Suslin 木を壊しまくる話

でぃぐ (@fujidig)

順序集合としての実数直線 $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, <)$ は次の 3 つの性質で特徴づけられる。

1. 端点のない稠密な全順序、
2. 順序完備、
3. 可分である (すなわち、可算な稠密集合が存在する)。

Suslin はここで可分という条件を可算鎖条件という条件に弱めても特徴づけているか？と尋ねた。すなわち、次のような順序集合を **Suslin 直線**と呼ぶことにすると、「Suslin 直線は存在しない」という質問だ。

1. 端点のない稠密な全順序、
2. 順序完備、
3. 可算鎖条件を満たす (すなわち、互いに交わらない開区間は可算個しかない)、
4. 可分では**ない**。

実は、Suslin 直線が存在するか否かは ZFC から独立である。Suslin 直線が存在するモデルの一例は Gödel の構成可能宇宙 L である。一方で、Suslin 直線が存在しないモデルは**反復強制法**という手法によって得られる。今回話すのは、Suslin 直線が存在しないモデルの構成、言い換えれば可分性を可算鎖条件に弱めてもまだ $\mathbb{R}$ を特徴づけているようなモデルの構成である。

その証明のアイディアは「Suslin 木を片っ端から壊していく」というものだ。Suslin 木というのは組合せ論的な対象であり、Suslin 木の存在と Suslin 直線の存在は同値である。Suslin 木が一つあったらそれをもはや Suslin 木でなくすることは強制法によって可能である。したがって、素朴には Suslin 木を全部並べておいて、一個ずつ壊していくことを繰り返せばよいと思える。しかし、壊していく段階で「別の新しい Suslin 木が誕生する」可能性もある。それも加味してうまく反復する **bookkeeping** というテクニックがある。

発表の最初に復習はするつもりだが、1 ステップの強制法は知っておいた方が聴きやすいだろう。