内在性, 剛性, 復元可能性

asterisque, Ver. 1.01

目次

1 Abstract

1.1 概要

本講演では, 様々な数学的対象を通して, 掲題の概念の, 数学における具体的様相を提示しようと思います. 必要な知識について復習しつつ, どのような数学的観察の末にどういう文脈で, 様々な数学的対象が**内在的 (intrinsic)** であったり, **リジッド (rigid)** であったり, **復元可能 (reconstructible)** であることがわかるのかについて**群論的・環論的側面**と**圏論的側面**から紹介できればと思います. 従って, 本講演は, “何かひとつの対象に対して深く話をする”, というよりは,

気を緩めて縦横に眺め廻る

ようなものですので, 気楽に聞いていただけたらと思います.

個人的な話で恐縮ですが, 筆者は [数学科・数理研究科に在籍していた, という意味で,] 数学 (遠アーベル幾何学) が専門だったのですが, 頭の中では**認識** [や**言語**] に最も強い関心があり, 数学への関心はそれが “認識のモデルを与えてくれる [気がする]” という点から生じています. そういう経緯でこのようなテーマ設定とさせていただいた次第です.

現在は社会人の日曜数学として細々と数学と関わっておりますので, 今後発表日までの仕事の都合で発表内容の質がコロコロと変わるかもしれませんが, それでも, 例えば, 様々な数学分野の門を叩くモチベーション作りとしてでも, 是非聞いていただけたら嬉しいです.

1.2 構成

1.2.1 群論的・環論的方法

最初にイントロダクションとして, 環論の基本的なテーマである **Krull 次元**や**準素イデアル分解**について, 掲題の視点でお話しようと思います. 例えば [AM] では,

- 一般の [単位的] 可換環とその [proper な] イデアルに対して, それが**準素イデアル (primary ideal)** である, という性質が定義され,
- 特に **Noether 環** [のイデアル] に対しては, そのある種の有限性から準素イデアル分解の存在が導かれ,
- より強く **Dedekind 整域**においては [0 でないイデアルの] 一意的な素イデアル分解可能性が導かれる.

というお話が展開されていますが, 本講演ではその分解の一意性について掲題の視点で述べ直し, 簡単な内在性・復元可能性 [と, その帰結] について観察しようと思います.

p 進の世界にも視線を移そうと思います. 例えば, 標数 0 から標数 p, という向きには,

$$R \mapsto R/p$$

という標準的な対応があります. 簡単な例では, この対応は $R = \mathbb{Z}_p$ の場合 $\mathbb{Z}_p \mapsto \mathbb{F}_p$ で, intuitively にはこの対応は“情報を失い過ぎている”ように思えるのですが, 実はそうではなく, **Witt 環**による関手的な**標準的持ち上げ (canonical lifting)**[Lar]

$$\mathbb{F}_p \mapsto W(\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}_p$$

が存在することが知られています. Witt 環のお話に続けて, 例えば **p 進 Hodge 理論**の文脈まで踏み込み, 様々な p 進世界における性質の内在性や復元可能性 — 例えば, 局所体の **bi-anabelian/mono-anabelian** な復元 — を紹介できればと思います.

1.2.2 圏論的方法

まず, **Galois 圏**について, [SGA1] や [Cad] に沿ってその一般論とそれが如何に組合せ論的であるのかについてお話します (Galois 圏については, 少し詳しく話そうかな, と思っています). 最も端的には, Galois 圏とは単に,

$$\text{圏 } \mathbf{C} \text{ であって, 副有限群 } G \text{ と圏同値 } \mathcal{F} : \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \mathbf{FSets}_G \text{ が存在するもののことである}$$

と言えるのですが, それを純粋に圏論的な (**purely category theoretic**) 条件で — つまり, 副有限群の言葉が出てこない条件で — 言い換えることができます. その際登場するある特別な関手 $\mathcal{F}$(**ファイバー関手**) は, Galois 圏 $\mathbf{C}$ 上の [位相幾何学で登場するような] **基点 (basepoint)**

$$\mathcal{F} : * \to \mathbf{C}$$

とみなすことができ, この視点に立つと, Galois 圏は **anabelian な幾何的対象**である, つまり, 標語的に,

$$\mathrm{Isom}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\pi_1(\mathbf{C}_1), \pi_1(\mathbf{C}_2))$$

を満たす, ということが言えることがわかります. 更に, **無限次元 Galois 圏**が [BS13] で, **幾何的 Galois 圏**が [Mzk3] や [P16] で議論されていますが, Galois 圏は組合せ論的対象である, という事実が, 基点のある種の**剛性 (rigidity)** を導き, 幾何的 Galois 圏上の**基本群 (fundamental group)** を定義する際に重要である, ということも話します. また, ここで, 圏論に絡めて他の復元的テーマ — 例えば, スキーム X, Y に対する自然な全単射

$$\mathrm{Isom}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\mathbf{Sch}_Y, \mathbf{Sch}_X)$$

の存在 [Mzk4] — や, より広い遠アーベル幾何学の結果について, 掲題の概念を念頭におきつつお話したいと思います (参考文献としては, 例えば [DM], [Mzk1], [Mzk2], [Wak1], [Wak2], [LO]).

1.3 予備知識

予備知識としては, スキーム論的代数幾何学とその周辺の知識を仮定しますが, 紹介する結論自体を感じ取るには, 特別何かの分野の知識が必要, というわけではなく, 基本的な学部生レベルの数学の (知識ではなく!) 経験があればいいな, となります.

当日は是非とも宜しくお願いいたします.

keywords: *intrinticity, rigidity, reconstructability, anabelian geometry*

参考文献

[AM] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[BS13] B. Bhatt, P. Scholze, *The pro-étale topology for schemes*, preprint, arXiv:1309.1198.

[BS19] B. Bhatt, P. Scholze, *Prisms and Prismatic Cohomology*, preprint, arXiv:1905.08229.

[Cad] A. Cadoret, *Galois Categories*, in *Arithmetic and Geometry Around Galois Theory*, Progress in Mathematics, **304**, 171-246, Springer-Verlag, 2013.

[DM] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the moduli space of curves of given genus*, IHES Publ. Math., **36** (1969), 75-109.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental - S.G.A.1*, Lect. Note in Math., **224**, Springer-Verlag, 1971.

[Lar] L. Hesselholt, *Lecture notes on Witt vectores*, available at http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~larsh/papers/s03/wittsurvey.pdf

[LO] F. Liu, B. Osserman, *Mochizuki's indigenous bundles and Ehrhart polynomials*, J. Algebraic Combin. **26** (2006), 125-136.

[Mzk1] S. Mochizuki, *A Theory of Ordinary p-adic Curves*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **32**(1996), 957-1151.

[Mzk2] S. Mochizuki, *Foundations of p-adic Teichmüller Theory*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **11**, American Mathematical Society/International Press(1999).

[Mzk3] S. Mochizuki, *The Geometry of Anabelioids*, Publ. RIMS. Kyoto Univ., **40**(2004), 819-881.

[Mzk4] S. Mochizuki, *Categorical representation of locally noetherian log schemes*, Adv. Math. **188**(2004), 222-246.

[P16] I. Pirashvili, *The Fundamental Groupoid and the Geometry of Monoids*, PhD Thesis at University of Leicester, 2016; available at https://lra.le.ac.uk/handle/2381/37837

[Wak1] Y. Wakabayashi, *An explicit formula for the generic number of dormant indigenous bundles*, preprint, arXiv:1411.1191.

[Wak2] Y. Wakabayashi, *On the category of structure species*, preprint, arXiv:2201.11273.