

$Spin(1, 3)$ と Dirac 方程式

一人セミナー数理物理

概要

スピン角運動量という物理量が観測されて以来、物理学者は Schrödinger 方程式に代わる新しい量子力学的な運動方程式を求めていた。そして 1928 年 Dirac は遂にスピンを含んだ形で相対論的な量子力学における電子の運動方程式、Dirac 方程式に到達したのである。幾何学の文脈で方程式といえば、多様体上の関数やベクトル場に関する方程式を想起するかもしれないが、実は Dirac が得たものはそのいずれでもない。それでは Dirac 方程式は一体何に対する方程式だというのだろうか。この問いに答えようとする際に、避けては通れないのが、本義 Lorentz 群 $SO_0(1, 3)$ の普遍被覆群として現れる $Spin(1, 3)$ とスピノルである。今回は物理学を通して、由緒ある Lorentz 多様体上のスピン幾何学に、少しでも親しみを感じていただければ幸いである。

前半では線型代数学、群論・環論の初歩及び、被覆空間や Euclid 空間上の微積分の知識を仮定する。まず $Spin(1, 3)$ を定義してから、Minkowski 時空 (不定計量の入った Euclid 空間) の Dirac 方程式について簡単に解説する。物理学や微分幾何学の知識を特に仮定しないが、特に後半は特殊相対論、量子論、多様体論や接続に関する知識などはあった方が理解しやすい。

参考文献

- [1] 本間泰史著 “スピン幾何学”, 森北出版, 2016
- [2] 中原幹夫著 “理論物理学のための幾何学とトポロジー”, ピアソン・エデュケーション, 2001
- [3] H.Nikolic, How (not) to teach Lorentz covariance of the Dirac equation.
<https://arxiv.org/abs/1309.7070>