

# 悪魔とチェス盤のパズルの 符号理論による一般化

ヘカテー@HKTmine

2022/3/27

## 概要

本講演では、まず悪魔とチェス盤のパズルを紹介する。このパズルは端的に言えば「ポーンがランダムに配置された  $8 \times 8$  マスのチェス盤に対して、ある 1 マスのポーンの有無を変更することで  $1 \sim 64$  までの任意の整数を表せるか」というパズルである。詳しく述べると次のようなパズルである。

「囚人 A と囚人 B が釈放を目指して、次の数当てゲームに挑戦する。

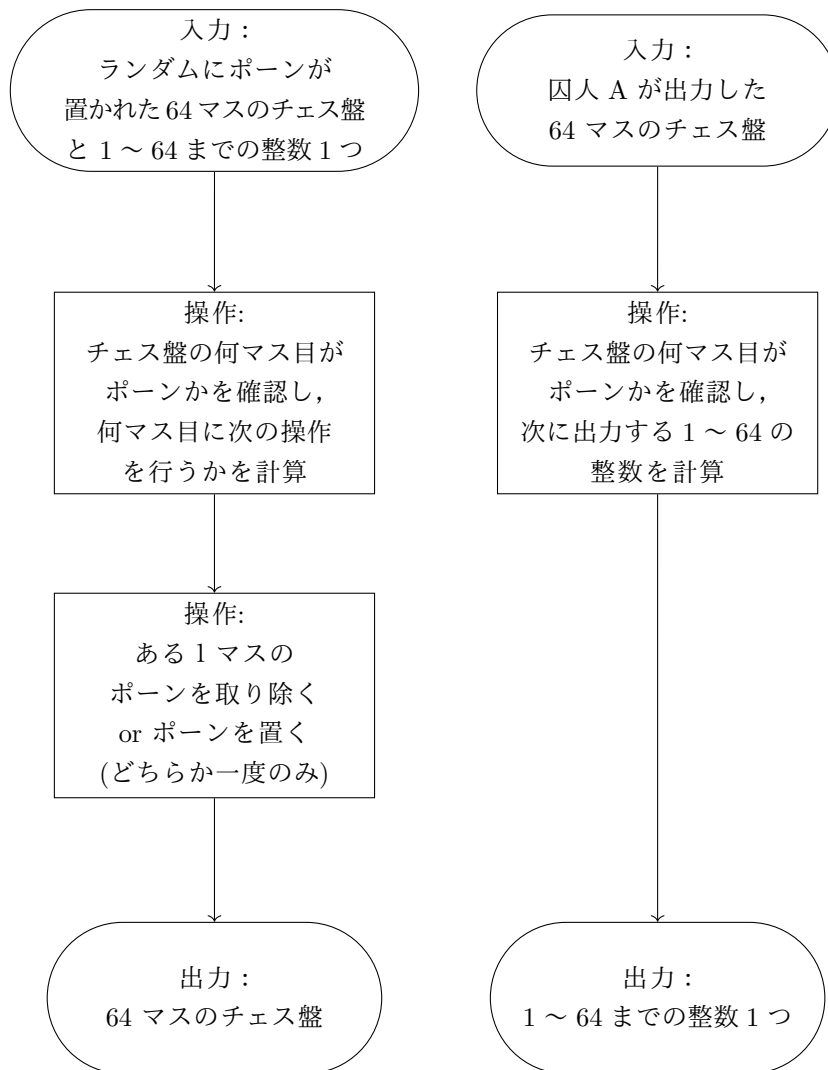
数当てゲーム：囚人 A には、ポーンがランダムに配置された  $8 \times 8$  マスのチェス盤と、ランダムに決まった  $1 \sim 64$  の整数が（悪魔によって）与えられる。この二つの情報（囚人 A に与えられたチェス盤の初期配置と整数）を囚人 B は知るすべを持たない。囚人 A は与えられたチェス盤の、ある 1 マスに対して、ポーンがあれば取り除き、ポーンが無ければその 1 マスにポーンを新たに置く、という操作をちょうど一度だけ行う。その後、囚人 B が、囚人 A によって初期配置から 1 マスだけポーンの有無が変わったチェス盤の盤面だけを見て、囚人 A に与えられた  $1 \sim 64$  の整数を言い当てる。なお、チェス盤の向きは固定されており、その向きが二人とも分かるようになっている。

このゲームを必ず成功させるためには、二人の囚人は事前にどんな戦略を立てればよいか？」

このアブストラクトの直後に、このパズルのフローチャート（囚人 A と囚人 B それぞれの、入力、操作、出力）を載せてある。

その後、この悪魔とチェス盤のパズルを特定の条件を満たす（二部）グラフの構成として定式化する。また、その構成が符号理論における完全性と呼ばれる性質を持つ符号（完全符号）の族の構成にもなっていることをみる。さらにこのパズルの解法は、それらの完全符号（ハミング符号と呼ばれる符号がもとになっている）の反転誤りに対する復号方法に対応していることをみる。このパズルは符号理論的には、「反転誤り」に対応するが、実は「削除誤り」に対応するパズルを完全符号の観点から構成することが出来る [1]。実際にそのパズルの解法は、VT 符号と呼ばれる完全符号の削除誤りに対する復号方法に対応している。ハミング符号は単一の反転誤りを訂正出来る符号であり [2]、VT (Varshamov-Tenengolts) 符号は単一の削除誤りを訂正出来る符号である [3], [4]。最後に、完全符号の観点から行われた近年の研究結果 [5], [6], [7], [8] を用いて、こうしたパズルが無制限作れることをみる。

前提知識は特に必要としない。ちなみに、ハミング符号は悪魔とチェス盤のパズルに応用される [9] だけでなく、帽子パズル (Hat Guessing) への応用 [10] や、偽の金貨を当てる天秤パズル (Balance Puzzle) にも応用がある。



囚人 A の入力と操作と出力

囚人 B の入力と操作と出力

囚人 A と囚人 B のそれぞれができること

(囚人 A に入力された整数と、囚人 B が出力した整数が一致すれば成功)

## 参考文献

- [1] Ankur A Kulkarni, Negar Kiyavash, and R Sreenivas. On the varshamov–tenengolts construction on binary strings. *Discrete Mathematics*, 317:79–90, 2014.
- [2] Richard W Hamming. Error detecting and error correcting codes. *The Bell system technical journal*, 29(2):147–160, 1950.
- [3] G.M. Tenengolts and R.R. Varshamov. Correction code for single asymmetrical errors(binary code correcting single asymmetric errors). *Automation and Remote Control*, 26:286–290, 1965.
- [4] V.I. Levenshtein. Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals. *Soviet physics doklady*, 10(8):707–710, 1966.
- [5] Manabu Hagiwara. Perfect codes for single balanced adjacent deletions. In *Information Theory (ISIT), 2017 IEEE International Symposium on*, pages 1938–1942. IEEE, 2017.
- [6] M. Hagiwara. Perfect Codes for Generalized Deletions from Minuscule Elements of Weyl Groups. *arXiv e-prints*, page arXiv:1810.09877, Oct 2018.
- [7] Kento Nakada. A family of perfectness of the levenshtein codes  $1$  a  $(n; 2n)$ . In *2020 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA)*, pages 131–135. IEEE, 2020.
- [8] Kento Nakada. Perfect binary codes capable of correcting equal multiple deletions. In *2021 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, pages 2661–2665, 2021.
- [9] Pau Cantos Coll. Coding theory in a life or death problem, 2018.
- [10] Andy Liu. Two applications of a hamming code. *The College Mathematics Journal*, 40(1):2–5, 2009.