# Suslin 木が生えている場合の話

Sakura Math

2021 年 9 月 13 日

## 1　概要

Suslin 木は木の一種であり，木は順序集合の一種です．よって本講演では特殊な順序集合について考えていくことになります．Suslin 木の正確な定義については講演で述べますが，Suslin 木は特定の条件を満たす巨大な木であり，集合論の一分野である無限組合せ論の中で自然に考えられるものです．また，順序集合として闇ながらも身近で大切な例に実数直線が挙げられますが，実は Suslin 木は実数直線と深い関わりがあります[*1]．

本講演は前後半に分かれています．先ず前半では Suslin 木の定義を述べ，これが如何に実数直線と関わりがあるかを説明します．次いで後半では Suslin 木そのものを利用して small Dowker 空間を構成します．

## 2　補足

一般位相空間論に於いて，$T_4$ 性が積で保たれないことは古くから認識されていました．Dowker は $T_4$ 空間とよいクラスの空間との積に関して深く研究する中で，1950 年代の初めに $T_4$ ならば可算コンパクトであるという予想を立てます[*2]．以降，位相空間が Dowker であるとは，可算パラコンパクトではないが $T_4$ であることを指していうようになりますが，Rudin は Suslin 木が存在するならば Dowker 空間が存在することを証明し，1955 年に発表します[*3]．

今回紹介する Dowker 空間の構成はこの 1955 年の Rudin に依るものです．先述した背景のみを見ると Dowker 空間の存在性は一般位相空間特有の問題に思われるやもしれませんが，層理論の視座から見ても興味深い問題ですし[*4]，現代でも集合論的な興味から研究が続けられているようです[*5]．

---

[*1] この両者を繋ぐ概念が Suslin 線であり，講演でも触れることになると思います．

[*2] $T_4$ 空間 $X$ について，$X$ が可算パラコンパクトであることは，任意のコンパクト距離空間 $Y$ との積 $X \times Y$ が $T_4$ であることと同値です．この結果は 1951 年に Dowker によって発表されたものであり，特に $X \times [0,1]$ が $T_4$ であることが担保できる点でこの特徴づけは便利です．この Dowker による予想はこの定理とそれに関する考察に基づくもののようです．

[*3] 実は 1971 年に Rudin 自身によって Suslin 木の存在を仮定せずに Dowker 空間が構成できることが示されます．この結果の方が優れているのですが，構成は $\omega_n + 1$ の $n \in \omega$ に亘る箱積の部分空間を取るという手法を取っており，(集合論的には大したことないのですが，普段慣れ親しんでいる空間と比べると) 大変大きな空間を考えることになります．一方で Suslin 木を用いる構成の場合は濃度が $\omega_1$ とかなり小さく，サイズが $\omega_1$ であるという条件を課した small Dowker 空間については，未だに Rudin の構成以外に知られていないようです．そういった理由もあり今回はこちらを紹介することにしました．

[*4] C. H. Dowker が著わした Lectures on Sheaf Theory などを見ると，層理論の中で $T_4$ 性やパラコンパクト性が如何に影響を与えるかがよく分かります．

[*5] 尚，現時点ではこの辺りの展開まではフォローしていません．1990 年代に家本, 大田, 玉野によって順序数の積空間の部分に関する組織的な研究が推し進められ，1996 年，1998 年に至ると Balogh によって Dowker 空間の優れた構成手法が開拓され，以降も研究が続いているようです．