# 線型じゃないと見せかけて実は線型

(Preserver Problem 入門)

いーふ　(@y_e_af)

数学で扱う対象の多くは，何かしらの**構造**をもった**集合**である．例えば，群は集合 $G$ にいくつかの条件を満たす演算 $\cdot$ が定義されたもの $(G, \cdot)$ である．他にも，距離空間や位相空間，順序集合，多様体など様々なものがある．一般に，集合に与えられる構造はひとつではない．例えば，Banach 空間は線型空間の構造とある種の距離構造を備えた集合であるし，Lie 群は群の構造と多様体の構造をもった集合である．このような対象では，各々の構造が独立しているのではなく，ある種の関係性がある．例えば，Lie 群では，群の演算が $C^\infty$ 級であることを仮定している．ここでは，便宜上，複数の構造をもった集合を**数学的対象**と呼ぶことにする.[1]

また，数学的対象には，ある種の**関係**，ある種の (スカラー値，ベクトル値，集合値) **関数**，ある種の**部分集合**などが定まる．例えば，環には可換性などの関係が定まり，内積空間には直交性という関係が定まる．他にも，行列環には行列式というスカラー値関数や，各元に固有値を対応させる集合値関数 (スペクトル) が定まる．さらには，環には可逆元という部分集合が定まり，行列環にはユニタリー元全体という部分集合が定まる．

さて，我々の疑問は，

- 数学的対象の構造同士のどのように関わっているか？
- また，上で挙げた関係・関数・部分集合は，どれくらい構造を知っているか？

ということにある．今回は，構造や関係・関数・部分集合などを写像を通して見ることによって，それらの疑問に迫ろうというものである．よって，考えるべき問題の最も一般的な形は次のようなものである．

[1] これは，集合論や圏論が数学的なものでないと主張しているわけではない．単に私のネーミングセンスが貧弱であるために，そのような用語を使っているだけである．

**問題** (Preserver Problem). $A$ および $B$ を数学的対象とする．$T : A \to B$ をその間の写像で，ある構造または関係，関数，部分集合などを保存すると仮定する (このような写像は **Preserver** と呼ばれる)．このとき，

(1) $T$ は別の構造または関係，関数，部分集合などを保存するか？

(2) $T$ の一般形はどのようになるか？

今回は，この問題について知られている結果を，行列環や Banach 空間を中心に紹介する．特に，線型性を仮定しない写像が他の構造を保存するという条件から自動的に線型になる，という現象をいくつか紹介する．証明は特に紹介するつもりはない (時間的にできない) ので，ざっくり結果を眺めてどのような世界が広がっているか感じ取ってもらいたい．

## 前提知識

基本的には，線型代数の初歩と距離空間の初歩の知識があれば十分である．Banach 空間について知識があると好ましいが，なくても問題ない．