バス待ち時間のParadox：

確率論入門

2022/5/1

すうがく徒のつどい@オンライン

本発表について

注意事項

- 専門性少な目
- 厳密さより説明優先
- オリジナルな解釈
- 脱線可能性アリ
- ツッコミ歓迎
- 質問大歓迎

前提知識

- 基本的な数学の表記

$t \in \mathbb{R}, \quad [0, t), \quad N \to \infty$

推奨知識

- 簡単な微分積分
- 簡単な幾何学

自己紹介

- はけん
- Twitter: @haken_math

- 一般企業勤務(ソフトウェア開発)
- 高専では計算量理論、大学では確率論(待ち行列)
- 最近は趣味で論理について研究したりしなかったり

slido

Join at slido.com #tsudoi3haken

ⓘ Start presenting to display the joining instructions on this slide.

本発表のゴール

目標：「バス待ち時間のパラドックス」のどこに問題があるか分かるようになる

ニューゲーム

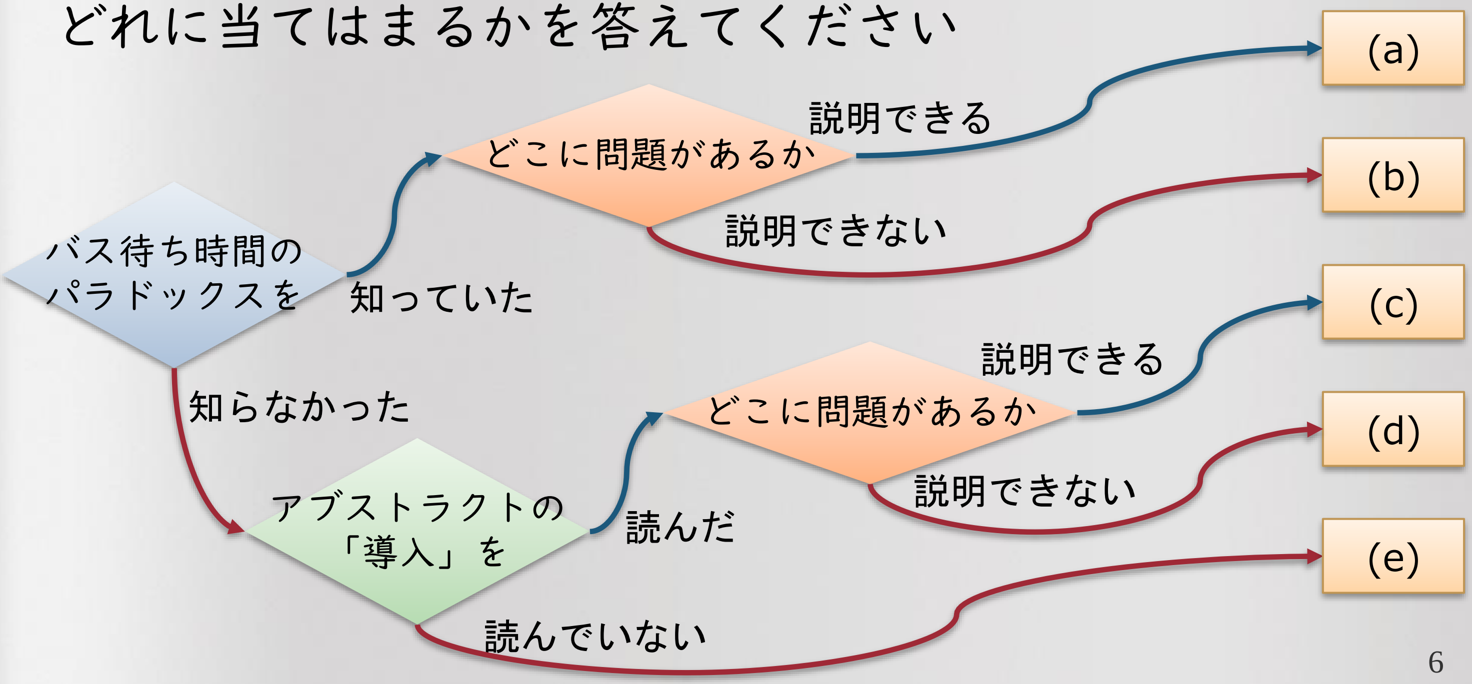
- 確率という概念
- 公理的定義
- 確率過程と特性
- バス待ち時間のパラドックス

つよくてニューゲーム

- 確率論の基本定理
- 確率論の論理

[講義前] アンケート

どれに当てはまるかを答えてください



slido

[講義前] バス待ち時間のパラドックスについて

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

“

確率という概念

確実と偶然

条件$\mathfrak{C}$（ex．サイコロの面がすべて1）

事象E（ex．サイコロで 1の目が出る）

確実な事象とは

- ◆ $\mathfrak{C}$が実現するときはいつでもEが起きる
- ◆ Eに対する十分な条件が$\mathfrak{C}$に含まれている

偶然事象とは

- ◆ $\mathfrak{C}$が実現してもEは起きたり起きなかったりする
- ◆ Eに対して$\mathfrak{C}$に含まれる条件は十分でない

偶然を扱う法則

通常の法則

- Eが起きる必要かつ十分な$\mathfrak{C}$を知りたい
- ex．サイコロの1の目が出る
  - サイコロに1の目があった
  - サイコロを振るディーラーは腕が確かだった
  - 1の目を出す振り方をした

確率法則

- Eが起きる$\mathfrak{C}$の条件を特定しきれない
- $\mathfrak{C}$が繰り返し実現するときのEが起きる割合(傾向)は、Eと$\mathfrak{C}$を関連づける特性値としての役割を担う

確率

条件$\mathfrak{C}$が繰り返し実現するとき、その中で事象Eが起きる≪確からしさ≫を数値で評価したもの

$$\mathbf{P}E = p$$

確率の定義方法

- 主観の≪確信の度合≫で定義
- ≪同程度の可能性≫を議論可能な単純な概念に帰着
- 多数の試行で事象が≪生起する頻度≫から出発
- 事象の集合族とその上の測度の公理を設定

確率の定義例

事象A：（6面体）サイコロで3以上の目が出る

$$\mathbf{P}A = p$$

- **主観的**：先ほど2回連続で2以下の目だった。3回連続は考えづらい。次こそは出るはずだ。確信度p=80%
- **古典的**：6つの各目は同程度に確からしい。3以上の目はその中の4つだから$p = 4/6$
- **統計的**：過去100万回の試行で3以上の目は666672回だった。 $p = 0.666672$

事象の表し方：集合

- 事象の関係
  - $\mathfrak{C}$でAが起きるとき必ずBも起きるならば$A \subset B$
  - $A \subset B$かつ$A \supset B$、ならば、$A = B$
- 特別な事象
  - 全事象Ω：$\mathfrak{C}$で確実に起きる事象
  - 空事象$\emptyset$：$\mathfrak{C}$で起きえない事象
- 事象の演算
  - 積事象$A \cap B$：AとBが同時に起きる事象
  - 和事象$A \cup B$：AとBのどちらか一方が起きる事象
  - 余事象A^c：$A \cup A^c = \Omega$，$A \cap A^c = \emptyset$を満たす事象

事象の表し方の例

条件$\mathfrak{C}$：サイコロを振ったとき

- 事象A：偶数の目が出る
- 事象B：4以上の目が出る
  - $A \cap B$：4または6の目が出る
  - $A \cup B$：2, 4, 5, 6のいずれかの目が出る
  - A^{c}：奇数の目が出る
- Ω：6以下の目が出る
  - $B \subset \Omega$
  - Ω'：1, 2, 3, 4, 5, 6のいずれかの目が出る
- $\emptyset$：πの目が出る

事象の分割と根元事象

事象A,B,Cが以下の関係式を満たす

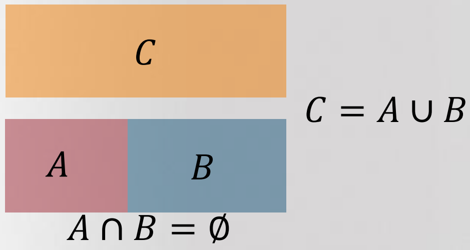
$$C = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset$$

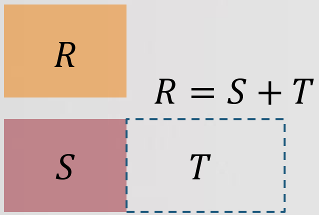
このときA,BはCを分割するといい、次のように書く

$$C = A + B$$

分割できない事象Rを根元事象という。すなわち

$$R = S + T \quad \Rightarrow \quad S = \emptyset \text{または} T = \emptyset$$





確率の古典的定義

任意の$i \in \mathbb{N}$に対し、$\{\omega_i\}$は$\emptyset$でない根元事象を表す

$$\Omega = \{\omega_1\} + \cdots + \{\omega_n\}$$

を満たす組$(\omega_1, \cdots, \omega_n)$が存在するとき、

$E = \left\{\omega_{i_1}\right\} + \cdots + \left\{\omega_{i_m}\right\}$と表される事象に対し

$$\mathbf{P}^{\mathrm{cl}} E = \frac{m}{n}$$

ただし、$1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$

$E = \emptyset$の場合、$m = 0$とする

古典的確率の計算例と限界

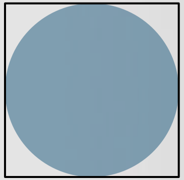
サイコロを振ったとき3以上の目が出る事象A

- $\{\omega_i\}$をiの目が出る事象とすれば、
  - $\Omega = \{\omega_1\} + \{\omega_2\} + \cdots + \{\omega_6\}$
  - $A = \{\omega_3\} + \{\omega_4\} + \{\omega_5\} + \{\omega_6\}$
  - $\mathbf{P}^{\mathrm{cl}} A = 4/6$

ある正方形のマスに無作為に点をつける

内接円内に点が入る事象B

- 根元事象が無数に存在する
- $\mathbf{P}^{\mathrm{cl}} B$を計算できない



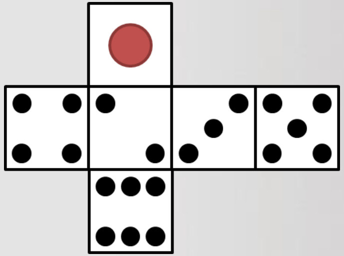
幾何学的確率

事象E：領域Nの無作為に選ばれた点が部分Mに入る

$$\mathbf{P}^{\mathrm{ge}}E = \frac{\mathrm{mes}\, M}{\mathrm{mes}\, N}$$

ここでmes Xは領域Xの(幾何学的)測度を表す

- 事象A：サイコロの3以上の目が出る
  - サイコロのiの目の面の領域M_i
  - $\mathbf{P}^{\mathrm{ge}}A = \frac{\mathrm{mes}\,(M_3+M_4+M_5+M_6)}{\mathrm{mes}\,\sum_{i=1}^{6} M_i} = \frac{4}{6}$



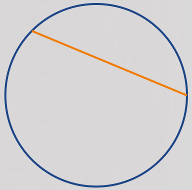
- 事象B：内接円内に点が入る
  - $\mathbf{P}^{\mathrm{ge}}B = \frac{\pi r^2}{2r\times 2r} = \frac{\pi}{4}$

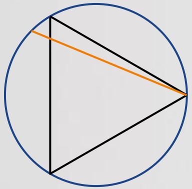
ベルトランの逆説

事象C：円の無作為に描いた弦の長さが、内接正三角形の一辺より長くなる

複数の作図戦略が存在

- 弦の方向をY軸に固定しX軸と交差する点を抽出
- 弦の円との接点を固定し接線からの角度を設定
- 円内の一点を抽出し、その点を弦の中点とする





X軸と交差する点を無作為に抽出

原点中心の単位円を考える

X軸上の点を選んだときに弦を正しく作れる範囲は

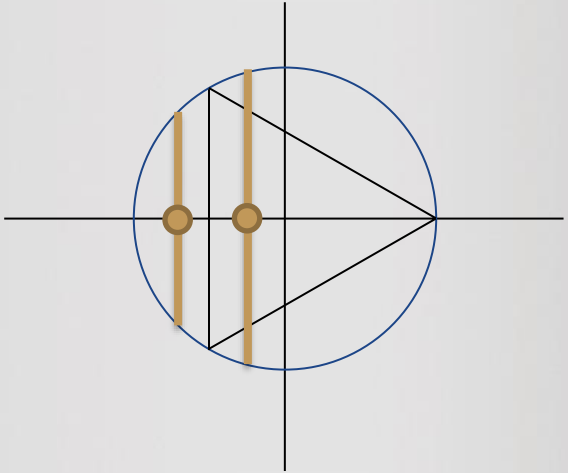
$$(-1, 1)$$

内接正三角形の一辺より弦が長くなる範囲は

$$(-1/2, 1/2)$$

したがって求める確率は

$$\mathbf{P}^{\mathrm{ge}}C = \frac{\mathrm{mes}(-1/2, 1/2)}{\mathrm{mes}(-1, 1)} = \frac{1}{2}$$



接線からの角度を無作為に設定

円とその接線を考える

接線からの角度を選んだときに弦を正しく作れる範囲は

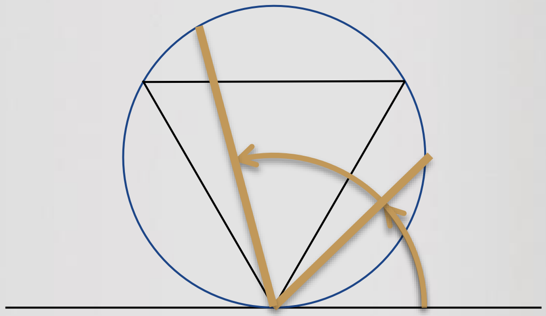
$$(0, \pi)$$

内接正三角形の一辺より弦が長くなる範囲は

$$(\pi/3\,, 2\pi/3)$$

したがって求める確率は

$$\mathbf{P}^{\mathrm{ge}}C = \frac{\mathrm{mes}(\pi/3\,, 2\pi/3)}{\mathrm{mes}(0, \pi)} = \frac{1}{3}$$

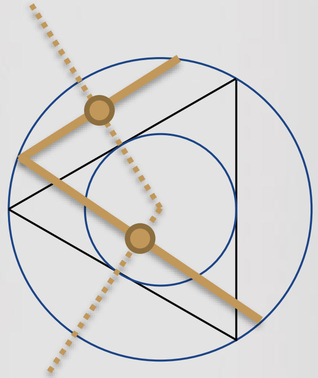


円内の一点を無作為に抽出

半径rの円Nを考える

円内の中心を除く、どの点を選んでも弦を正しく作れる

内接正三角形の一辺より弦が長くなる範囲は半径$r/2$の同心円M内



したがって求める確率は

$$\mathbf{P}^{\mathrm{ge}}C = \frac{\mathrm{mes}\,M}{\mathrm{mes}\,N} = \frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

この章のまとめ

確率の意味

- 条件$\mathfrak{C}$が繰り返し実現するとき、その中で事象Eが起きる≪確からしさ≫を数値で評価したもの

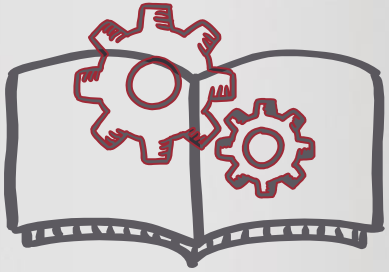
確率の定義

- 主観の≪確信の度合≫で定義
- ≪同程度の可能性≫を議論可能な単純な概念に帰着
- 多数の試行で事象が≪生起する頻度≫から出発

どれも間違いではない($\mathfrak{C}$が分からないだけ)

論理的にはどれも不都合がある

“公理的定義



確率論の公理的定義のアプローチ

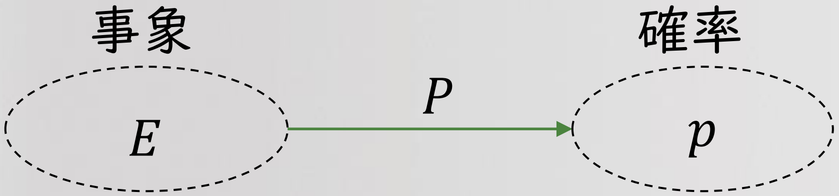
古典的定義

$$\mathbf{P}^{\mathrm{cl}}E = \frac{m}{n}$$

の問題は、≪同程度の可能性≫が前提の分数にある。

公理的定義 ： 確率測度Pを問題のパラメータにする。

- ◆ Pに求められる性質(公理)だけ要請しておく
- ◆ $\mathbf{P}^{\mathrm{ax}}E = P(E)$



確率測度の公理

任意の事象Aに対し

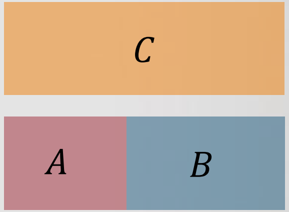
$$P(A) \geq 0$$

任意の事象Aに対し$A \subset \Omega$である事象Ω

$$P(\Omega) = 1$$

$C = A + B$ならば

$$P(C) = P(A) + P(B)$$

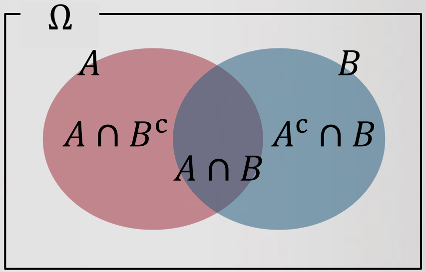


最後は加法性の公理とよぶ。通常以下いずれかを足す

- 完全加法性：$C = \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i$ならば$P(C) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$
- 連続性：$B_1 \supset B_2 \supset \cdots,\quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = \emptyset \Rightarrow \lim_{i \to \infty} P(B_i) = 0$

確率の性質

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
  - $P(\emptyset) = 0$
- $A \subset B$、ならば、$P(A) \leq P(B)$
  - Pの値域は$[0, 1]$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - 以下に加法性の公理を適用して得られる
    - $A \cup B = A \cap B^c + A \cap B + A^c \cap B$
    - $A = A \cap B^c + A \cap B$
    - $B = A \cap B + A^c \cap B$



完全加法族

確率測度Pの定義域$\mathfrak{F}$に対する要請

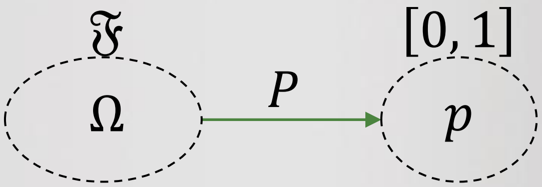
- $\mathfrak{F}$は事象の取りうる範囲
  - 事象には集合に対する関係$\subset$、演算$\cap\cup$を適用できる
  - すなわち$\mathfrak{F}$は集合族
- 要請1：$\Omega\in\mathfrak{F}$かつ$\emptyset\in\mathfrak{F}$
- 要請2：$A\in\mathfrak{F}$かつ$B\in\mathfrak{F}$ならば
  - $A\cap B\in\mathfrak{F}$、$A\cup B\in\mathfrak{F}$、$A^{\mathrm{c}}\in\mathfrak{F}$および$B^{\mathrm{c}}\in\mathfrak{F}$
- 要請3：$A_1, A_2, \cdots, \in\mathfrak{F}$ならば
  - $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\in\mathfrak{F}$かつ$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\in\mathfrak{F}$

要請1～3を満たす$\mathfrak{F}$を完全加法族(σ-集合体)という

確率空間(ここまでのまとめ)

組$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$を確率空間とよぶ

- 全事象の集合Ω
- Ωの完全加法族$\mathfrak{F}$
- $\mathfrak{F}$上の確率測度P



確率の公理的定義は次のように解釈できる

- 事象Eは$\mathfrak{F}$の要素でありΩの部分集合
- 確率測度Pは$\mathfrak{F}$から$[0, 1]$への関数
- 事象Eの確率は関数Pを適用した結果の値

事象の表し方: 確率変数

事象A：サイコロで4以下の目が出る

- サイコロの目をXとし、$A=[X\leq 4]$のように表す
  - Xを確率変数とよぶ

確率変数Xを使った事象

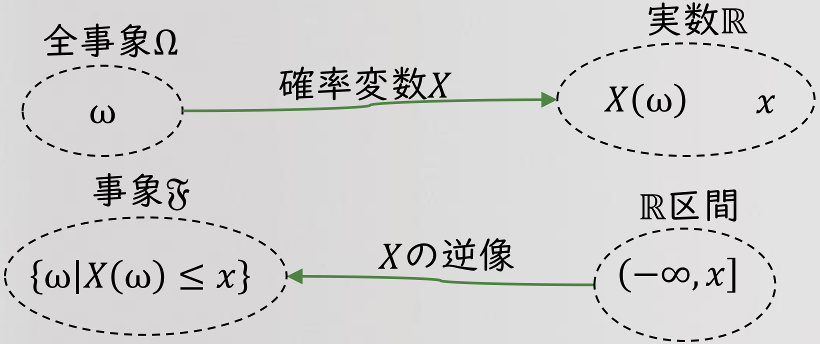
- 5以上の目が出ない
  - $[X\geq 5]^{\mathrm{c}}=[X<5]=[X\leq 4]$
- ちょうど3の目が出る
  - $[X=3]=[X\leq 3]\cap[X\leq 2]^{\mathrm{c}}$
- 奇数の目が出る
  - $[X\in\mathrm{Odd}]=[X=1]+[X=3]+[X=5]$

確率変数の公理化

目標：確率空間$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$上で、$[X \leq 4] \in \mathfrak{F}$とする

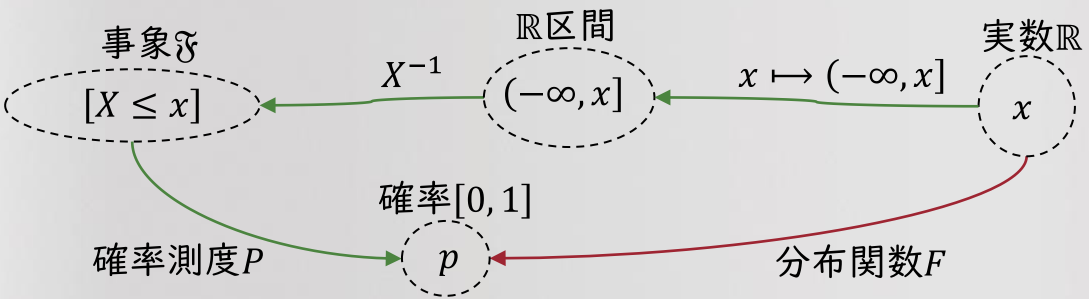
- 方法：Ωの部分集合$\{\omega | X(\omega) \leq 4\}$で表す
  - XはΩから実数$\mathbb{R}$への関数
  - 確率変数$X(\omega)$の要請：任意のxに対し

$$X^{-1}\big((-\infty, x]\big) \in \mathfrak{F}$$



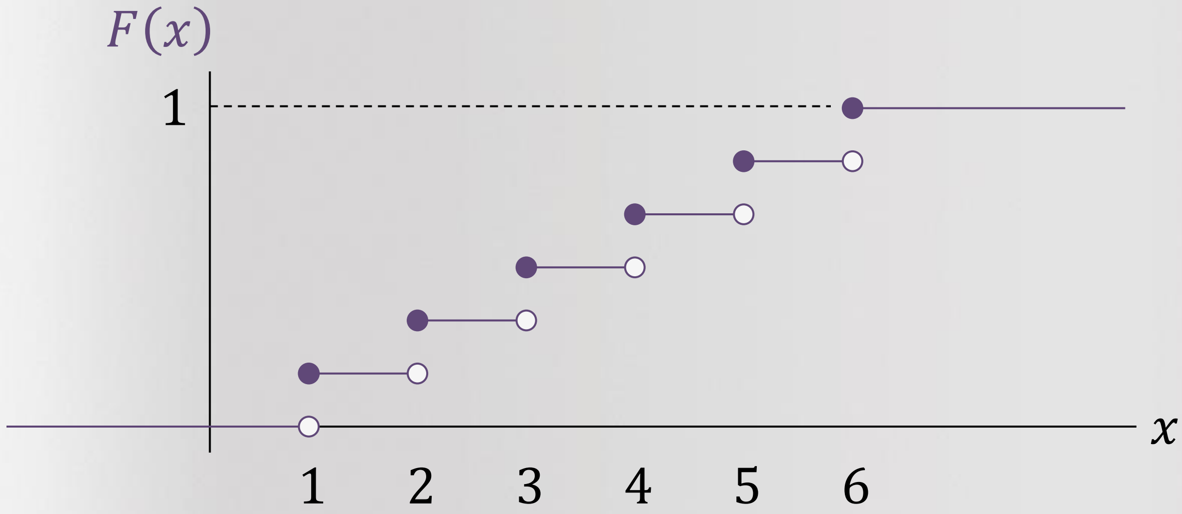
分布関数: 確率変数を使った事象の確率

- 確率測度Pで計算（一般には難しい）
- 任意のxに対する$P([X \leq x])$を組み合わせて計算
  - $F(x) = P([X \leq x])$を、分布関数という
  - ex. サイコロの目Xに対し
    - $P([X \geq 5]) = P([X \leq 4]^c) = 1 - P([X \leq 4]) = 1 - F(4)$
    - $P([X = 3]) = P([X \leq 3]) - P([X \leq 2]) = F(3) - F(2)$



分布関数の例

サイコロの目Xの分布関数$F(x)$



この章のまとめ

確率の公理的定義

- 確率測度Pに求められる性質(公理)だけ要請する
  - $P(A) \geq 0$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(A + B) = P(A) + P(B)$
- 確率変数を使って事象を定義できる
- (乱暴には)確率変数の分布関数があればPは不要
  - $F(x) = P([X \leq x])$
  - 全事象の集合Ωを明に使わない形にできる
    - これは集合Ωに基づく古典的定義との大きな違い

“

確率過程と特性

確率過程

実数$\mathbb{R}$から確率変数への関数を確率過程とよぶ

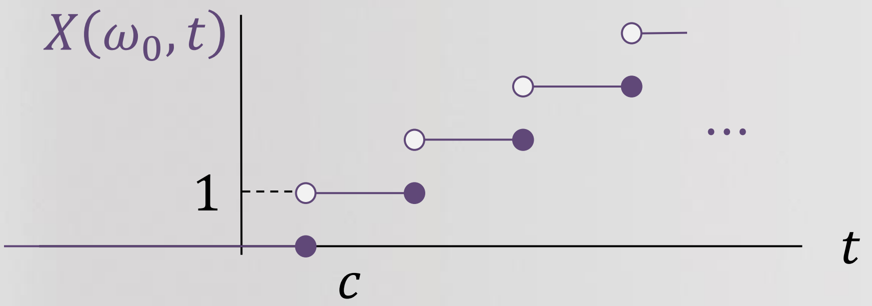
- $X(t) = X(\omega, t)$
  - $t \in \mathbb{R}$をしばしば時刻という。$X(t_0)$は確率変数
  - $X(\omega_0, t)$は実関数で見本関数という

以降では、確率過程の一つである計数過程を考える

- イベント(EV)がランダムな時刻に発生する
- 時間$[0, t)$の間に発生するEV数を$X(t)$
  - $X(\omega_0, t_0) \in \mathbb{N}$で、$s \leq t$ならば$X(\omega_0, s) \leq X(\omega_0, t)$
  - $[0, t)$の間にk回EVがある確率$P_k(t) = P([X(t) = k])$

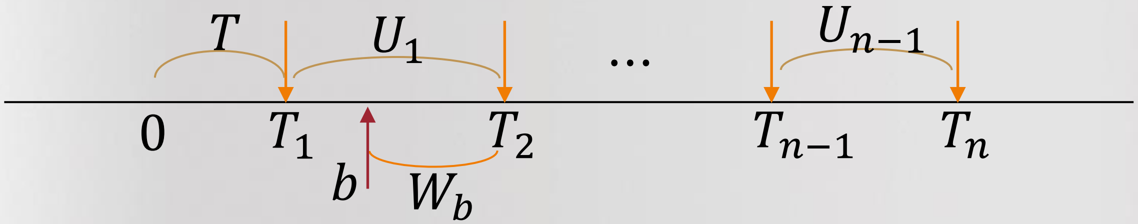
一様分布による計数過程

- 初めてのEVが時間$[0, c)$に均等の確率で発生
  - すなわち、$0 \leq t \leq c$に対し$P_1(t) = 1 - P_0(t) = t/c$
- 2番目以降のEVは、前回のちょうど時間c後に発生
  - すなわち、$t > c$に対し、$X(\omega, t) = X(\omega, t - c) + 1$
  - $t > c$ならば、$P_k(t) = P_{k-1}(t - c)$



計数過程のもつ確率変数

- n番目のEV発生時刻T_n
  - $T_n = \max\{t | X(t) = n - 1\}$
- i番目のEVと$i + 1$番目のEVの間隔U_i
  - $U_i = T_{i+1} - T_i$
- 時刻bから直後のEVまでの時間（待ち時間）W_b
  - $W_b = \max\{t | X(t) = X(b)\} - b$
  - $T = T_1 = W_0$



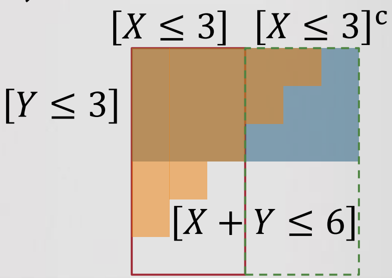
事象の独立性

ある時間のEV発生が別の時間のEV発生に影響する

- $[W_0 \leq c/2]$と$\left[W_{c/2} \leq c/2\right]$は別の時間の事象
  - $P([W_0 \leq c/2]) = P\left(\left[W_{c/2} \leq c/2\right]\right) = 1/2$
  - $P\left([W_0 \leq c/2] \cap \left[W_{c/2} \leq c/2\right]\right) = 0$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$のとき事象AとBは独立という

- ex.　サイコロ2回の出目をそれぞれX, Yとする
  - $P([X \leq 3] \cap [Y \leq 3]) = 1/4$
  - $P([X \leq 3]) = P([Y \leq 3]) = 1/2$
  - $P([X + Y \leq 6]) = 5/12$
  - $P([X \leq 3] \cap [X + Y \leq 6]) = 1/3$



確率変数の独立性

$F(x,y) = P([X \leq x] \cap [Y \leq y])$を$X$と$Y$の分布関数

確率変数XとYが独立であるとは、任意のx, yに対し、

$$F(x,y) = P([X \leq x])P([Y \leq y])$$

独立性の例

- サイコロ2回の出目X, Yは独立
- $X = Y$ならば$F(x,x) = P([X \leq x])$
  - $0 < P([X \leq x]) < 1$ならば$F(x,x) \neq P([X \leq x])^2$
    - すなわち独立でない
- 一様分布による計数過程のW_0と$W_{c/2}$は独立でない

ポアソン過程

- 時間$[t, t+\tau)$に発生するEV数を$X_t(\tau)$
  - $X_t(\tau) = X(t+\tau) - X(t)$
  - $X_0(t) = X(t)$

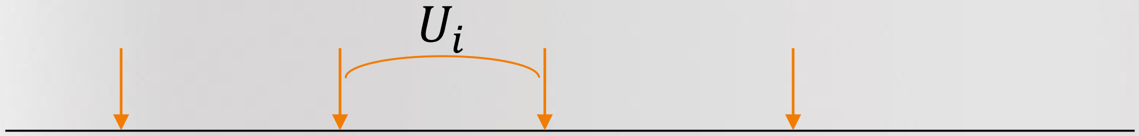
以下をすべて満たす計数過程をポアソン過程という

- 定常性：任意の$a < b$とkに対し、
  $$P([X_a(b-a) \leq k]) = P([X(b-a) \leq k])$$
- 無記憶性：任意の$a < b \leq c < d$に対し、$X_c(d-c)$と$X_a(b-a)$は独立
- 稀少性：$P([X(\Delta t) \geq 2]) = o(\Delta t)$
  - ただし、$\lim_{\Delta t \to 0} o(\Delta t)/\Delta t = 0$

ポアソン過程のEV間隔の分布関数

i番目のEVと$i+1$番目のEVの間隔U_i

- $\{U_i\}_{i=1,2,\ldots}$は独立で同一の分布に従う
  - 確率変数列が$\mathrm{i.i.d.}$であるという
  - 初めてのEV発生時刻Tと同一の分布
- 分布関数$F(t) = P([T \leq t]) = 1 - e^{-\lambda t}$
  - $\lambda > 0$はポアソン過程のパラメータ
  - $p = P([T > 1])$とおくと、$\lambda = -\log p$

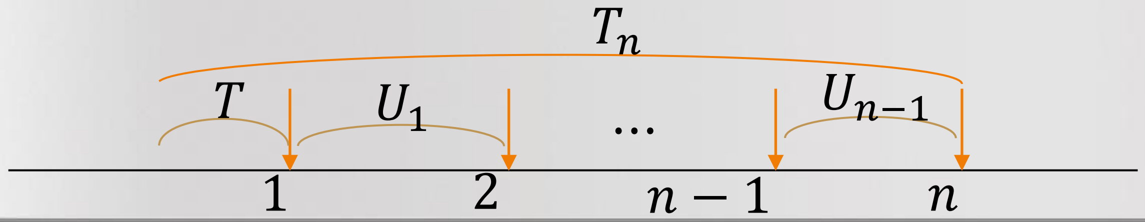


期待値

ポアソン過程の特性値として平均EV間隔を考えたい

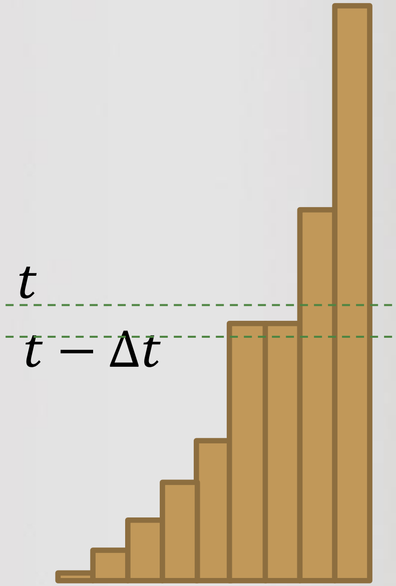
- n番目のEV発生時刻をT_n
  - Tと同一分布の独立なn個の確率変数の和
  - 任意のnに対しT_n/nは確率変数
- $n\to\infty$でT_n/nが確かになる（定数に収束する）と仮定
  - 確率変数Tの**期待値**とよぶ

$$\mathbf{E}T \sim \lim_{n\to\infty} T_n/n$$



期待値の図形的解釈

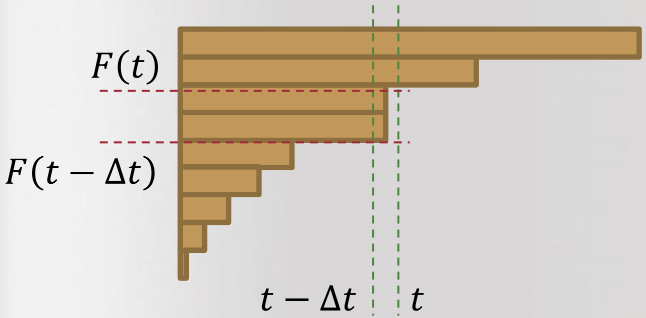
- EVを長方形で図示する
  - 高さはEV間隔の長さ
  - 幅は$1/n$
  - 面積の和が期待値に収束
- n個のEVを高さの昇順に並べる
  - 現れやすい高さほど幅広くなる
  - 高さ$(t-\Delta t, t]$内のEVの幅の和w_t
  - nが十分に大きいとき、w_tは$P([t-\Delta t<T\le t])$に近づく

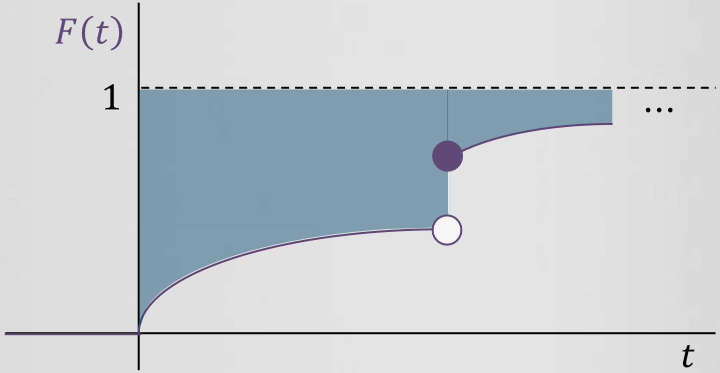


期待値の分布関数による計算

分布関数が$F(t)$の非負確率変数Tの期待値

$$\mathbf{E}T = \int_0^\infty (1 - F(t))\,\mathrm{d}t$$





この章のまとめ

- 確率過程は実数$\mathbb{R}$から確率変数への関数$X(t)$
- 計数過程$X(t)$は時間$[0,t)$の間に発生するEV数
  - 一様分布による計数過程
  - ポアソン過程

確率的特性の表現方法

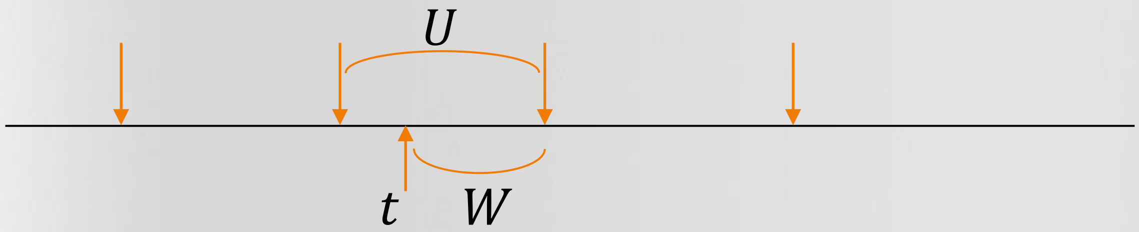
- EV間隔の確率変数列の性質
  - 独立性
  - さらに同一分布をもつとき$\mathrm{i.i.d.}$という
- 確率変数Xの期待値$\mathbf{E}X$
  - 非負で分布関数が$F(x)$のとき、$\mathbf{E}X=\int_0^\infty (1-F(x))\,\mathrm{d}x$

“

バス待ち時間のパラドックス

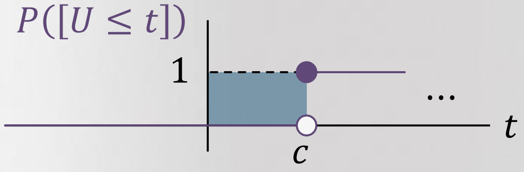
バス待ち時間のパラドックスの定式化

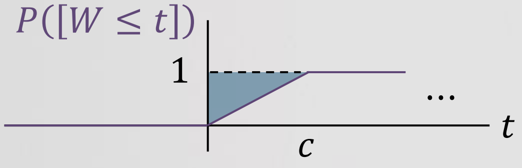
- バスの到着をEVとする計数過程
  - 定常過程(定常性をもつ)
- パラドックスの主張：$\mathbf{E}W < \mathbf{E}U$
  - バスの到着間隔U
  - 待ち時間W
    - 任意の時刻tから次のバス到着までの時間



一様分布による計数過程の場合

- $P([U \le t]) = \begin{cases} 1, & t \ge c \\ 0, & t < c \end{cases}$ より、$\mathbf{E}U = c$
- $P([W \le t]) = \begin{cases} 1, & t \ge c \\ t/c, & 0 < t < c \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$ より、$\mathbf{E}W = c/2$
- $\mathbf{E}W = \dfrac{\mathbf{E}U}{2} < \mathbf{E}U$ が成り立つ





ポアソン過程の場合

- $P([W \leq t]) = P([U \leq t])$より、$\mathbf{E}W = \mathbf{E}U$
  - パラドックスの主張が成り立たない

具体的に計算できる

- $P([U \leq t]) = 1 - e^{-\lambda t}$より、 $\mathbf{E}U = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$
- 単位時間あたりの到着数Rに対し、

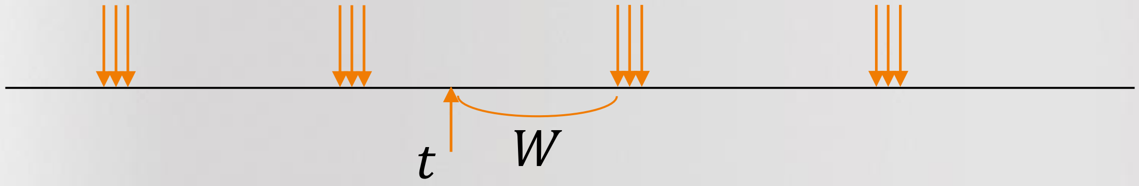
$$\mathbf{E}R = \lambda$$

λを到着率とよぶ

到着が同時発生する過程

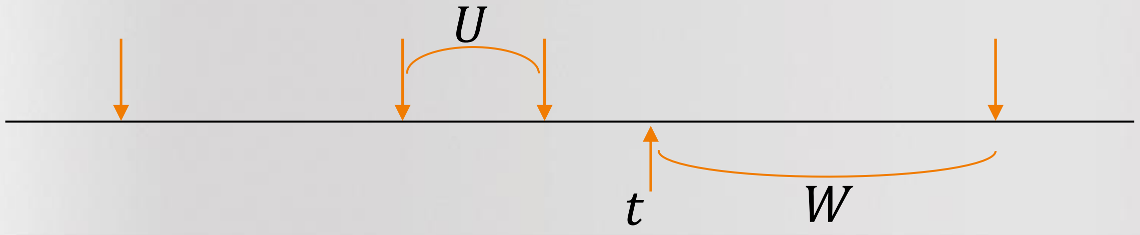
一様分布による計数過程の到着が同時に3つ発生する

- 同時に発生する到着の間隔は0とみなす
  - 平均到着間隔は1/3になるので、$\mathbf{E}U = c/3$
- 待ち時間は変化しない
- $\mathbf{E}W = c/2 = \frac{3}{2}\mathbf{E}U > \mathbf{E}U$が成り立つ
  - 平均の待ち時間は平均到着間隔より長くなりうる



バス待ち時間の誤謬

- 任意の待ち開始時刻tは任意の間隔Uに含まれるとは限らない
  - WとUは一般には独立
- 任意の待ち開始時刻tはより長い間隔に含まれる確率が高い
  - $\mathbf{E}W=\frac{\mathbf{E}U}{2}$という思い込みは到着間隔のばらつきを失念している



この章のまとめ

バス待ち時間のパラドックスを計数過程で定式化

- 到着間隔：U
- 待ち時間：W
  - 定常過程のとき、初めての到着時刻と同一分布
- 主張は$\mathbf{E}W < \mathbf{E}U$

計数過程ごとの主張の成否

- 一様分布による計数過程：$\mathbf{E}W < \mathbf{E}U$
- ポアソン過程：$\mathbf{E}W = \mathbf{E}U$
- 3件同時発生する計数過程：$\mathbf{E}W > \mathbf{E}U$

“

確率論の基本定理

測度空間による定義

正規化された測度空間$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$を確率空間という

可測空間$(S, \mathfrak{S})$に対し$\mathfrak{F}/\mathfrak{S}$-可測関数を$(S, \mathfrak{S})$-値確率変数という

- $(S, \mathfrak{S}) = \left(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})\right)$の場合、実確率変数という
  - $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$は$\mathbb{R}$のボレル集合体

$(S, \mathfrak{S})$-値確率変数Xに対し、$P^X = P \circ X^{-1}$を確率分布という

- 実確率変数Xに対し、$F(x) = P^X\left((-\infty, x]\right)$を分布関数という

期待値の定義

$X \in L^1(P)$ならば以下で定義される$E(X)$を期待値という

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}P(\omega)$$

ただし、$L^p(P)$は$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$上で$p$-乗可積分を表す

分布関数$F(x)$をもつ実確率変数の場合、以下が成り立つ

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty \big(1 - F(x)\big)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 F(x)\mathrm{d}x$$

分布関数から確率測度の構成

以下の条件を満たす関数$F(x)$を考える

- 右連続：$F(x+0)=F(x)$
- 単調非減少：$x \leq y$ならば$F(x) \leq F(y)$
- 上限が1：$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- 下限が0：$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

このとき、以下の確率空間$(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), P_F)$が唯一つ存在

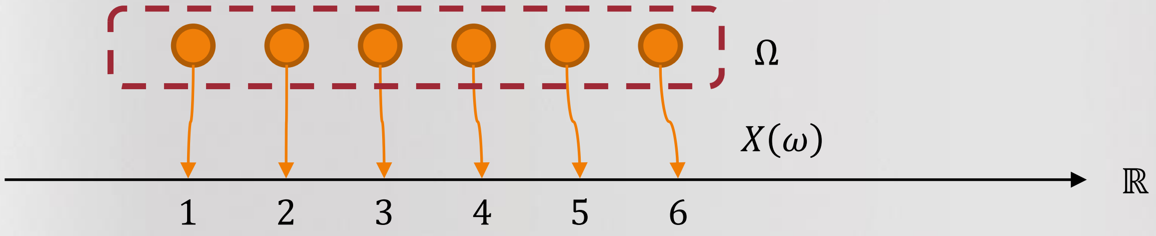
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_F\big((-\infty, x]\big) = F(x)$$

- カラテオドリの拡張定理から成り立つ

確率空間の構成例

分布関数$F(x)$をもつ確率変数Xに対し$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$を構成

- $G_n(x) = \lfloor nF(x) \rfloor / n$は単関数で$F(x)$へ一様収束
- $F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{\{x \geq x_i\}}$(ただし、$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$)ならば
  - $\Omega = \{1,2,\cdots,n\}, \quad \mathfrak{F} = 2^{\Omega}$
  - $P(\{i\}) = \alpha_i$
  - $X(i) = x_i$



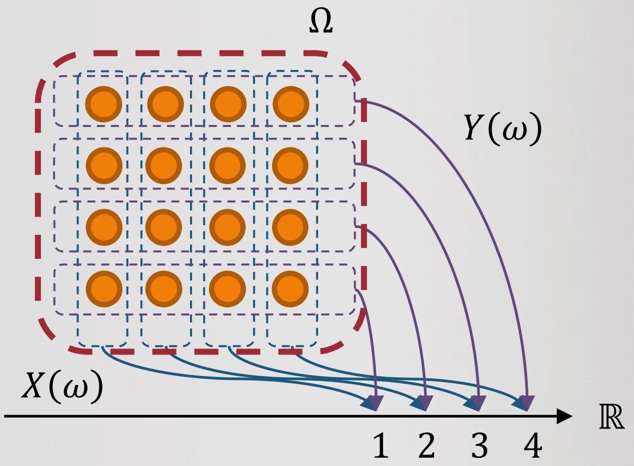
独立な確率変数の確率空間

独立な確率変数X, Yから$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$を構成

- Xに対応する空間$(\Omega_X, \mathfrak{F}_X, P_X)$
- Yに対応する空間$(\Omega_Y, \mathfrak{F}_Y, P_Y)$

以下は確率空間となる

- $\Omega = \Omega_X \times \Omega_Y$
- $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_X \otimes \mathfrak{F}_Y$
- $P(B_X \times B_Y) = P_X(B_X) P_Y(B_Y)$
  - ただし、$B_X \in \mathfrak{F}_X$,　$B_Y \in \mathfrak{F}_Y$
  - $P = P_X \otimes P_Y$と書く



無限直積測度の存在定理

- $\lambda \in \Lambda$に対し確率測度$(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), P_\lambda)$
- $\mathfrak{F}_\Lambda$は以下の条件を満たす最小の完全加法族とする
  - Λの任意の有限列$\bar{\lambda}$に対し、${\pi_{\bar{\lambda}}}^{-1}\big(\mathfrak{B}(\Omega)\big)$を含む
  - ただし、$\pi_{\bar{\lambda}}$はΩ^Λ上の射影関数
    - $\bar{\lambda} = \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ならば$\pi_{\bar{\lambda}}$は$\Omega^\Lambda$から$\Omega^n$への関数
    - $x \in \Omega^\Lambda$が$x = \{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ならば$\pi_{\bar{\lambda}}(x) = \left(x_{\lambda_1}, \cdots, x_{\lambda_n}\right)$
- 以下を満たす$\left(\Omega^\Lambda, \mathfrak{F}_\Lambda, P\right)$が唯一つ存在
  - Λの任意の有限列$\bar{\lambda}$に対し、$\bar{\lambda} = \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ならば

$$P \circ {\pi_{\bar{\lambda}}}^{-1} = P_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes P_{\lambda_n}$$

  - これを測度族$\{P_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$の直積測度という

ベルヌーイ列

i.i.d.で以下を満たす$\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$をベルヌーイ列という

$$P([X_i = 1]) = 1 - P([X_i = 0]) = p$$

ただし、$0 < p < 1$

確率空間$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$に対し以下の確率変数列を考える

- $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$がi.i.d.で$(S, \mathfrak{S})$-値確率変数Xと分布が同一
- $A \in \mathfrak{S}$に対し、$P^X(A) = p$

すると、以下はベルヌーイ列になる

$$Y_i = \begin{cases} 1, & X_i \in A \\ 0, & X_i \in A^{\mathrm{c}} \end{cases}$$

ボレルの定理

$\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$ をベルヌーイ列とする

- $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

以下はボレルの定理とよばれる

$$P\left(\left[\frac{S_n}{n} \to p\right]\right) = 1$$

ただし、

$$[Y_n \to Y] = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\omega \middle| |Y_{n+k}(\omega) - Y(\omega)| < \frac{1}{r}\right\} \in \mathfrak{F}$$

大数の法則

$\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$に対する以下の形の定理を大数の法則という

$$\forall \varepsilon, P\left(\left[\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(X_n - E(X_n)\right)\right| < \varepsilon\right]\right) = 1$$

特に、以下の場合は大数の強法則という

$$P\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_n - E(X_n)\right) \to 0\right]\right) = 1$$

定理(コルモゴロフ):

i.i.d.で期待値をもつ$\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$は大数の強法則が成立

この章のまとめ

測度論による定義

- ◆ 確率変数は可測関数
- ◆ 期待値は確率測度によるルベーグ積分

確率空間の基本的性質

- ◆ 確率変数の分布関数から確率空間を構成できる
  - ◈ カラテオドリの拡張定理
  - ◈ 独立な確率変数はそれぞれの確率空間の直積
- ◆ 統計的に意味づけできる
  - ◈ 大数の法則
  - ◈ ベルヌーイ列に対し、$P([S_n/n \to p]) = 1$

“
確率論の論理

論理の基本枠組み

以下の取りうる組み合わせの規定を世界とよぶ

- 変数…議論する対象
  - 関数…変数から別の変数を取る操作
- 述語…変数と組み合わせて論理式を構成する
  - 論理式は論理語と組み合わせて論理を展開できる
    - かつ
    - または
    - ならば
    - でない
    - 任意の
    - 存在する

実世界

実世界は以下の組み合わせとする

- 変数
  - 実定数：$c \in \mathbb{R}$
  - 実変数：$x \in \mathbb{R}$
- 述語
  - 区間：$A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$
  - ex.　$[a,b]$

論理式の例

- $x \in [a,b]$、すなわち、a $\leq x \leq b$
- $x = 0$

事象世界

事象世界は以下の組み合わせとする

- 変数
  - 事象：$A \in \mathfrak{F}$
  - 事象列：$\{A_i\}_{i=1,2,\cdots}$
- 述語
  - 確率測度Pの全体または一部の規定

論理式の例

- $P(A) = p$
- 事象AとBが独立

確率モデル

定義の通説がない

- 偶然現象に対する数理的表現
  - 単に確率分布のことを指す
  - 統計における想定した確率的法則性
- 確率的挙動と確定的挙動を組み合わせた系
- 待ち行列やパーコレーションといったモデルの総称

ここでは、

確率空間$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$の$\Omega$や$\mathfrak{F}$を具体的に記述することなく、
Pの全体または一部を規定する定義を確率モデルとよぶ

確率モデルの本世界

確率モデルの本世界は以下の組み合わせとする

- 変数
  - 確率変数：X
  - 確率変数列：$\{X_i\}_{i=1,2,\cdots}$
  - 確率過程：$X(\omega, t)$
- 述語
  - 分布P^Xの全部または一部の規定

論理式の例

- Xは分布関数$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$をもつ
- $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$は$\mathrm{i.i.d.}$で期待値をもつ

確率モデルの疑似世界

確率モデルの疑似世界は以下の組み合わせとする

- 変数
  - 確率変数：$X, Y, Z, \cdots$
- 述語（実世界と同じ）
  - 区間：$A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

論理式の例

- $X \in [a,b]$、すなわち、$a \leq X \leq b$
- $Y = 0$
- $Z \in (-c,c)$、すなわち、$|Z| < c$

疑似論理式

確率モデルの疑似世界の論理式を疑似論理式という

- 疑似論理式は事象世界の変数となる
  - $[\mathrm{a} \leq X \leq b]$のように表す
- 事象世界の関数が論理語に相当（疑似論理語）
  - かつ、または、でない：$A \cap B, A \cup B, A^{\mathrm{c}}$
  - ならば：$A^{\mathrm{c}} \cup B = (A \cap B^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$
  - 任意の：$\forall k, A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$
  - 存在する：$\exists l, B_l = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$
- $P([X \in I]) = 1$のとき、次のように書く

$$X \in I \quad \mathrm{a.s.}$$

疑似論理式の例

確率変数列$\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$および確率変数X

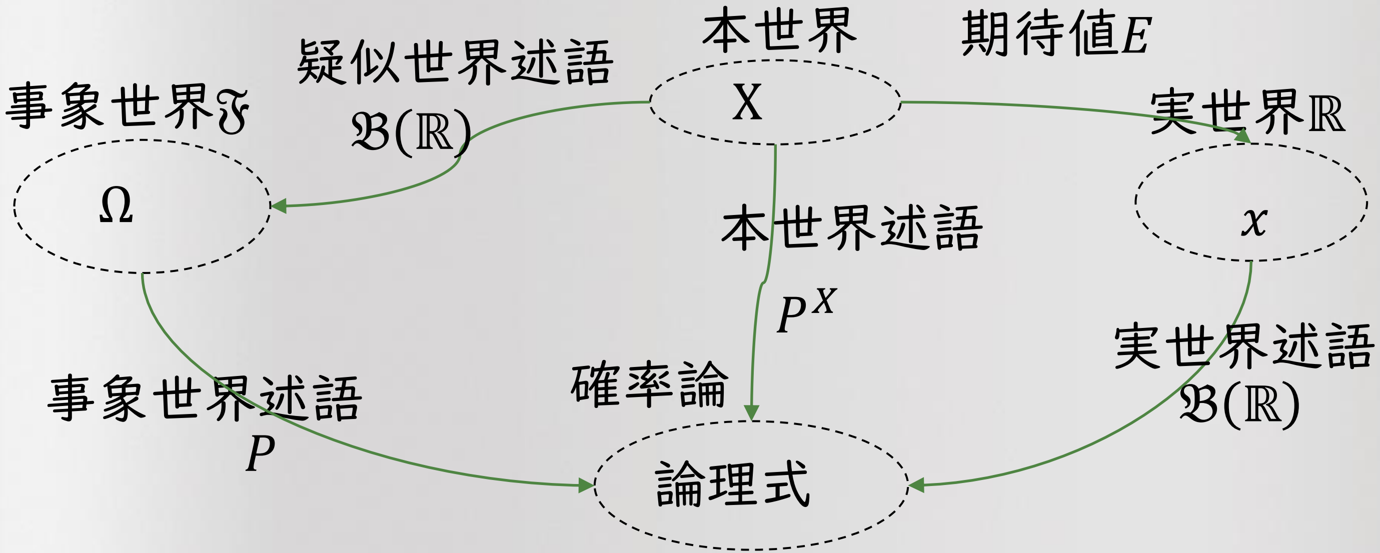
- 任意の$n \in \mathbb{N}$に対し、$X_n - X$も確率変数

疑似論理式の例

- $[|X_{n+k} - X| < 1/r]$は以下組み合わせの疑似論理式
  - 変数：$X_{n+k} - X$
  - 述語：$(-1/r, 1/r)$
- $[X_n \to X] = \forall r, \exists n, \forall k, [|X_{n+k} - X| < 1/r]$
  - 疑似論理式に対する疑似論理語の組み合わせ
  - 大数の強法則は、$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - E(X_k)\right) \to 0 \quad \mathrm{a.s.}$

確率論の世界

確率モデルの本世界と疑似世界から(狭義)確率論の論理式を作れる

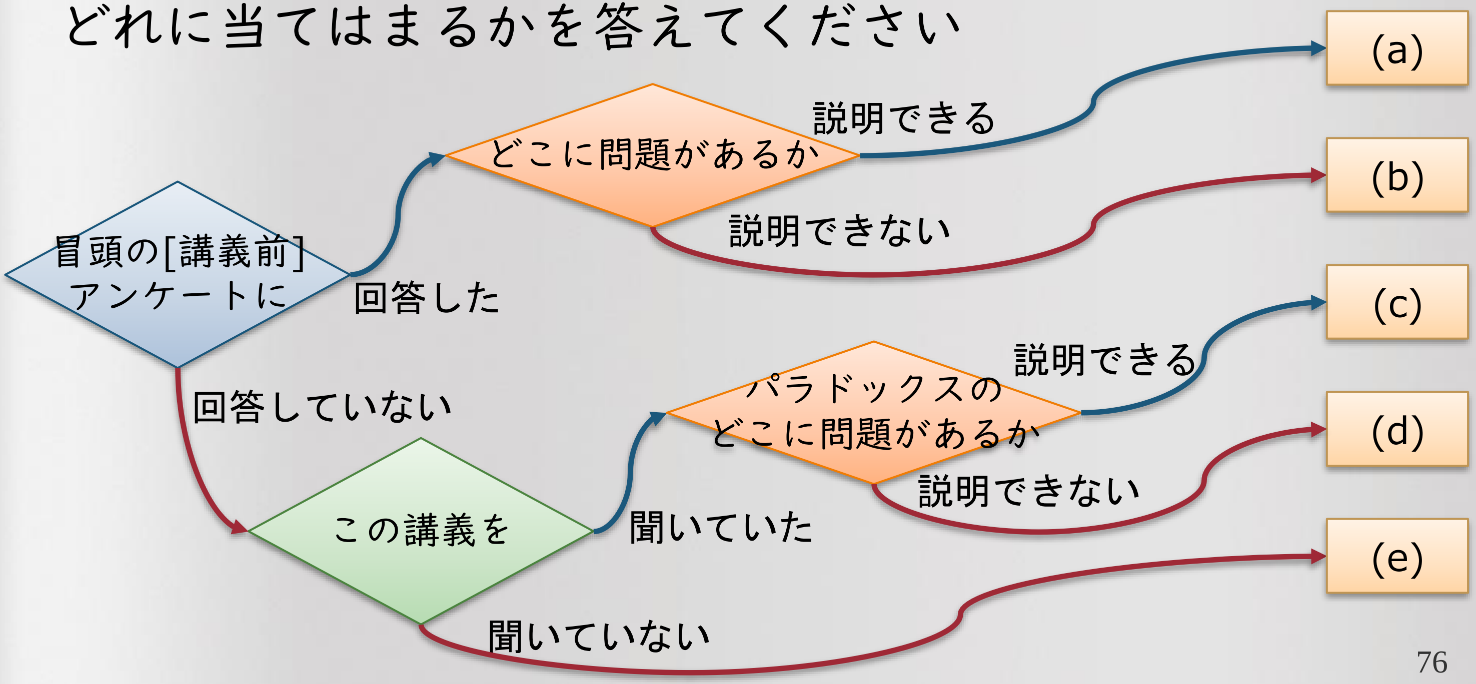


狭義確率論の例

- バス待ち時間のパラドックスは確率論の命題
  - 到着過程は確率モデルの変数
  - 到着間隔Uがi.i.d.で$L^2(P)$ならば$E(W)=\frac{E(U^2)}{2E(U)}$
- パラドックスの理解度の統計は確率論の命題でない
- パラドックスの理解度に関する確率変数
  - 本講義前に理解していた人数比X
  - 現在理解している人数比Y
  - 以下の主張は確率論の命題
    - $E(X)<E(Y)$
    - $X<Y \quad \mathrm{a.s.}$

[講義後] アンケート

どれに当てはまるかを答えてください



slido

[講義後] バス待ち時間のパラドックスについて

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

この章のまとめ

確率空間ではなく確率モデルを使った論理展開

- ◆ 論理は世界によって構成された論理式の集まり

確率論の論理式の構成方法

- ◆ 確率モデルの本世界
- ◆ 期待値に対する実世界
- ◆ 疑似論理式に対する事象世界
  - ◈ 確率モデルの疑似世界
  - ◈ $X \in I \quad \mathrm{a.s.}$と書かれていたら$X \in I$は疑似論理式$[X \in I]$

“

おわりに

まとめ

- 確率の定義と基本的な関係性について確認した
  - 古典的定義
    - ベルトランの逆説
  - 統計的定義
    - 大数の法則
  - 公理的定義
    - 分布関数による構成
    - 確率モデル
- 確率論の命題例としてバス待ち時間のパラドックスを紹介した
  - 「不確かさ」を「確かに」論ずる方法論

Thank you for your attentions!

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.