ホモロジー代数非入門

@alg_d

R-加群の圏 R-**Mod** における図式 $\cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \to \cdots$ で良い条件を満たすものは完全列と呼ばれます．これに関しては様々なことが知られていて，蛇の補題などは有名です．蛇の補題は「元」を取り，図式を追跡すること (diagram chase) で証明できます．

ここではこれをなるべく一般の圏に対して一般化することを考えます．そのようなものでよく知られているのがアーベル圏です．一般のアーベル圏では「元」は取れないので代わりに以下のような方法が使われます．

- Mitchell の埋込定理を使う方法: これは大雑把にいうと任意の小アーベル圏はある R-**Mod** に「埋め込める」という定理です．これを使うことで，一般のアーベル圏でも「元を取る」証明を正当化することができます．
- generalized element を使う方法: [1] で使われている方法で，一般のアーベル圏においても generalized element により「元を取る」ことを正当化することができます．
- Quillen 完全圏: 短完全列を公理化して扱う方法です．
- 弱完全圏: [2] で使われている方法で，これも短完全列を公理化して扱う方法です．Quillen 完全圏とは異なり，弱完全圏は加法圏であることを仮定しません．そのおかげで **Grp** などにも応用ができます．

この講演では弱完全圏による方法を説明します．

参考文献

[1] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed.

[2] Amir Jafari, Weakly Exact Categories and the Snake Lemma, `https://arxiv.org/abs/0901.2372`