

# レーヴェンハイム-スコーレムの定理とその応用

田尻翔平

2022年3月11日

当講演の目的は、数学基礎論の一分野であるモデル理論が他の分野にも十分な応用ができることを示唆する例を紹介することである。モデル論の概要の説明に際しては注意点には気を付けつつも式の羅列にはならないように、細かいことには立ち入りすぎずに行う予定である。

まず準備のために一階述語論理とその周りの哲学について触れる。次に、モデル理論のアイデアについて説明する。そして今回の発表の主軸となる「レーヴェンハイム-スコーレム (-タルスキ) の定理」を説明する。最後にその定理を応用して自明でない定理のややこしい証明を見通しよくできる例を示す。

対象聴講者は学部 2,3 回生以降程度の事前知識を持っていることを想定している。さすがに大学入学したての学生には飲み込みづらい話が出てくるといった可能性が高いことを了承されたい。しかしながら述語論理・モデル理論の立場や哲学について多くの言葉を用いて説明していく予定であり、モデル理論の事前知識はあまり無くても聴けて、多少意味の分からない文言が出てきても全体の流れに置いていかれないような講演にする配慮を考えている。逆に、モデル理論の技法および哲学を十分に自分のものになっている人は当講演を聴いても得るものが全く無い可能性が高い。

また、講演につかう基本資料は事前にアップしておく予定であるので、時間のある人はそれを読んで当日聴講するかの判断に利用されたい。読んで満足したら他の講演を聴くのも良いだろう。

以下に参考となった本のリストを挙げておくので、この分野に初めて興味を持った人はそれらを当たるのも良いだろう。参考までに、田尻から見た各本の印象を記しておく。[9] は数理論理学についての哲学的な内容が特に多く書いてある。[3] は集合論の教科書として特に著名なものである。扱っている話題も多岐にわたっている。[2] は [3] の書き直しにあたるがエディション違いではなく、内容構成が大きく異なっている。[1] と [4] は [3] よりも扱うトピックは広くないものの数学基礎論のうち論理学方面を深掘りしている。[8] は扱われている内容が非常に幅広いものの、とりあえず全体的にハードな雰囲気書かれている。最初の教科書としておすすめするつもりにはあまりなれない。

## References

- [1] Herbert B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic (Second Edition)*. Elsevier, 2001.
- [2] Kenneth Kunen. *Set Theory*. College Publications, 2011.
- [3] Kenneth Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. North-Holland, 1980.
- [4] Kenneth Kunen. *The Foundations of Mathematics*. College Publications, 2009.

- [5] Herbert B.Enderton 訳: 嘉田 勝. 論理学への数学的手引き. [1] の邦訳. 1月と7月, 2020.
- [6] ケネス・キューネン 訳: 藤田 博司. キューネン数学基礎論講義. [4] の邦訳. 日本評論社, 2016.
- [7] ケネス・キューネン 訳: 藤田 博司. 集合論 – 独立性証明への案内. [3] の邦訳. 日本評論社, 2008.
- [8] 新井 敏康. 数学基礎論. 岩波書店, 2011.
- [9] 菊池 誠. 不完全性定理. 共立出版, 2014.