

# 数学Ⅲからはじめる実解析入門

かそう

みなさんはじめまして. かそう\*1と申します. 今回はこのすうがく徒のつどい@オンラインで発表の機会を頂きありがとうございます. 数学の発表は今回が初めてで, しかもそれがオンラインによるものですので, ヘマなどしましたら大目に見てください汗.

さて今回私が発表させて頂く分野は「実解析」です. 対象は, 数学Ⅲを一通り学習した方であれば誰でも大丈夫です (というか, そのつもりで頑張りました). 実解析は難しく, 特に初学者だと教科書を見てもさっぱりわからない, なんてことも...

この発表は, そんな, 難しい実解析でも, 数学Ⅲを中心にやれば, わかりやすくなるのでは, という私の挑戦です!

ここでいきなりですが皆さんに問題です. この一風変わった関数の積分を考えてください.

ディリクレ関数の積分

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ の値は求まるか? 求まるならばその値を答えよ.}$$

$$\text{但し, } f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が } [0, 1] \text{ に属する有理数のとき}) \\ 0 & (x \text{ が } [0, 1] \text{ に属する無理数のとき}) \end{cases}$$

実はこれ, **数学Ⅲまでで習った積分では対応不可能**なんです. 高校までに習った積分, 「リーマン積分」には限界があったんです.

じゃあどうするか, ここで出てくるのが今回の主役: 「ルベグ積分」という新しい\*2積分です. それによるとこの値は **0** になります. 「お, やるやん」って感じですね.

がしかし, ルベグ積分はすぐに使えるわけではなく,

$\sigma$ -加法族 → Borel-集合体 → 測度 → 零集合 → 単関数 → 可測関数 → ルベグ積分

といった項目を頭に入れた上でやっと使えるようになります. さらに今回は  $\sigma$ -加法族 の前に,

集合と位相の準備 (写像・単射・全単射・制限など) と 濃度 の自己充足的紹介からはじめます.

上のフローチャートの, 左から3つ目に **測度** という概念が現れます. 測度とは以下で定められるものです.

**定義 1.** 長さ, 面積, 体積, はたまた質量や確率なども抽象化させた概念を**測度**という.

**測度** のセクションでは, 「そもそも測るとは何か?」を考えます. ルベグ積分特有の概念ですね.

数学Ⅲの頭のままでディリクレ関数の積分を考える際, こんな壁にぶつかります.

区間  $[0, 1]$  での有理数・無理数の点全体の集合の大きさ

$[0, 1]$  にある有理数・無理数の点全体の集合の「長さ」は何?

有理数全体と無理数全体とでは, どちらのほうが「大きい」?

こんなの, 高校数学でやっていません. この答えを掘り下げるところから **測度** を扱います.

ルベグ積分を定めた後は, 三大定理 (単調収束定理, ファトゥーの補題, 優収束定理) と, その先に展開される事柄 (確率との関係など) を紹介します.

最後まで読んでいただきありがとうございました.

\*1 連絡等はこちらをお願いします (YouTube) <https://www.youtube.com/channel/UCRgTRcw4MkOXXD94UiFiOHw>: 下層数学ちゃんねる

\*2 リーマン積分の拡張, と書くときより正確.