\langle 0, 1\rangle\}$.
$1 \notin M$ なので $<^{\mathfrak{N}} \cap M^2 = \emptyset = <^{\mathfrak{M}}$. よって $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

一方で, $\mathfrak{N} \models \exists x \exists y (x < y)$ だが $\mathfrak{M} \not\models \exists x \exists y (x < y)$
よって $\mathfrak{M} \not\prec \mathfrak{N}$.

量化子のスコープの変化が文の真偽に影響する

部分モデルと初等部分モデルの違い

部分モデルと初等部分モデルの違いの例：
語彙：2 項関係 $<$ のみ
$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$：空な公理系のモデル
$M = \{0\}$, $N = \{0, 1\}$：台
$0, 1, <$ の解釈：普通の自然数論での解釈と同じ

$<^{\mathfrak{M}} = \emptyset$, $<^{\mathfrak{N}} = \{\langle 0, 1\rangle\}$.
$1 \notin M$ なので $<^{\mathfrak{N}} \cap M^2 = \emptyset = <^{\mathfrak{M}}$. よって $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

一方で, $\mathfrak{N} \models \exists x \exists y(x < y)$ だが $\mathfrak{M} \not\models \exists x \exists y(x < y)$
よって $\mathfrak{M} \not\prec \mathfrak{N}$.

量化子のスコープの変化が文の真偽に影響する

部分モデルと初等部分モデルの違い

部分モデルと初等部分モデルの違いの例：
語彙：2 項関係 $<$ のみ
$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$：空な公理系のモデル
$M = \{0\}$, $N = \{0, 1\}$：台
$0, 1, <$ の解釈：普通の自然数論での解釈と同じ

$<^{\mathfrak{M}} = \emptyset$, $<^{\mathfrak{N}} = \{\langle 0, 1\rangle\}$.
$1 \notin M$ なので $<^{\mathfrak{N}} \cap M^2 = \emptyset = <^{\mathfrak{M}}$. よって$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

一方で, $\mathfrak{N} \models \exists x \exists y (x < y)$ だが $\mathfrak{M} \not\models \exists x \exists y (x < y)$
よって$\mathfrak{M} \not\prec \mathfrak{N}$.

量化子のスコープの変化が文の真偽に影響する

上向きレーヴェンハイム-スコーレムの定理

レーヴェンハイム-スコーレムの定理は ZFC の定理,
選択公理が必要.

上向きレーヴェンハイム-スコーレムの定理

語彙 $\mathcal{L}$ で書かれた理論 T のモデル $\mathfrak{M}$ で濃度 ω 以上のものがあったとする.
このとき, $\max(|\mathcal{L}|, \omega)$ 以上の任意の基数 κ について, 濃度が κ の $\mathfrak{M}$ の初等拡大モデルを構成できる.

つまり, 好きなだけでかいモデルを作れる.

下向きレーヴェンハイム-スコーレムの定理

下向きレーヴェンハイム-スコーレムの定理

語彙 $\mathcal{L}$ で書かれた理論 T のモデル $\mathfrak{N}$ で濃度 ω 以上のものがあったとする. $\mathfrak{N}$ の台を N とする.
このとき, 任意の $X \subset N$ について, $\mathfrak{N}$ の初等部分モデル $\mathfrak{M}$ を次を満たすように構成できる:

- $X \subset M$ (M は $\mathfrak{M}$ の台)
- $|M| \leq \max(|\mathcal{L}|, \omega, |X|)$

この定理のすごいところ

理論の内容に関わらず好きな部分集合を核に
十分に小さい無限モデルを自由に作れる.

今回使いたいのも下向きの定理のみ.

下向きレーヴェンハイム-スコーレムの定理

下向きレーヴェンハイム-スコーレムの定理

語彙 $\mathcal{L}$ で書かれた理論 T のモデル $\mathfrak{N}$ で濃度 ω 以上のものがあったとする. $\mathfrak{N}$ の台を N とする.
このとき, 任意の $X \subset N$ について, $\mathfrak{N}$ の初等部分モデル $\mathfrak{M}$ を次を満たすように構成できる:

- $X \subset M$ (M は $\mathfrak{M}$ の台)
- $|M| \leq \max(|\mathcal{L}|, \omega, |X|)$

この定理のすごいところ

理論の内容に関わらず好きな部分集合を核に
十分に小さい無限モデルを自由に作れる.

今回使いたいのも下向きの定理のみ.

下向き定理の証明 - 1

注意：選択公理を用いるので基数計算はできる.
X がそもそも $\mathfrak{M}$ の初等部分モデルであれば終了

タルスキ-ヴォートの判定条件

次のことが同値：

- X が $\mathfrak{M}$ の初等部分モデルである
- X の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{M}$ では成立するはずのものについて，その存在証拠が X にある.

問題点：X が後者の条件を満たす保証がない.

そこで，X をうまく拡大してタルスキ-ヴォート条件をクリアするようにできればよい.

下向き定理の証明 - 1

注意：選択公理を用いるので基数計算はできる.
X がそもそも $\mathfrak{N}$ の初等部分モデルであれば終了

タルスキ-ヴォートの判定条件

次のことが同値：

- X が $\mathfrak{N}$ の初等部分モデルである
- X の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{N}$ では成立するはずのものについて，その存在証拠が X にある.

問題点：X が後者の条件を満たす保証がない.

そこで，X をうまく拡大してタルスキ-ヴォート条件をクリアするようにできればよい.

下向き定理の証明 - 1

注意：選択公理を用いるので基数計算はできる.
X がそもそも $\mathfrak{M}$ の初等部分モデルであれば終了

タルスキ-ヴォートの判定条件

次のことが同値：

- X が $\mathfrak{M}$ の初等部分モデルである
- X の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{M}$ では成立するはずのものについて, その存在証拠が X にある.

問題点：X が後者の条件を満たす保証がない.

そこで, X をうまく拡大してタルスキ-ヴォート条件をクリアするようにできればよい.

下向き定理の証明 - 2

$\mathcal{L}$ で考えられる自由変数が残っている形の存在論理式 φ 全てを考える. $\varphi(\vec{y}) = \exists x \psi(x, \vec{y})$

φ に対するスコーレム関数

自由変数に $\mathfrak{N}$ の元を代入したときにもし $\mathfrak{N}$ においてその式が真になるならその存在証拠を返す関数

(N を選択公理で整列しておけば定義可能.)

$\max(|\mathcal{L}|, \omega, |X|) = \lambda$ とおく.
X の元をパラメータに利用した上で語彙 $\mathcal{L}$ で考え得る存在論理式全て：高々 λ 本
用意していたスコーレム関数を用いて, λ 個の存在論理式について（成立するものについては）その存在証拠を得られる, それらを X に追加してそれを X_1 とする. $|X_1| \leq \lambda$.

下向き定理の証明 - 2

$\mathcal{L}$ で考えられる自由変数が残っている形の
存在論理式 φ 全てを考える. $\varphi(\vec{y}) = \exists x \psi(x, \vec{y})$

φ に対するスコーレム関数

自由変数に $\mathfrak{N}$ の元を代入したときにもし $\mathfrak{N}$ においてその式が真になるならその存在証拠を返す関数

(N を選択公理で整列しておけば定義可能.)

$\max(|\mathcal{L}|, \omega, |X|) = \lambda$ とおく.
X の元をパラメータに利用した上で
語彙 $\mathcal{L}$ で考え得る存在論理式全て：高々 λ 本
用意していたスコーレム関数を用いて, λ 個の存在論理式について（成立するものについては）その存在証拠を得られる, それらを X に追加してそれを X_1 とする. $|X_1| \leq \lambda$.

下向き定理の証明 - 2

$\mathcal{L}$ で考えられる自由変数が残っている形の
存在論理式 φ 全てを考える. $\varphi(\vec{y}) = \exists x \psi(x, \vec{y})$

φ に対するスコーレム関数

自由変数に $\mathfrak{N}$ の元を代入したときにもし $\mathfrak{N}$ においてその式が真になるならその存在証拠を返す関数

(N を選択公理で整列しておけば定義可能.)

$\max(|\mathcal{L}|, \omega, |X|) = \lambda$ とおく.
X の元をパラメータに利用した上で
語彙 $\mathcal{L}$ で考え得る存在論理式全て：高々 λ 本
用意していたスコーレム関数を用いて, λ 個の存在論理式について（成立するものについては）その存在証拠を得られる, それらを X に追加してそれを X_1 とする. $|X_1| \le \lambda$.

下向き定理の証明 - 2

$\mathcal{L}$ で考えられる自由変数が残っている形の
存在論理式 φ 全てを考える. $\varphi(\vec{y}) = \exists x \psi(x, \vec{y})$

φ に対するスコーレム関数

自由変数に $\mathfrak{N}$ の元を代入したときにもし $\mathfrak{N}$ においてその式が真になるならその存在証拠を返す関数

(N を選択公理で整列しておけば定義可能.)

$\max(|\mathcal{L}|, \omega, |X|) = \lambda$ とおく.
X の元をパラメータに利用した上で
語彙 $\mathcal{L}$ で考え得る存在論理式全て：高々 λ 本
用意していたスコーレム関数を用いて, λ 個の存在論理式について（成立するものについては）その存在証拠を得られる, それらを X に追加してそれを X_1 とする. $|X_1| \leq \lambda$.

下向き定理の証明 - 3

成り立つこと

- X の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{M}$ では成立するはずのものについて，その存在証拠が X_1 にある．

X_1 がタルスキ-ヴォート条件を満たすとは限らない．

作りたい状況

- X_1 の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{M}$ では成立するはずのものについて，その存在証拠が X_1 にある．

アイデア

$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$ と同様の構成を用いて拡大していく

下向き定理の証明 - 3

成り立つこと

- X の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{N}$ では成立するはずのものについて，その存在証拠が X_1 にある．

X_1 がタルスキ-ヴォート条件を満たすとは限らない．

作りたい状況

- X_1 の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{N}$ では成立するはずのものについて，その存在証拠が X_1 にある．

アイデア

$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$ と同様の構成を用いて拡大していく

下向き定理の証明 - 3

成り立つこと

- X の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{N}$ では成立するはずのものについて，その存在証拠が X_1 にある．

X_1 がタルスキ-ヴォート条件を満たすとは限らない．

作りたい状況

- X_1 の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{N}$ では成立するはずのものについて，その存在証拠が X_1 にある．

アイデア

$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$ と同様の構成を用いて拡大していく

下向き定理の証明 - 4

危惧されること

$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$ のいずれも
タルスキ-ヴォートの条件を満たさない可能性はある.

しかし……

$M = \bigcup_{n \in \omega} X_n$ と定めると
これがタルスキ-ヴォートの条件を満たし, $|M| = \lambda$.
(M は帰納法で定義できる正当なものである.)

下向き定理の証明 - 4

危惧されること

$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$ のいずれも
タルスキ-ヴォートの条件を満たさない可能性はある.

しかし……

$M = \bigcup_{n \in \omega} X_n$ と定めると
これがタルスキ-ヴォートの条件を満たし, $|M| = \lambda$.
(M は帰納法で定義できる正当なものである.)

下向き定理の証明 - 5

タルスキ-ヴォート条件を満たすことの解説

$\bigcup_{n\in\omega} X_n$ の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{N}$ では成立するはずのものについて，その論理式は有限の長さなので使用されるパラメータは実際には全てある X_n に属する．存在論理式の成立証拠は $X_{n+1} \subset M$ に必ずある．

$\mathfrak{M}$: M に $\mathfrak{N}$ から自然に定まるモデル構造を導入したもの
この $\mathfrak{M}$ を X のスコーレム閉包とよぶ．$\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

重要なアイデア

関数を考え，集合の拡大列を作って和をとって
その関数の閉包を生成する

下向き定理の証明 - 5

タルスキ-ヴォート条件を満たすことの解説

$\bigcup_{n\in\omega} X_n$ の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{N}$ では成立するはずのものについて，その論理式は有限の長さなので使用されるパラメータは実際には全てある X_n に属する．存在論理式の成立証拠は $X_{n+1} \subset M$ に必ずある．

$\mathfrak{M}$: M に $\mathfrak{N}$ から自然に定まるモデル構造を導入したもの

この $\mathfrak{M}$ を X のスコーレム閉包とよぶ．$\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

重要なアイデア

関数を考え，集合の拡大列を作って和をとって
その関数の閉包を生成する

下向き定理の証明 - 5

タルスキ-ヴォート条件を満たすことの解説

$\bigcup_{n\in\omega} X_n$ の元をパラメータとした存在論理式で $\mathfrak{N}$ では成立するはずのものについて，その論理式は有限の長さなので使用されるパラメータは実際には全てある X_n に属する．存在論理式の成立証拠は $X_{n+1} \subset M$ に必ずある．

$\mathfrak{M}$: M に $\mathfrak{N}$ から自然に定まるモデル構造を導入したもの
この $\mathfrak{M}$ を X のスコーレム閉包とよぶ. $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

重要なアイデア

関数を考え，集合の拡大列を作って和をとって
その関数の閉包を生成する

定理の応用について

レーヴェンハイム-スコーレムの定理はモデル理論の定理
↓
非常に限定的なものに見える.

しかし実際は……
モデルという概念は良く知られた公理系や語彙だけではなく, 自由に定めた公理系や語彙に対しても考えられる.
↓
アイデア次第で応用の幅は非常に広いはず.

ここからは集合論における実例を紹介する.
引き続き ZFC で議論する.

定理の応用について

レーヴェンハイム-スコーレムの定理はモデル理論の定理
↓
非常に限定的なものに見える.

しかし実際は……
モデルという概念は良く知られた公理系や語彙だけではなく, 自由に定めた公理系や語彙に対しても考えられる.
↓
アイデア次第で応用の幅は非常に広いはず.

ここからは集合論における実例を紹介する.
引き続き ZFC で議論する.

集合論における準備 - 1

poset

集合 $\mathbb{P}$ とその上に定められた 2 項関係 $\leq_{\mathbb{P}}$ の組 $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}} \rangle$ が poset であるとは, $\leq_{\mathbb{P}}$ が擬順序を定めていること.
すなわち,

- $\forall a \in \mathbb{P}(a \leq_{\mathbb{P}} a)$（反射律）
- $\forall a, b, c \in \mathbb{P}(a \leq_{\mathbb{P}} b \wedge b \leq_{\mathbb{P}} c \longrightarrow a \leq_{\mathbb{P}} c)$（推移律）

が成り立つこと.

$\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}} \rangle$ のことを単純に $\mathbb{P}$ で書くことが多い.
順序が $\mathbb{P}$ の順序であることが明らかなときは $\leq$ で表す.

集合論における準備 - 2

以降, $\mathbb{P}$ は poset とする.

compatibility

$a, b \in \mathbb{P}$ が compatible であるとは

- $\exists r \in \mathbb{P}(r \leq a \wedge r \leq b)$

となることであり,
そうでないとき incompatible といい $a \perp b$ で表す.

antichain

$A \subset \mathbb{P}$ が antichain であるとは,

- $\forall a, b \in A(a \neq b \longrightarrow a \perp b)$

となること.

集合論における準備 - 3

ccc

$\mathbb{P}$ が countable chain condition (ccc) を満たすとは,
任意の antichain の濃度が高々可算であること.

非自明な ccc poset の最も有名な例：$\langle {}^{<\omega}2, \supset \rangle$
(有限二進列全体に包含関係の逆順序を導入した構造)

dense set

$D \subset \mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ の dense set であるとは,

- $\forall a \in \mathbb{P} \exists b \in D (b \leq a)$

が成り立つことである.

集合論における準備 - 4

filter

$G \subset \mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ の filter であるとは,

- $\forall p, q \in G \exists r \in G (r \leq p \wedge r \leq q)$（下向き directed）
- $\forall p \in G \forall q \in \mathbb{P} (p \leq q \longrightarrow q \in G)$（上向き closed）

が成り立つことである.

genericity

集合族 $\mathcal{D}$ の元が全て $\mathbb{P}$ の dense set であるとする.
$\mathbb{P}$ の filter G が $\mathcal{D}$-generic であるとは,

- $\forall D \in \mathcal{D} (G \cap D \neq \emptyset)$

となること.

集合論における準備 - 5

一般に, $\mathbb{P}$ が "一定以上複雑" な形をしていて $\mathcal{D}$ のサイズが大きい場合, $\mathcal{D}$-generic な filter は存在しえない.

いわゆる強制法とは……

そのような存在しえない対象を付加しながらも
基準となるモデルと異なりすぎない新しいモデル
を考えるという手法

問題意識

generic filter が存在しなくなるような $\mathbb{P}$ と $\mathcal{D}$ の選び方は ZFC から完全に決定できるのか?

現在では, これは ZFC で決定不能と知られている.
Martin's Axiom はそのような「強制公理」の一つ.

集合論における準備 - 5

一般に, $\mathbb{P}$ が "一定以上複雑" な形をしていて $\mathcal{D}$ のサイズが大きい場合, $\mathcal{D}$-generic な filter は存在しえない.

いわゆる強制法とは……

そのような存在しえない対象を付加しながらも
基準となるモデルと異なりすぎない新しいモデル
を考えるという手法

問題意識

generic filter が存在しなくなるような $\mathbb{P}$ と $\mathcal{D}$ の選び方は ZFC から完全に決定できるのか?

現在では, これは ZFC で決定不能と知られている.
Martin's Axiom はそのような「強制公理」の一つ.

Martin's Axiom - 1

Martin's Axiom

Martin's Axiom (MA) とは次の命題である:
$\mathbb{P}$ が ccc poset であるとする. $\lambda < 2^\omega$ とする.
$\mathcal{D} = \langle D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ を $\mathbb{P}$ の dense set からなる列とする.
このとき, $\mathbb{P}$ の filter で $\mathcal{D}$-generic なものがとれる.

MA*

MA* とは次の命題である:
$\mathbb{P}$ が ccc poset かつ $|\mathbb{P}| < 2^\omega$ とする. $\lambda < 2^\omega$ とする.
$\mathcal{D} = \langle D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ を $\mathbb{P}$ の dense set からなる列とする.
このとき, $\mathbb{P}$ の filter で $\mathcal{D}$-generic なものがとれる.

Martin's Axiom - 1

Martin's Axiom

Martin's Axiom (MA) とは次の命題である:
$\mathbb{P}$ が ccc poset であるとする. $\lambda < 2^\omega$ とする.
$\mathcal{D} = \langle D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ を $\mathbb{P}$ の dense set からなる列とする.
このとき, $\mathbb{P}$ の filter で $\mathcal{D}$-generic なものがとれる.

MA*

MA* とは次の命題である:
$\mathbb{P}$ が ccc poset かつ $|\mathbb{P}| < 2^\omega$ とする. $\lambda < 2^\omega$ とする.
$\mathcal{D} = \langle D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ を $\mathbb{P}$ の dense set からなる列とする.
このとき, $\mathbb{P}$ の filter で $\mathcal{D}$-generic なものがとれる.

Martin's Axiom - 2

当然 MA$\longrightarrow$MA* が成立する.

驚くべきことに, 実はMA と MA* は同値である.

この主張のすごいところ

無数に存在するはずの ccc poset 全てについて調べずとも,
サイズの小さい ccc poset についてのみ調べれば
MA の正否が分かる.

証明の概略

$\mathbb{P}$ がどれだけ大きかろうがうまい初等部分モデルをとることができて, そこでの MA* の判定が元の $\mathbb{P}$ へ伝わる.

Martin's Axiom - 2

当然 MA$\longrightarrow$MA* が成立する.

驚くべきことに, 実はMA と MA* は同値である.

この主張のすごいところ

無数に存在するはずの ccc poset 全てについて調べずとも, サイズの小さい ccc poset についてのみ調べれば MA の正否が分かる.

証明の概略

$\mathbb{P}$ がどれだけ大きかろうがうまい初等部分モデルをとることができて, そこでの MA* の判定が元の $\mathbb{P}$ へ伝わる.

Martin's Axiom - 2

当然 MA$\longrightarrow$MA* が成立する.

驚くべきことに, 実はMA と MA* は同値である.

この主張のすごいところ

無数に存在するはずの ccc poset 全てについて調べずとも, サイズの小さい ccc poset についてのみ調べれば MA の正否が分かる.

証明の概略

$\mathbb{P}$ がどれだけ大きかろうがうまい初等部分モデルをとることができて, そこでの MA* の判定が元の $\mathbb{P}$ へ伝わる.

Martin's Axiom - 2

当然 MA$\longrightarrow$MA* が成立する.

驚くべきことに, 実はMA と MA* は同値である.

この主張のすごいところ

無数に存在するはずの ccc poset 全てについて調べずとも, サイズの小さい ccc poset についてのみ調べれば MA の正否が分かる.

証明の概略

$\mathbb{P}$ がどれだけ大きかろうがうまい初等部分モデルをとることができて, そこでの MA* の判定が元の $\mathbb{P}$ へ伝わる.

MA$^* \longrightarrow$ MA の証明 - 1

MA* を仮定する. $\mathbb{P}$ を ccc poset とする. $\lambda < 2^\omega$ とする.
$\mathcal{D} = \langle D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ を $\mathbb{P}$ の dense set からなる列とする.
目標：$\mathcal{D}$-generic filter を見つけること.

$\lambda < \omega_1 \rightarrow$ そもそも ZFC の定理で generic filter が取れる.
$\omega_1 \leq \lambda$ の場合のみ考えればよい.

MA* が利用できない $\mathbb{P}$ についてのみ問題なので
$|\mathbb{P}| \geq 2^\omega$ のもののみ考えればよい.

MA* $\longrightarrow$ MA の証明 - 1

MA* を仮定する. $\mathbb{P}$ を ccc poset とする. $\lambda < 2^\omega$ とする.
$\mathcal{D} = \langle D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ を $\mathbb{P}$ の dense set からなる列とする.
目標：$\mathcal{D}$-generic filter を見つけること.

$\lambda < \omega_1 \rightarrow$ そもそも ZFC の定理で generic filter が取れる.
$\omega_1 \leq \lambda$ の場合のみ考えればよい.

MA* が利用できない $\mathbb{P}$ についてのみ問題なので
$|\mathbb{P}| \geq 2^\omega$ のもののみ考えれえばよい.

$\mathrm{MA}^* \longrightarrow \mathrm{MA}$ の証明 - 2

このとき, $\mathbb{P}$ に関して成立する文に着目する.
$\mathbb{P}$：台
$\leq \in \mathcal{P}_2$：順序を表す
各 $\alpha < \lambda$ に対する $D'_\alpha \in \mathcal{P}_1$：部分集合を表す
に関して次の文が成立している.

- 議論領域全体が $\leq$ に関して poset であること.
  すなわち, $\forall a(a \leq a)$（反射律）と
  $\forall a, b, c(a \leq b \wedge b \leq c \longrightarrow a \leq c)$（推移律）.
- $\forall p \exists q(D'_\alpha(q) \wedge q \leq p)$.（稠密性）
  $(D'_\alpha(q)$ は単に $q \in D'_\alpha$ と解釈される想定.)

$\langle \mathbb{P}; \leq^{\mathbb{P}} = \leq_{\mathbb{P}}, \langle D'^{\mathbb{P}}_\alpha = D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle \rangle$ は上記の文全てのモデル.

$\mathrm{MA}^* \longrightarrow \mathrm{MA}$ の証明 - 2

このとき, $\mathbb{P}$ に関して成立する文に着目する.
$\mathbb{P}$: 台
$\leq \in \mathcal{P}_2$: 順序を表す
各 $\alpha < \lambda$ に対する $D'_\alpha \in \mathcal{P}_1$: 部分集合を表す
に関して次の文が成立している.

- 議論領域全体が $\leq$ に関して poset であること.
すなわち, $\forall a(a \leq a)$ (反射律) と
$\forall a, b, c(a \leq b \wedge b \leq c \longrightarrow a \leq c)$ (推移律) .
- $\forall p \exists q(D'_\alpha(q) \wedge q \leq p)$. (稠密性)
($D'_\alpha(q)$ は単に $q \in D'_\alpha$ と解釈される想定.)

$\langle \mathbb{P}; \leq^{\mathbb{P}} = \leq_{\mathbb{P}}, \langle {D'_\alpha}^{\mathbb{P}} = D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle \rangle$ は上記の文全てのモデル.

MA* $\longrightarrow$ MA の証明 - 3

ここで, 下向きレーヴェンハイム-スコーレムの定理により, $\mathbb{Q} \prec \mathbb{P}$ を $|\mathbb{Q}| = \lambda$ であるように取れる.
先ほど挙げた文を $\mathbb{Q}$ で解釈すると次のことが成立する:

- $\mathbb{Q}$ は $\leq_{\mathbb{Q}}$ に関して poset である.
- 各 $\alpha < \lambda$ に対して,
  $\forall p \in \mathbb{Q} \exists q \in \mathbb{Q}(q \in D_\alpha \cap \mathbb{Q} \wedge q \leq_{\mathbb{Q}} p)$.
  つまり各 $D_\alpha \cap \mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ の dense set.

部分モデルの定義から, $\leq_{\mathbb{Q}}$ は $\leq_{\mathbb{P}} \cap \mathbb{Q}^2$ のことである.

方針

$\mathbb{Q}$ に MA* を適用できることを確かめる.

$\mathrm{MA}^* \longrightarrow \mathrm{MA}$ の証明 - 4

次に, $\mathbb{Q}$ が ccc を満たすことを確かめる.
$\mathbb{Q}$ が ccc を満たさないと仮定する.
$\langle q_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle \subset \mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ の antichain であるように取れる.
$\langle q_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle \subset \mathbb{P}$ ではあって $\mathbb{P}$ は ccc を満たすので,
これは $\mathbb{P}$ においては antichain ではないことになる.
すなわち, $\alpha < \beta < \omega_1$ を $\exists r \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{Q}(r \leq q_\alpha \wedge r \leq q_\beta)$ が
成り立つように取れる.

2 変数述語 $\varphi(x, y)$ を $\exists r(r \leq x \wedge r \leq y)$ で定義する.
$\mathbb{P} \models \varphi(q_\alpha, q_\beta)$ である.
しかし, $\mathbb{Q} \prec \mathbb{P}$ かつ $q_\alpha, q_\beta \in \mathbb{Q}$であるので,
$\mathbb{Q} \models \varphi(q_\alpha, q_\beta)$となるはず.
$\langle q_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle \subset \mathbb{Q}$ が $\mathbb{Q}$ の antichain であることに反する.
これで $\mathbb{Q}$ が ccc poset であることが分かった.

MA$^* \longrightarrow$ MA の証明 - 4

次に, $\mathbb{Q}$ が ccc を満たすことを確かめる.
$\mathbb{Q}$ が ccc を満たさないと仮定する.
$\langle q_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle \subset \mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ の antichain であるように取れる.
$\langle q_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle \subset \mathbb{P}$ ではあって $\mathbb{P}$ は ccc を満たすので,
これは $\mathbb{P}$ においては antichain ではないことになる.
すなわち, $\alpha < \beta < \omega_1$ を $\exists r \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{Q}(r \leq q_\alpha \wedge r \leq q_\beta)$ が
成り立つように取れる.

2 変数述語 $\varphi(x, y)$ を $\exists r(r \leq x \wedge r \leq y)$ で定義する.
$\mathbb{P} \models \varphi(q_\alpha, q_\beta)$ である.
しかし, $\mathbb{Q} \prec \mathbb{P}$ かつ $q_\alpha, q_\beta \in \mathbb{Q}$であるので,
$\mathbb{Q} \models \varphi(q_\alpha, q_\beta)$となるはず.
$\langle q_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle \subset \mathbb{Q}$ が $\mathbb{Q}$ の antichain であることに反する.
これで $\mathbb{Q}$ が ccc poset であることが分かった.

$\mathrm{MA}^* \longrightarrow \mathrm{MA}$ の証明 - 5

$\mathbb{Q}$ は ccc poset であり, $|\mathbb{Q}| = \lambda < 2^\omega$ である.
MA^* を適用し, $\mathbb{Q}$ において,
$\langle \mathbb{Q} \cap D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ に関する generic filter G をとる.

$H = \{p \in \mathbb{P} : \exists r \in G(r \leq_{\mathbb{P}} p)\} \subset \mathbb{P}$ と定める.
($G \subset \mathbb{Q}$ を $\mathbb{P}$ でも filter となるように上に閉じさせたもの)
H は $\langle D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ に対する generic filter である.
これが求めるべきものであり, MA は成り立つ.

$\mathrm{MA}^* \longrightarrow \mathrm{MA}$ の証明 - 5

$\mathbb{Q}$ は ccc poset であり, $|\mathbb{Q}| = \lambda < 2^\omega$ である.
MA^* を適用し, $\mathbb{Q}$ において,
$\langle \mathbb{Q} \cap D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ に関する generic filter G をとる.

$H = \{p \in \mathbb{P} : \exists r \in G (r \leq_{\mathbb{P}} p)\} \subset \mathbb{P}$ と定める.
($G \subset \mathbb{Q}$ を $\mathbb{P}$ でも filter となるように上に閉じさせたもの)
H は $\langle D_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ に対する generic filter である.
これが求めるべきものであり, MA は成り立つ.

おわりに - 1

今回応用例として紹介した定理は実際は, “もちろん”
レーヴェンハイム-スコーレムの定理に訴えずに証明可能.

重要なこと

「どうにかして都合の良い関数の閉包を作成する」こと

レーヴェンハイム-スコーレムの定理の立ち位置

「都合の良い関数の選定」を「都合のいいモデルの選定」に置き換えて閉包作成をパッケージ化した

あえて悪しざまに言えば, ただそれだけ.
銀の弾丸のような代物ではないと言えるかもしれない.

おわりに - 1

今回応用例として紹介した定理は実際は, "もちろん"
レーヴェンハイム-スコーレムの定理に訴えずに証明可能.

重要なこと

「どうにかして都合の良い関数の閉包を作成する」こと

レーヴェンハイム-スコーレムの定理の立ち位置

「都合の良い関数の選定」を「都合のいいモデルの選定」に置き換えて閉包作成をパッケージ化した

あえて悪しざまに言えば, ただそれだけ.
銀の弾丸のような代物ではないと言えるかもしれない.

おわりに - 1

今回応用例として紹介した定理は実際は, “もちろん”
レーヴェンハイム-スコーレムの定理に訴えずに証明可能.

重要なこと

「どうにかして都合の良い関数の閉包を作成する」こと

レーヴェンハイム-スコーレムの定理の立ち位置

「都合の良い関数の選定」を「都合のいいモデルの選定」に置き換えて閉包作成をパッケージ化した

あえて悪しざまに言えば, ただそれだけ.
銀の弾丸のような代物ではないと言えるかもしれない.

おわりに - 2

とはいえ, 次のようにポジティブに考えたい.

- 初等部分モデルの理論というフレームワークでいろいろなものを見直すことができる. アイデアが増えることは良いことである.
- モデルの概念が分野を問わず利用できるプリミティブなものである以上, いつでも使える可能性がある.

実際のところ……
集合論においては初等部分モデルの理論によって club set の理論が見直されたり proper forcing の理論が構築されたりと歴史的に重要な役割を演じてきている.

おわりに - 2

とはいえ, 次のようにポジティブに考えたい.

- 初等部分モデルの理論というフレームワークでいろいろなものを見直すことができる. アイデアが増えることは良いことである.
- モデルの概念が分野を問わず利用できるプリミティブなものである以上, いつでも使える可能性がある.

実際のところ……
集合論においては初等部分モデルの理論によって club set の理論が見直されたり proper forcing の理論が構築されたりと歴史的に重要な役割を演じてきている.

つまり……

数学基礎論は専攻問わず興味深い！