バス待ち時間の Paradox: 確率論入門

はけん (Twitter:@haken_math)

2022 年 3 月 20 日

1　導入

会話

確男「率子さん, 好きです. 付き合ってください! 」
率子「まあ嬉しい! ぜひ喜んで. 」

確男は心の中でガッツポーズをした. これから, 麗しの率子さんとのお付き合いが出来るようになるのだ. しかし, 喜んだのも束の間, 率子さんは付き合う上で以下のような条件を提示してきた.

1. 確男と率子がそれぞれの家に居るとき, 率子が電話をしたら確男はすぐに率子の家に来てほしい.
2. その電話をしてから確男が率子の家に到着するまでにかかる時間の期待値 X を, 事前に宣言してほしい.
3. 実際に n 回[1]の呼び出しでかかった時間の平均値 Y が, 宣言した時間 X から外れている場合, それ以上はお付き合いを続けることはできない.

確男は条件に驚いたものの, その条件を呑むことにした. 時間 X より早く到着してしまえば率子も準備に困る. 一方で X より遅く到着すると何かあったのではと不安になる. 何より自分の誠実さを試されているのだ.

そこで, 確男は X をどう設定すべきか考えてみることにした. 確男の家と率子の家にはそれぞれ家の目の前にバス停があり, 乗り換えなしで 1 時間で到着するバスが運行している. そのため, あとは率子から電話が来

[1] n は十分に大きい数とする.

てからバスが到着するまでの待ち時間を Z とすれば, $X = Z + 1$ が求める解となる.

このバスは**ポアソンバス**というちょっと変わった運行会社によって運行されている. 確男はこの運行会社が掲げている企業理念を思い返してみた.

1. 当バスは 365 日 24 時間いつでも同じ法則性にしたがって運行いたします. 任意の一つの時間間隔に対してバスがある本数到着する確率は, その本数と時間間隔の長さとに依存するだけで, 時間軸全体を一定の値だけずらせてもその確率は変わらないことをお約束します.
2. 休みなく運行する代わりに, 決められた時刻通りにバスがご到着することは保証し兼ねます. ある時間間隔に到着するバスの数がある本数になる確率は, その時間間隔より以前にバスがどう到着していたかにはよらず, 以前の到着のすぐ直後のこともあれば, ずっと後になることもあります.
3. 交通上の混雑を緩和するため, 極小の時間間隔の間にはバスが 2 本以上到着することはないようにします.

確男はこれらの考え方についてよく分からないところもあったが, 「バスは一日に平均 24 本運行する」というバス会社の情報から, 平均の到着間隔は 1 時間であると考えた. しかし, 率子からの電話はバスの到着の直前にかかってくることもあれば, バスが行ってしまった直後にかかってくることもあるだろう. バスの到着の直前であれば $Z = 0$ であるし, バスが行ってしまった直後であれば $Z = 1$ と考えられる. これでは率子の家に到着する時間は 1 時間もぶれ幅があることに..., いや待て, 率子に求められているのは平均値なのだ. $Z = 1/2$ とすれば, $X = 1.5$ が求める解だ!

(ここまでの思考時間わずか 3 秒.)

そこで, 確男は率子に平均 1.5 時間で到着することを宣言したのである.
1 か月後, n 回の呼び出しを終えて平均値を求めてみたところ, $Y = 2$ であった.

会話

率子「宣言時間より平均 30 分も多くかかる方とは, これ以上はお付き合いできません. さようなら...」

確男はバス会社を訴えようとバスの平均運行時間を計測してみることにした. $Y = 2$ になってしまった以上, バスを平均1時間待っていたことになる. すると, バスの到着間隔は実は1時間より長かったのではないか. これでは, 「バスは一日に平均24本運行する」というバス会社の情報は嘘になってしまうはずなのだ.

しかし, 確男の目論見は外れ, 確かにバスの到着間隔は平均1時間であることが確認できたのだった...

2 講演内容

前節のように, バスの到着間隔と待ち時間の計算が合わないことを, **バス待ち時間のパラドックス**といいます.

本講演では浅学ながら筆者なりに確率論の基礎から説明し, バス待ち時間のパラドックスが論理的に説明できるようになるまでを目指します. 確率論の基礎は [1] を参考にしています.

前提知識はなるべく少なくなるよう心掛けます. 特に, 確率論についての知識は不要とし, 日常生活程度の確率の知識 (例えば, サイコロの目の出る確率はすべて等しいなど) があれば十分な内容とする予定です. 一方, 以下のような数学の知識を持っていると議論の細部まで理解できると思います.

- ベン図の見方や部分集合, 関数の逆像など, 集合についての基礎
- 連続関数や積分の定義など, 簡単な微分積分
- 初等幾何学

ところで, 確率論の対象は「不確かな」事象です. 一方で, パラドックスは「不確かな」判断に関する言及であるといえます. この二つの「不確かさ」を対比して, 確率論が「不確かさ」を「確かに」扱える, というようなイメージをうまく説明できればと思います.

参考文献

[1] グネジェンコ (1969) 『確率論教程 I・II』 鳥居一雄訳, 森北出版.