CPAおよび単位閉区間の上へ連続的に写せる実数の集合について

でぃぐ (Twitter: @fujidig)

本発表では次の主張を考える。

連続体濃度を持つ任意の $S \subseteq \mathbb{R}$ **について**

ある連続関数 $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ **があって** $f(S) = [0,1]$ (*)

結論を先に述べると、この主張は集合論の標準的な公理系ZFCから独立である、すなわちZFCが無矛盾だとしたときZFCから(*)の肯定も否定も証明することは出来ない。

(*)の否定はCH (連続体仮説)から出ることがSierpinskiの1928年の論文によって難しくない証明がつけられている。しかもCHがZFCから無矛盾なことはGödelによって示されているので、(*)の否定が無矛盾なことは比較的簡単にわかる。

(*)の肯定はMillerの1983年の論文によって、無矛盾であることが示されている。その証明方法は、(*)の肯定がSacks foricngという強制法のω_2回可算台反復をして得られるZFCのモデル (以後、Sacksモデルと呼ぶ)で成り立っていることを示すというものである。

さて、我々はSierpinskiとMillerの仕事を紹介する講演を行う…とするのが自然な流れであるが、しかし強制法の話を最初から扱ってMillerの結果まで紹介するのは困難である。

では、このトピックを強制法の議論を避けつつ扱う良い方法はないか？ 実はある。それが表題のCPAである。CPA(The covering property axiom)はCiesielskiとPawlikowksiが考案した、Sacksモデルで成り立っている組み合わせ論的原理である。さらにSacksモデルで成り立つ命題の多くがCPAから導出できることも知られている。(*)もその一つである。したがって、我々はCPAをブラックボックスとして使って(*)を導出する。

よく考えたら、CHから含意されるから無矛盾というのもGödelの仕事をブラックボックスにして使うのだから、肯定の方もブラックボックスを使っていけないという理由はない。

というわけで、以上のような内容で講演を行う予定である。

参考文献

[1] Sierpiński, W. (1928). Sur un ensemble non dénombrable, dont toute image continue est de mesure nulle. *Fundamenta Mathematicae*, *11*, 302–303.
[2] Miller, A. W. (1983). Mapping a set of reals onto the reals. *The Journal of Symbolic Logic*, *48*(3), 575-584.
[3] Ciesielski, Krzysztof, and Janusz Pawlikowski. "The covering property axiom, CPA." *Cambridge Tracts in Mathematics* 164 (2004).