

弱い集合論における濃度について

岡本 和也

2026 年 10 月 12 日

はじめに

この発表では, ZFC より弱い集合論で, 濃度の性質がどこまで成り立つかについて解説します. 次の公理系を **Z-無限公理** と書きます.

- (外延性公理) $\forall A \forall B ((\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)) \Rightarrow A = B)$.
- (分出公理図式) $\varphi(x)$ を論理式, $\varphi(x)$ の A , x 以外の自由変数は $w_0, \dots, w_{i-1}$ で, B は φ の自由変数でないとする.
 $\forall w_0 \dots \forall w_{i-1} \forall A \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x))$.
- (対公理) $\forall x \forall y \exists P (x \in P \wedge y \in P)$.
- (和集合公理) $\forall A \exists U \forall y \in A \forall x \in y \ x \in U$.
- (冪集合公理) $\forall A \exists P \forall S ((\forall x (x \in S \Rightarrow x \in A)) \Rightarrow S \in P)$.

無限公理, 置換公理図式, 選択公理, 基礎の公理は必要がなければ使いません.

目標は Z^- – 無限公理で次を示すことです.

- ① 濃度の反対称律:
カントール=シュレーダー=ベルンシュタインの定理.
- ② 無限の濃度の冪等性:
整列可能な無限集合 A について $A \times A \cong A$.
- ③ 濃度を一段階増やす操作:
ハルトークス関数 A^+ と順序同型な整列順序 $H(A)$ の構成.

定義の復習

- (部分集合) $A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x \in A \ x \in B$.
- (内包的記法) 論理式 $P(x)$ について
 $(\exists A \forall x (P(x) \Rightarrow x \in A)) \Rightarrow \forall x (x \in \{a \mid P(a)\} \Leftrightarrow P(x))$.
well-defined. 存在は分出公理図式. 一意性は外延性公理.
- (内包的記法) 論理式 $P(x)$ と集合 A について
 $\forall x (x \in \{a \in A \mid P(a)\} \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x))$.
well-defined. $x \in A \wedge P(x)$ なら $x \in A$.
- (空集合) $\forall x \ x \notin \emptyset$.
well-defined. $\{x \mid x \neq x\}$ を考えればよい.
- (共通部分) $A \setminus B := \{x \in A \mid x \in B\}$.
- (差集合) $A \cap B := \{x \in A \mid x \notin B\}$.
- (対) $\{x, y\} := \{z \mid z = x \vee z = y\}$.
well-defined. 対公理.
- (1点集合) $\{x\} := \{x, x\}$.
- (順序対) $\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
- $0 := \emptyset$.
- $1 := \{0\}$.

定義の復習

- (和集合) $\bigcup_{i \in x} i := \{z \mid \exists i \in x \ z \in i\}$.
well-defined. 和集合公理.
- (和集合) $A \cup B := \bigcup_{i \in \{A, B\}} i$.
- (冪集合) $\mathcal{P}(A) := \{x \mid x \subset A\}$.
well-defined. 冪集合公理.
- (直積) $A \times B := \{z \mid \exists x \in A \ \exists y \in B \ z = \langle x, y \rangle\}$.
well-defined. $x \in A, y \in B$ について $\{x\}, \{x, y\} \subseteq A \cup B$ より $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. よって $\langle x, y \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.
- (直和) $A \amalg B := (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$.
- $xRy :\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R$.
- (同値類, 始切片)¹ $[x]_{(A,R)} := \{y \in A \mid yRx\}$.
- (商集合) $A/R := \{q \mid \exists x \in A \ q = [x]_{(A,R)}\}$.
well-defined. $x \in A$ について $[x]_{(A,R)} \subseteq A$ より $[x]_{(A,R)} \in \mathcal{P}(A)$.

¹定義を減らしたいのでまとめます.

定義の復習

- (定義域) $\text{dom}(f) := \{x \mid \exists y \ xfy\}$.
well-defined. xfy について $x \in \bigcup_{j \in (\bigcup_{i \in f} i)} j$.
- (像) $\text{im}(f) := \{y \mid \exists x \ xfy\}$.
well-defined. xfy について $y \in \bigcup_{j \in (\bigcup_{i \in f} i)} j$.
- (写像) $f: A \rightarrow B :\Leftrightarrow f \subseteq A \times B \wedge \forall x \in A \ \exists! y \in B \ xfy$.
- (値) $\forall f \forall x ((\exists! y \ xfy) \Rightarrow xf(f(x)))$.
- (合成) $g \circ f := \{w \mid \exists x \exists y \exists z (w = \langle x, z \rangle \wedge xfy \wedge ygz)\}$.
well-defined. xfy, ygz について $\langle x, z \rangle \in \text{dom}(f) \times \text{im}(g)$.
- (逆関係) $f^{-1} := \{z \mid \exists x \exists y (z = \langle x, y \rangle \wedge yfx)\}$.
well-defined. yfx について $\langle x, y \rangle \in \text{im}(f) \times \text{dom}(f)$.
- (恒等写像) $\text{id}_A := \{z \mid \exists x \in A \ z = \langle x, x \rangle\}$.
well-defined. $x \in A$ について $\langle x, x \rangle \in A \times A$.

- $f: A \rightarrow B$ が単射 $:\Leftrightarrow f: A \rightarrow B \wedge \forall x, y \in A (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.
- $f: A \rightarrow B$ が全射 $:\Leftrightarrow f: A \rightarrow B \wedge \forall y \in B (\exists x \in A y = f(x))$.
- (全単射) $f: A \cong B :\Leftrightarrow f: A \rightarrow B$ が全射かつ単射.
- $A \preccurlyeq B :\Leftrightarrow \exists f f: A \rightarrow B$ は単射.
- $A \prec B :\Leftrightarrow A \preccurlyeq B \wedge B \not\preccurlyeq A$.
- $A \cong B :\Leftrightarrow \exists f f: A \cong B$.

定義の復習

次の定理は「関係や写像の作り方」であって「関係や写像の定義」ではありません.

定理

- ① 論理式 $P(x, y)$ について
 $R := \{z \mid \exists x \in A \exists y \in B (z = \langle x, y \rangle \wedge P(x, y))\}$ とおくと
 $R \subseteq A \times B \wedge \forall x \in A \forall y \in B (xRy \Leftrightarrow P(x, y)).$
- ② 論理式 $P(x, y)$ について
 $f := \{z \mid \exists x \in A \exists y \in B (z = \langle x, y \rangle \wedge P(x, y))\}$ とおくと
 $(\forall x \in A \exists! y \in B P(x, y)) \Rightarrow (f: A \rightarrow B \wedge \forall x \in A P(x, f(x))).$
- ③ 項 $F(x)$ について $f := \{z \mid \exists x \in A \exists y \in B (z = \langle x, y \rangle \wedge F(x) = y)\}$ とおくと
 $(\forall x \in A F(x) \in B) \Rightarrow (f: A \rightarrow B \wedge \forall x \in A F(x) = f(x)).$

なお、代数学などで商集合からの写像を作るときは上記の定理の (2) を使っています.

定義の復習

- (関係の制限) 集合 R, A について二項関係 $R|_A \subseteq A \times A$ を次で定義する. $x, y \in A$ について $x(R|_A)y \Leftrightarrow xRy$.
- (制限写像) $f|_S := \{z \in f \mid \exists x \in S \exists y z = \langle x, y \rangle\}$.
 $f: A \rightarrow B, S \subseteq A$ なら $f|_S: S \rightarrow B, \forall x \in S f|_S(x) = f(x)$ がわかる.
- (像) $f[S] := \text{im}(f|_S)$.
 $f: A \rightarrow B, S \subseteq A$ なら $f[S] = \{y \mid \exists x \in S y = f(x)\}$ がわかる.
- (逆像) $f^{-1}[S] := \text{im}(f^{-1}|_S)$.
写像 $f: A \rightarrow B$ なら $f^{-1}[S] = \{x \in A \mid f(x) \in S\}$ がわかる.
- (配置集合) $\text{map}(A, B) := \{f \mid f: A \rightarrow B\}$
well-defined. $f: A \rightarrow B$ なら $f \in \mathcal{P}(A \times B)$.

集合論の基本的な内容は前提知識とします.

整列順序

濃度を調べるためには、整列順序が重要です。整列順序は三分律と、空でない部分集合が最小元をもつ二項関係です。

定義

二項関係 $< \subseteq A \times A$ について次をみたすとき $(A, <)$ を**整列順序 (well-order)** とよぶ。

三分律 $\forall x, y \in A \ x < y \vee x = y \vee y < x,$

整礎性 $\forall S \subseteq A \ (S \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in S \ \forall x \in S \ x \not< m).$

整列順序

整列順序は狭義の全順序です.

定理

整列順序 $(A, <)$ について次が成り立つ.

- ① (推移律) $\forall x, y, z \in A (x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z)$.
- ② (非反射律) $\forall x \in A x \not< x$.
- ③ (超限帰納法) 論理式 $P(a)$ について
 $(\forall x \in A (\forall y \in A (y < x \Rightarrow P(y))) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow \forall a \in A P(a)$.
- ④ $\forall S \subseteq A (S, <|_S)$ は整列順序.

証明. (1) $\{x, y, z\}$ に整礎性を使う.

(2) $\{x\}$ に整礎性を使う.

(3) 背理法. $S := \{a \in A \mid \neg P(a)\}$ とおいて整礎性を使う.

(4) 整列順序の定義.



順序保存

順序を保存する写像と順序同型を定義します.

定義

- (順序を保存する写像) $f: (A, R) \rightarrow_{\text{ord}} (B, S) :\Leftrightarrow f: A \rightarrow B \wedge \forall x, y \in A (xRy \Rightarrow f(x)Sf(y)).$
- (順序同型写像) $f: (A, R) \cong_{\text{ord}} (B, S) :\Leftrightarrow f: (A, R) \rightarrow_{\text{ord}} (B, S) \wedge \exists g: (B, S) \rightarrow_{\text{ord}} (A, R) (g \circ f = \text{id}_A \wedge f \circ g = \text{id}_B).$
- (順序同型) $(A, R) \cong_{\text{ord}} (B, S) :\Leftrightarrow \exists f f: (A, R) \cong_{\text{ord}} (B, S).$

定理

集合 A, R, B, S について, 次は同値.

- ① $f: (A, R) \cong_{\text{ord}} (B, S).$
- ② $f: A \cong B \wedge \forall x, y \in A (xRy \Leftrightarrow f(x)Sf(y)).$

定理

整列順序 $(A, <)$, $(B, <')$ と $f: (A, <) \rightarrow_{\text{ord}} (B, <')$ について次が成り立つ.

- ① $f: A \rightarrow B$ は単射.
- ② $\forall x, y \in A (f(x) <' f(y) \Rightarrow x < y)$.

証明. 三分律を使う. □

定理

整列順序 $(A, <)$, $(B, <')$ について, 次は同値.

- ① $f: (A, <) \cong_{\text{ord}} (B, <')$.
- ② $f: (A, <) \rightarrow_{\text{ord}} (B, <')$ は全射.

定理

整列順序 $(A, <)$ について次が成り立つ.

- ① 単射 $f: B \rightarrow A$ について, $(B, <')$ が整列順序かつ $f: (B, <') \rightarrow_{\text{ord}} (A, <)$ となる $<'$ が存在する.
- ② 全射 $f: A \rightarrow B$ について, $(B, <')$ が整列順序かつ $g: (B, <') \rightarrow_{\text{ord}} (A, <), f \circ g = \text{id}_B$ となる写像 g と $<'$ が存在する.

証明. (1) $<' \subseteq B \times B$ を次で定義すればよい. $a, b \in B$ について

$$a <' b \Leftrightarrow f(a) < f(b).$$

(2) $g: B \rightarrow A$ を次で定義すればよい. $a \in B$ について

$$g(a) := \min(f^{-1}[\{a\}]).$$

g は単射より (1) を使う.



定理

整列順序 $(A, <)$ について次が成り立つ.

- ① $\forall f: (A, <) \rightarrow_{\text{ord}} (A, <) \forall a \in A f(x) \not\prec x.$
- ② $\forall a \in A \neg \exists f: (A, <) \rightarrow_{\text{ord}} ([a]_{(A, <)}, < \upharpoonright_{[a]_{(A, <)}}).$
- ③ $\forall a, b \in A (([a]_{(A, <)}, < \upharpoonright_{[a]_{(A, <)}}) \cong_{\text{ord}} ([b]_{(A, <)}, < \upharpoonright_{[b]_{(A, <)}}) \Rightarrow a = b).$
- ④ $\forall I \subseteq A (I \neq A \Rightarrow (\forall x \in A \forall y \in I (x < y \Rightarrow x \in I)) \Rightarrow \exists a \in A I = [a]_{(A, <)}).$

証明. (1) 超限帰納法.

(2) (1) を使う.

(3) (2) を使う.

(4) 整礎性より $A \setminus I$ の最小元を a とおく.



比較可能定理

整列順序のクラスは三分律をみます.

定理 (Z – 無限公理) 整列順序の比較可能定理

整列順序 $(A, <)$, $(B, <')$ について

$$(A, <) \cong_{\text{ord}} (B, <') \vee$$

$$\exists y \in B \ (A, <) \cong_{\text{ord}} ([y]_{(B, <')}, <' \upharpoonright_{[y]_{(B, <')}}) \vee$$

$$\exists x \in A \ ([x]_{(A, <)}, < \upharpoonright_{[x]_{(A, <)}}) \cong_{\text{ord}} (B, <').$$

比較可能定理

証明. 二項関係 $f \subseteq A \times B$ を次で定義する. $x \in A, y \in B$ について

$$xfy :\Leftrightarrow ([x]_{(A,<)}, < \restriction_{[x]_{(A,<)}}) \cong_{\text{ord}} ([y]_{(B,<')}, <' \restriction_{[y]_{(B,<')}}).$$

次の4つの補題を示しておく.

- ① $f: \text{dom}(f) \rightarrow \text{im}(f)$.
- ② $\forall x, y \in \text{dom}(f) (x < y \Rightarrow f(x) <' f(y))$.
- ③ $\forall x \in A \forall y \in \text{dom}(f) (x < y \Rightarrow x \in \text{dom}(f))$.
- ④ $\forall x \in B \forall y \in \text{im}(f) (x <' y \Rightarrow x \in \text{im}(f))$.

場合分けして補題を使う.

- ① $\text{dom}(f) = A, \text{im}(f) = B$ のとき $f: (A, <) \cong_{\text{ord}} (B, <')$.
- ② $\text{dom}(f) = A, \text{im}(f) \neq B$ のとき $\text{im}(f) = [y]_{(B,<')}$ となる $y \in B$ が存在して $f: (A, <) \cong_{\text{ord}} ([y]_{(B,<')}, <' \restriction_{[y]_{(B,<')}})$.
- ③ $\text{dom}(f) \neq A, \text{im}(f) = B$ のとき $\text{dom}(f) = [x]_{(A,<)}$ となる $x \in A$ が存在して $f: ([x]_{(A,<)}, < \restriction_{[x]_{(A,<)}}) \cong_{\text{ord}} (B, <')$.
- ④ $\text{dom}(f) \neq A, \text{im}(f) \neq B$ のとき $\text{dom}(f) = [x]_{(A,<)}, \text{im}(f) = [y]_{(B,<')}$ となる $x \in A, y \in B$ が存在する. f の定義より xfy . よって $x \in \text{dom}(f) = [x]_{(A,<)}$ となり矛盾.

定義

集合 A, R, B, S について, 順序のクラスの順序 $\leq_{\text{ord}}$ と $<_{\text{ord}}$ を次で定義する.

$$(A, R) \leq_{\text{ord}} (B, S) :\Leftrightarrow \exists f \ f: (A, R) \rightarrow_{\text{ord}} (B, S).$$

$$(A, R) <_{\text{ord}} (B, S) :\Leftrightarrow (B, S) \not\leq_{\text{ord}} (A, R).$$

このあと定義する順序数を含めて, 等号と不等号は次のように対応しています.

数	集合	整列順序	順序数
$A = B$	$A \cong B$	$A \cong_{\text{ord}} B$	$A = B$
$A \leq B$	$A \preceq B$	$A \leq_{\text{ord}} B$	$A \subseteq B$
$A < B$	$A \prec B$	$A <_{\text{ord}} B$	$A \in B$

定理

集合 A, R, B, S, C, T について, 次が成り立つ.

- ① (反射律) $(A, R) \leq_{\text{ord}} (A, R)$.
- ② (推移律) $(A, R) \leq_{\text{ord}} (B, S) \Rightarrow (B, S) \leq_{\text{ord}} (C, T) \Rightarrow (A, R) \leq_{\text{ord}} (C, T)$.

順序保存

整列順序のクラスと順序 $\leq_{\text{ord}}$ について、同型を除いて整列順序のような性質を持っています。

定理

整列順序 $(A, <)$, $(B, <')$ について、次が成り立つ。

- ① $(A, <) \leq_{\text{ord}} (B, <') \Rightarrow A \preceq B$.
- ② $(A, <) <_{\text{ord}} (B, <') \Leftrightarrow \exists y \in B \ (A, <) \cong_{\text{ord}} ([y]_{(B, <')}, <' \upharpoonright [y]_{(B, <')})$.
- ③ (三分律)
 $(A, <) <_{\text{ord}} (B, <') \vee (A, <) \cong_{\text{ord}} (B, <') \vee (B, <') <_{\text{ord}} (A, <)$.
- ④ (線形性) $(A, <) \leq_{\text{ord}} (B, <') \vee (B, <') \leq_{\text{ord}} (A, <)$.
- ⑤ (反対称律)
 $(A, <) \leq_{\text{ord}} (B, <') \Rightarrow (B, <') \leq_{\text{ord}} (A, <) \Rightarrow (A, <) \cong_{\text{ord}} (B, <')$.

証明. (2)~(5) 整列順序の比較可能定理.



定理 (整列順序のクラスの整礎性)

論理式 $P(A, R)$ について

$$\begin{aligned} (\exists B \exists S P(B, S)) \Rightarrow (\forall A \forall R (P(A, R) \Rightarrow (A, R) \text{ は整列順序})) \Rightarrow \\ \exists M \exists < (P(M, <) \wedge \forall A \forall R (P(A, R) \Rightarrow (M, <) \leq_{\text{ord}} (A, R))). \end{aligned}$$

証明. $\exists B \exists S P(B, S)$ とする.

(i) $\forall A \forall R (P(A, R) \Rightarrow (B, S) \leq_{\text{ord}} (A, R))$ のとき, B を M , S を $<$ とおけばよい.

(ii) $\exists A \exists R (P(A, R) \wedge (A, R) <_{\text{ord}} (B, S))$ のとき,

$$W := \{x \in B \mid \exists C \exists T (P(C, T) \wedge (C, T) \cong_{\text{ord}} ([x]_{(B,S)}, S|_{[x]_{(B,S)}}))\}$$

とおく. $W \subseteq B, W \neq \emptyset$ と整礎性より $\forall x \in W \ x \not\prec m$ となる $m \in W$ が存在する. W の定義より $m \in B$ かつ

$P(M, <), (M, <) \cong_{\text{ord}} ([m]_{(B,S)}, S|_{[m]_{(B,S)}})$ となる $M, <$ が存在する.

よって $(M, <) <_{\text{ord}} (B, S)$.

$P(A, R)$ とする. $(A, R) <_{\text{ord}} (M, <)$ とすると $(A, R) <_{\text{ord}} (B, S)$. よって $(A, R) \cong_{\text{ord}} ([x]_{(B,S)}, S|_{[x]_{(B,S)}})$ となる $x \in B$ が存在する. $x \in W$ より $x \not\prec m$. ゆえに

$$(M, <) \cong_{\text{ord}} ([m]_{(B,S)}, S|_{[m]_{(B,S)}}) \leq_{\text{ord}} ([x]_{(B,S)}, S|_{[x]_{(B,S)}}) \cong_{\text{ord}} (A, R)$$

となり仮定と矛盾. よって $(M, <) \leq_{\text{ord}} (A, R)$.



定理 (整列順序のクラスの超限帰納法)

論理式 $P(A, R)$ について

$$\begin{aligned} & (\forall A \forall R ((A, R) \text{ は整列順序} \Rightarrow \\ & (\forall B \forall S ((B, S) \text{ は整列順序} \Rightarrow (B, S) <_{\text{ord}} (A, R) \Rightarrow P(B, S))) \\ & \Rightarrow P(A, R))) \Rightarrow \\ & \forall A \forall R ((A, R) \text{ は整列順序} \Rightarrow P(A, R)). \end{aligned}$$

証明. 背理法. $Q(A, R) :\Leftrightarrow (A, R) \text{ は整列順序} \wedge \neg P(A, R)$ に整列順序のクラスの整礎性を使う. □

順序数

順序数は所属関係 $\in$ が整列順序となる推移的集合のことです。

定義

集合 a が次をみたすとき**順序数**とよび, $a : \mathbf{On}$ とかく.

三分律 $\forall x, y \in a (x \in y \vee x = y \vee y \in x),$

整礎性 $\forall S \subseteq a (S \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in S \forall x \in S x \notin m),$

推移的集合 $\forall x \in a \forall y \in x y \in a.$

定義

集合 a の**後続者関数** $\text{suc}(a)$ を次で定義する.

$$\text{suc}(a) := a \cup \{a\}.$$

順序数の性質

定理

- ① (推移性) $\forall a : \mathbf{On} \ \forall x, y, z \in a \ (x \in y \Rightarrow y \in z \Rightarrow x \in z).$
- ② (非反射性) $\forall a : \mathbf{On} \ \forall x \in a \ x \notin x.$
- ③ ($\mathbf{On}$ の非反射性) $\forall a : \mathbf{On} \ a \notin a.$
- ④ ($\mathbf{On}$ の推移性) $\forall a : \mathbf{On} \ \forall b \in a \ b : \mathbf{On}.$
- ⑤ $\forall a, b : \mathbf{On} \ a \cap b : \mathbf{On}.$
- ⑥ $\forall a, b : \mathbf{On} \ (a \subseteq b \Leftrightarrow a \in b \vee a = b).$
- ⑦ ($\mathbf{On}$ の三分律) $\forall a, b : \mathbf{On} \ (a \in b \vee a = b \vee b \in a).$
- ⑧ ($\mathbf{On}$ の整礎性) $\forall S \neq \emptyset \ ((\forall a \in S \ a : \mathbf{On}) \Rightarrow \exists m \in S \ \forall a \in S \ a \notin m).$
- ⑨ (順序数全体は真クラス) $\neg \exists O \forall a : \mathbf{On} \ a \in O.$
- ⑩ $\forall I : \text{推移的集合} \ ((\forall a \in I \ a : \mathbf{On}) \Rightarrow I : \mathbf{On}).$
- ⑪ $0 : \mathbf{On}.$
- ⑫ $\forall a : \mathbf{On} \ \text{suc}(a) : \mathbf{On}.$

順序数の性質

証明. (1) $\{w \in a \mid w = x \vee w = y \vee w = z\}$ に整礎性を使う.

(2) $\{w \in a \mid w = x\}$ に整礎性を使う.

(3) (1) から明らか.

(4), (5) 順序数の定義.

(6) $(\Leftarrow)$ b が推移的集合より明らか. $(\Rightarrow)$ $b \setminus a = \emptyset$ のとき $a = b$.

$b \setminus a \neq \emptyset$ のとき b の整礎性より $b \setminus a$ の最小元 m が存在する. 外延性公理より $a = m$ となり $a = m \in b$.

(7) (5) より $a \cap b$: **On**. $a \cap b \subseteq a, a \cap b \subseteq b$ と (6) より

$$a \cap b \in a \vee a \cap b = a,$$

$$a \cap b \in b \vee a \cap b = b$$

となるから 4 通りの場合分けをすればよい.

順序数の性質

(8) 仮定より $x \in S$ が存在する.

(i) $\forall a \in S \ a \notin x$ のとき x を m とおけばよい.

(ii) $\exists y \in S \ y \in x$ のとき x の整礎性より $S \cap x$ に最小元 m が存在する.
 $a \in S$ として a, x に (7) を使う.

(9) $\exists O \forall a : \mathbf{On} \ a \in O$ とすると

$$O' := \{a \mid a : \mathbf{On}\}$$

が存在する. (7), (8), (4) より $O' : \mathbf{On}$. よって $O' \in O'$ となり (3) と矛盾.

(10) (7), (8) を使う.

(11) 順序数の定義.

(12) (10) を使う.



順序数の性質

定理

論理式 $P(a)$ について次が成り立つ.

- ① $(\exists b : \mathbf{On} \ P(b)) \Rightarrow \exists m : \mathbf{On} \ (P(m) \wedge \forall a (P(a) \Rightarrow a \notin m)).$
- ② ($\mathbf{On}$ 上の最小元の well-defined)
 $(\exists b : \mathbf{On} \ P(b)) \Rightarrow \exists! m : \mathbf{On} \ (P(m) \wedge \forall a : \mathbf{On} \ (P(a) \Rightarrow m \subseteq a)).$
- ③ ($\mathbf{On}$ 上の超限帰納法)
 $(\forall b : \mathbf{On} \ (\forall c \in b \ P(c)) \Rightarrow P(b)) \Rightarrow \forall a : \mathbf{On} \ P(a).$

証明. (1) (i) $\forall a (P(a) \Rightarrow a \notin b)$ のとき b を m とおけばよい.
(ii) $\exists a \in b \ P(a)$ のとき $S := \{x \in b \mid P(x)\}$ とおき S の最小元 m をとればよい.
(2) (1) を使う.
(3) 背理法. $Q(a) :\Leftrightarrow \neg P(a)$ に (1) を使う. □

超限再帰

定義

論理式 $P(a, s, y)$ について, 写像 f の a 近似 $\text{App}_P(a, f)$ を次で定義する.

$$\text{App}_P(a, f) : \Leftrightarrow (\exists A f : a \rightarrow A) \wedge \forall x \in a P(x, f|_x, f(x)).$$

定理 (近似の制限の一意性)

論理式 $P(a, s, y)$ について, 次が成り立つ.

$$(\forall a : \mathbf{On} \forall s((\exists A s : a \rightarrow A) \Rightarrow \exists! y P(a, s, y))) \Rightarrow$$

$$\forall a : \mathbf{On} \forall b \forall f \forall g (a \subseteq b \Rightarrow \text{App}_P(a, f) \Rightarrow \text{App}_P(b, g) \Rightarrow g|_a = f).$$

証明. $\forall c \in a f(c) = g(c)$ を a 上の超限帰納法で証明する. $c \in a$ について $\forall x \in c f(x) = g(x)$ とする. a は推移的集合より $c \subseteq a \subseteq b$. 超限帰納法の仮定より $f|_c = g|_c$. App_P の仮定より $P(c, f|_c, f(c))$, $P(c, g|_c, g(c))$. 代入して $P(c, f|_c, g(c))$. 仮定の一意性より $f(c) = g(c)$. 超限帰納法より $\forall c \in a f(c) = g(c)$. よって $g|_a = f$. □

「公理を使わず, うまく定義できる条件を見つける」ことを, ここから何度か使います.

定義

論理式 $P(a, s, y)$ について, P が**超限再帰をもつ**ことを次で定義する.

$$\forall a : \mathbf{On} \ (\forall b \in a \ \exists! f \ \text{App}_P(b, f)) \Rightarrow$$

$$\exists Y \forall b \in a \ \exists y \in Y \ \exists f (\text{App}_P(b, f) \wedge P(b, f, y)).$$

置換公理図式を仮定すれば超限帰納法をもつことが証明できます.

定理 (超限再帰の制限の well-defined)

論理式 $P(a, s, y)$ について, 次が成り立つ.

P が超限再帰をもつ $\Rightarrow$

$(\forall a : \mathbf{On} \, \forall s ((\exists A \, s : a \rightarrow A) \Rightarrow \exists ! y \, P(a, s, y))) \Rightarrow \forall a : \mathbf{On} \, \exists ! f \, \text{App}_P(a, f).$

超限再帰

証明. 超限帰納法で示す. $a : \mathbf{On}$, $\forall b \in a \exists! f \text{ App}_P(b, f)$ とする.
(存在) P が超限再帰をもつから, 超限帰納法の仮定より

$$\exists Y \forall b \in a \exists y \in Y \exists f (\text{App}_P(b, f) \wedge P(b, f, y)).$$

仮定から y の一意性がわかる. よって, 次をみたす写像 $g: a \rightarrow Y$ が存在する.

$$\forall b \in a \exists f (\text{App}_P(b, f) \wedge P(b, f, g(b))).$$

$b \in a$ とすると $\text{App}_P(b, f)$, $P(b, f, g(b))$ となる f が存在する.

$f = g|b$ を示す. $c \in b$ とすると $P(c, f|c, f(c))$. $c \in b \in a$ より

$\text{App}_P(c, h)$, $P(c, h, g(c))$ となる h が存在する. $c : \mathbf{On}$, $c \subseteq b$ と近似の制限の一意性より $f|c = h$. $P(c, h, f(c))$, $P(c, h, g(c))$ と仮定の一意性より $f(c) = g(c) = g|b(c)$.

よって $f = g|b$ となり $P(b, g|b, g(b))$. ゆえに $\text{App}_P(a, g)$.

(一意性) $\text{App}_P(a, g')$ とする. $a : \mathbf{On}$, $a \subseteq a$ と近似の制限の一意性より $g = g|a = g'$. □

定義 (超限再帰)

論理式 $P(a, s, y)$ について, P が超限再帰をもち,

$$(\forall a : \mathbf{On} \ \forall s ((\exists A \ s : a \rightarrow A) \Rightarrow \exists! y \ P(a, s, y)))$$

かつ $a : \mathbf{On}$ とする.

- ① (制限) $\exists! f \ \text{App}_P(a, f)$ となるただ1つの f を $\text{Rst}_P(a)$ と定義する.
- ② (超限再帰) $\exists! y \ P(a, \text{Rst}_P(a), y)$ となるただ1つの y を $\text{Rec}_P(a)$ と定義する.

定理 (超限再帰の定義の well-defined)

論理式 $P(a, s, y)$ について, 次が成り立つ.

P が超限再帰をもつ $\Rightarrow$

$$(\forall a : \mathbf{On} \ \forall s((\exists A \ s : a \rightarrow A) \Rightarrow \exists! y \ P(a, s, y))) \Rightarrow$$

$$\forall a : \mathbf{On} \ \forall b \in a \ \text{Recu}_P(b) = \text{Rst}_P(a)(b).$$

証明. $a : \mathbf{On}, b \in a$ より $b \subseteq a$. 定義より

$\text{App}_P(a, \text{Rst}_P(a)), \text{App}_P(b, \text{Rst}_P(b))$. 近似の制限の一意性より
 $\text{Rst}_P(a)|b = \text{Rst}_P(b)$.

$b \in a$ より $P(b, \text{Rst}_P(a)|b, \text{Rst}_P(a)(b))$.

$P(b, \text{Rst}_P(b), \text{Rst}_P(a)(b)), P(b, \text{Rst}_P(b), \text{Recu}_P(b))$ と仮定の一意性より
 $\text{Recu}_P(b) = \text{Rst}_P(a)(b)$. □

無限公理の回避

無限公理が使えないので, 自然数全体 $\mathbb{N}$ を構成できません. $\mathbb{N}$ を回避するために, 直接, 自然数を定義します.

定義 (Z^- – 無限公理)

集合 n が次をみたすとき**自然数**とよび, $n : \mathbf{N}$ と書く.

- ① $n : \mathbf{On}$
- ② $\forall m \in \text{succ}(n) \ (m = \emptyset \vee \exists k \ m = \text{succ}(k)).$

定理

- ① ($\mathbf{N}$ の推移性) $\forall n : \mathbf{N} \forall m \in n \ m : \mathbf{N}$.
- ② $0 : \mathbf{N}$.
- ③ $\forall n : \mathbf{N} \text{ suc}(n) : \mathbf{N}$.
- ④ $1 : \mathbf{N}$.
- ⑤ $\forall n : \mathbf{N} (n = 0 \vee \exists m : \mathbf{N} \ n = \text{suc}(m))$.

証明. (1), (2), (3) 自然数の定義.

(4) $1 = \{0\} = 0 \cup \{0\} = \text{suc}(0) : \mathbf{N}$.

(5) $n \in \text{suc}(n)$ と自然数の定義を使ったあとに (1) を使う.



定理

論理式 $P(a)$ について次が成り立つ.

- ① $(\exists k : \mathbf{N} P(k)) \Rightarrow \exists m : \mathbf{N} (P(m) \wedge \forall n (P(n) \Rightarrow n \notin m)).$
- ② ($\mathbf{N}$ 上の最小元の well-defined)
 $(\exists k : \mathbf{N} P(k)) \Rightarrow \exists ! m : \mathbf{N} (P(m) \wedge \forall n : \mathbf{N} (P(n) \Rightarrow m \subseteq n)).$
- ③ ($\mathbf{N}$ 上の数学的帰納法)
 $(\forall m : \mathbf{N} (\forall k \in m P(k)) \Rightarrow P(m)) \Rightarrow \forall n : \mathbf{N} P(n).$
- ④ ($\mathbf{N}$ 上の数学的帰納法)
 $P(0) \Rightarrow (\forall m : \mathbf{N} (P(m) \Rightarrow P(\text{suc}(m)))) \Rightarrow \forall n : \mathbf{N} P(n).$

証明. (1), (2) $Q(n) :\Leftrightarrow n : \mathbf{N} \wedge P(n)$ において, **On** 版の定理を使う.
(3) $Q(n) :\Leftrightarrow n : \mathbf{N} \Rightarrow P(n)$ において, **On** 上の超限帰納法を使う.
(4) 自然数が 0 か $\text{suc}(n)$ の形で書けることと (3) を使う. □

定理 (近似の制限の一意性)

論理式 $P(n, s, y)$ について, 次が成り立つ.

$$(\forall n : \mathbf{N} \ \forall s((\exists A \ s : n \rightarrow A) \Rightarrow \exists ! y \ P(n, s, y))) \Rightarrow$$

$$\forall m : \mathbf{N} \ \forall n \forall f \forall g (m \subseteq n \Rightarrow \text{App}_P(m, f) \Rightarrow \text{App}_P(n, g) \Rightarrow g|_m = f).$$

証明. $\mathbf{On}$ の証明と同様.



自然数上の再帰

On は超限再帰をもつかの条件がありましたが, 自然数上の再帰はいつでも定義できます.

定理 (自然数上の再帰の制限の well-defined)

論理式 $P(n, s, y)$ について, 次が成り立つ.

$$(\forall n : \mathbf{N} \forall s((\exists A \ s : n \rightarrow A) \Rightarrow \exists ! y \ P(n, s, y))) \Rightarrow \forall n : \mathbf{N} \exists ! f \ \text{App}_P(n, f).$$

自然数上の再帰

証明. (存在) 数学的帰納法で $\forall n : \mathbf{N} \exists f \text{ App}_P(n, f)$ を示す.

(i) $0 : 0 \rightarrow 0$ かつ $\forall x \in 0 \ P(x, 0|x, 0(x))$ より $\text{App}_P(0, 0)$.

(ii) $n : \mathbf{N}$, $\exists f \text{ App}_P(n, f)$ とする. 定義より $f : n \rightarrow A$ となる A が存在する. 仮定より $P(n, f, y)$ となる y がただ1つ存在する. $f \cup \{\langle n, y \rangle\}$ を g とおく. $\{\langle n, y \rangle\} : \{n\} \rightarrow \{y\}$ より $g = f \cup \{\langle n, y \rangle\} : \text{suc}(n) \rightarrow A \cup \{y\}$.

$x \in \text{suc}(n)$ とする.

$x \in n$ のとき $g|x = f|x, g(x) = f(x)$ より $P(x, g|x, g(x))$.

$x = n$ のとき $g|x = f, g(x) = y$ より $P(x, g|x, g(x))$.

よって $\text{App}_P(\text{suc}(n), g)$.

(一意性) $\text{App}_P(n, f), \text{App}_P(n, f')$ とする. $n : \mathbf{N}, n \subseteq n$ と近似の制限の一意性より $f = f'|_n = f'$. □

自然数上の再帰

定義 (自然数上の再帰)

論理式 $P(n, s, y)$ について,

$$(\forall n : \mathbf{N} \ \forall s ((\exists A \ s : n \rightarrow A) \Rightarrow \exists! y \ P(n, s, y)))$$

かつ $n : \mathbf{N}$ とする.

- ① (制限) $\exists! f \ \text{App}_P(n, f)$ となるただ1つの f を $\text{Rst}_P^{\mathbf{N}}(n)$ と定義する.
- ② (再帰) $\exists! y \ P(n, \text{Rst}_P^{\mathbf{N}}(n), y)$ となるただ1つの y を $\text{Recu}_P^{\mathbf{N}}(n)$ と定義する.

定理 (再帰的定義の well-defined)

論理式 $P(n, s, y)$ について, 次が成り立つ.

$$(\forall n : \mathbf{N} \ \forall s((\exists A \ s : n \rightarrow A) \Rightarrow \exists! y \ P(n, s, y))) \Rightarrow$$

$$\forall n : \mathbf{N} \ \forall m \in n \ \text{Recu}_P^{\mathbf{N}}(m) = \text{Rst}_P^{\mathbf{N}}(n)(m).$$

証明. **On** の証明と同様.



よく使う再帰の例 (0)

集合 d と項 $F(n, s)$ について $P(n, s, y)$ を次のようにおく.

$$P(n, s, y) :\Leftrightarrow n = 0 \wedge y = d \vee \exists m : \mathbf{N} (n = \text{suc}(m) \wedge y = F(n, s(m))).$$

このとき自然数上の再帰の仮定

$$\forall n : \mathbf{N} \forall s((\exists A s : n \rightarrow A) \Rightarrow \exists ! y P(n, s, y))$$

をみたすため, 再帰的に定義できる. 計算すると次が証明できる.

- $\text{Recu}_P^{\mathbf{N}}(0) = d,$
- $\forall n : \mathbf{N} \text{Recu}_P^{\mathbf{N}}(\text{suc}(n)) = F(n, \text{Recu}_P^{\mathbf{N}}(n)).$

よって $\mathbf{N}$ 上に通常のたし算, かけ算, 冪が再帰的に定義できる.

数と再帰的定義の注意

- 数学的帰納法と再帰的定義は別の概念です.
- 再帰的定義をするときは well-defined を確かめてください.
- 無限公理なしで, 整数のクラス $\mathbf{Z}$ を定義できます.

$$n : \mathbf{Z} :\Leftrightarrow n : \mathbf{N} \vee \exists m : \mathbf{N} (n = \langle m, 0 \rangle \wedge m \neq 0).$$

頑張って $\mathbf{Z}$ 上の剰余 $\text{mod}_{\mathbf{Z}}$ と最小公倍数 $\text{gcd}_{\mathbf{Z}}$ を定義すると, 有理数のクラス $\mathbf{Q}$ が定義できます.

$$q : \mathbf{Q} :\Leftrightarrow q : \mathbf{Z} \vee \exists m : \mathbf{Z} \exists n : \mathbf{N}$$

$$(q = \langle m, n \rangle \wedge \text{gcd}_{\mathbf{Z}}(m, n) = 1 \wedge n \neq 0 \wedge m \text{ mod}_{\mathbf{Z}} n \neq 0).$$

- 無限公理を仮定した場合, 自然数全体の集合を $\mathbf{N} := \{n \mid n : \mathbf{N}\}$ と定義できます. さらに, 通常の部分集合 $\subseteq$ の意味で $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$ となるように定義できます. 概要を述べると, 演算や関係を保存する単射 $i : A \rightarrow B$ について $A \cap (B \setminus \text{im}(i)) \neq \emptyset$ をみたすなら $B' := A \cup (B \setminus \text{im}(i))$ として, B' に B の演算や関係のコピーを作れば $A \subseteq B'$ とできます.

自然数上の再帰

よく使う再帰の例 (1)

集合 d, e と項 $F(n, s)$ について $P(n, s, y)$ を次のようにおく.

$$P(n, s, y) : \Leftrightarrow n = 0 \wedge y = d \vee n = 1 \wedge y = e \vee$$

$$\exists m : \mathbf{N} (n = \text{suc}(m) \wedge m \neq 0 \wedge y = F(n, s(m))).$$

このとき自然数上の再帰の仮定

$$\forall n : \mathbf{N} \forall s ((\exists A s : n \rightarrow A) \Rightarrow \exists ! y P(n, s, y))$$

をみたすため、再帰的に定義できる. 計算すると次が証明できる.

- $\text{Recu}_P^{\mathbf{N}}(0) = d,$
- $\text{Recu}_P^{\mathbf{N}}(1) = e,$
- $\forall n : \mathbf{N} (n \neq 0 \Rightarrow \text{Recu}_P^{\mathbf{N}}(\text{suc}(n)) = F(n, \text{Recu}_P^{\mathbf{N}}(n))).$

自然数上の再帰

定義

集合 R と $n : \mathbf{N}$ について合成の冪 R^n を再帰的に定義する.

- $R^0 := \text{id}_{\text{dom}(R)}$,
- $R^1 := R$,
- $\forall n : \mathbf{N} \ (n \neq 0 \Rightarrow R^{\text{suc}(n)} := R \circ R^n)$.

たとえば, R が二項関係のときは 1 以上の自然数を使います. 今回は話しません, ここから無限公理を使わず, 推移閉包を定義できます. 写像の冪をこのあと使います.

定理

集合 A と写像 $f : A \rightarrow A$ について次が成り立つ.

- ① $f^0 = \text{id}_A$.
- ② $\forall n : \mathbf{N} \ f^{\text{suc}(n)} = f \circ f^n$.

カントール＝シュレーダー＝ベルンシュタインの定理

単射の存在 $\Leftarrow$ は弱い反対称律をみます.

定理

- ① $\forall A \forall B \subseteq A (A \Leftarrow B \Rightarrow A \cong B).$
- ② (カントール＝シュレーダー＝ベルンシュタインの定理)
 $\forall A \forall B (A \Leftarrow B \Rightarrow B \Leftarrow A \Rightarrow A \cong B).$

以下, CSB と省略します.

カントール＝シュレーダー＝ベルンシュタインの定理

比較のために、まず無限公理を仮定した公理系 Z^- で証明します。

Z^- 上の証明. (1) 単射 $f: A \rightarrow B$ について集合 C, D を次のようにおく。

$$C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^n[A] \setminus f^n[B]),$$

$$D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^n[B] \setminus f^{n+1}[A]) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n[A].$$

数学的帰納法を使うと

$A = C \cup D$, $B = f[C] \cup D$, $C \cap D = \emptyset$, $f[C] \cap D = \emptyset$ がわかる。

$f|_C: C \cong f[C]$, $\text{id}_D: D \cong D$ より $(f|_C) \cup \text{id}_D: C \cup D \cong f[C] \cup D$. よって $A = C \cup D \cong f[C] \cup D = B$.

(2) 仮定より単射 $f: A \rightarrow B$ が存在する. $\text{im}(f) \subseteq B$, $B \preccurlyeq A \cong \text{im}(f)$ と (1) より $A \cong \text{im}(f) \cong B$. □

カントール＝シュレーダー＝ベルンシュタインの定理

CSB の証明で無限公理が必要だったのは C, D の構成だけです. この C, D を $\mathbf{N}, +$ を使わない形に変形すれば無限公理を外せます.

定理 (Z – 無限公理)

集合 A と $B \subseteq A$, 単射 $f: A \rightarrow B$ について

$$C := \{y \mid \exists n : \mathbf{N} ((\exists x \in A f^n(x) = y) \wedge \neg \exists x \in B f^n(x) = y)\},$$

$$D := \{y \mid (\exists n : \mathbf{N} ((\exists x \in B f^n(x) = y) \wedge \neg \exists x \in A f^{\text{suc}(n)}(x) = y)) \vee \\ \forall n : \mathbf{N} \exists x \in A f^n(x) = y\}$$

とおくと $A = C \cup D$, $B = f[C] \cup D$, $C \cap D = \emptyset$, $f[C] \cap D = \emptyset$.

証明. 数学的帰納法.



カントール＝シュレーダー＝ベルンシュタインの定理

以降は、無限公理を仮定したときの証明と同じです。

定理 (Z – 無限公理)

- ① 【再掲】 $\forall A \forall B \subseteq A (A \preccurlyeq B \Rightarrow A \cong B)$.
- ② 【再掲】 (CSB) $\forall A \forall B (A \preccurlyeq B \Rightarrow B \preccurlyeq A \Rightarrow A \cong B)$.
- ③ (カントールの対角線論法)
 $\forall A \forall B \forall f: A \rightarrow B \{x \in A \mid x \notin f(x)\} \notin \text{im}(f)$.
- ④ (カントールの定理) $\forall A A \prec \mathcal{P}(A)$.

証明. (1), (2) 略.

(3) $D := \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$ とおく. $D \in \text{im}(f)$ とすると $D = f(x)$ となる $x \in A$ が存在する. $x \in f(x)$ とすると $x \in f(x) = D$ より $x \notin f(x)$ となり矛盾. よって $x \notin f(x)$ となり $x \in D = f(x)$ と矛盾.

(4) 写像 $i: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ を $i(x) := \{x\}$ と定義する. i は単射より $A \preccurlyeq \mathcal{P}(A)$. $\mathcal{P}(A) \preccurlyeq A$ とすると CSB より $A \cong \mathcal{P}(A)$. よって全単射 $f: A \cong \mathcal{P}(A)$ が存在する. $\{x \in A \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(A) = \text{im}(f)$ となりカントールの対角線論法より矛盾.



有限集合

無限公理を使わずに、有限集合と無限集合が定義できます。

定義 (Z⁻ – 無限公理)

集合 A が次をみたすとき A を**有限集合**とよぶ。

$$A : \text{有限集合} :\Leftrightarrow \exists n : \mathbf{N} \ A \cong n.$$

定義 (Z⁻ – 無限公理)

集合 A が次をみたすとき A を**無限集合**とよぶ。

$$A : \text{無限集合} :\Leftrightarrow \neg A : \text{有限集合}.$$

有限集合

有限集合の帰納法が成り立つので、多くの有限集合の性質が示せます。

定理 (Z-無限公理) (有限集合の帰納法)

論理式 $P(A)$ について次が成り立つ。

$$P(\emptyset) \Rightarrow (\forall B : \text{有限集合 } \forall a \notin B (P(a) \Rightarrow P(B \cup \{a\}))) \Rightarrow \\ \forall A : \text{有限集合 } P(A).$$

証明. 数学的帰納法で次を示せばよい。

$$\forall n : \mathbf{N} \ \forall A \forall f : n \cong A \ P(A).$$

- (i) $f : 0 \cong A$ とすると $A = \emptyset$. 仮定より $P(A)$.
- (ii) $n : \mathbf{N}$, $\forall A \forall f : n \cong A \ P(A)$ とする. 集合 B について $g : \text{suc}(n) \cong B$ とする. $g|n : n \cong B \setminus \{f(n)\}$ より $B \setminus \{f(n)\}$ は有限集合かつ $P(B \setminus \{f(n)\})$. 仮定より $P((B \setminus \{f(n)\}) \cup \{f(n)\})$. よって $P(B)$. □

整列可能

定義

集合 A について $(A, <)$ が整列順序となる $<$ が存在するとき, **整列可能**とよぶ.

定義

整列順序 $(A, <)$ について, 後続者関数

$\text{suc}_{(A, <)}: \{a \mid a \in A \wedge \exists b \in A \ a < b\} \rightarrow A$ を次で定義する.

$$a < \text{suc}_{(A, <)}(a) \wedge \forall b \in A \ (a < b \Rightarrow b \not< \text{suc}_{(A, <)}(a)).$$

well-defined. 整列順序の整礎性.



整列可能

定理

無限集合 A が整列可能なら, 集合 p について $A \amalg \{p\} \cong A$.

証明. 仮定より $(A, <)$ が整列順序となる $<$ が存在する. A は無限集合より $A \neq \emptyset$. 整礎性より $\forall a \in A \ a \not\prec o$ となる $o \in A$ が存在する.

$N := \{n \mid n \in A \wedge [n]_{(A, <)} \text{は有限集合}\}$ とおくと, 次が証明できる.

$$o \in N, \forall n \in N \text{ suc}_{(A, <)}(n) \in N.$$

よって全単射 $f : A \cong A \setminus \{o\}$ を次で定義できる.

$$f(a) := \begin{cases} \text{suc}_{(A, <)}(a) & (a \in N) \\ a & (a \in A \setminus N). \end{cases}$$

ゆえに

$$A \amalg \{p\} \cong (A \setminus \{o\}) \amalg \{o\} \cong (A \setminus \{o\}) \cup \{o\} = A.$$

基数的

基数を一般化します.

定義

整列順序 $(A, <)$ が次をみたすとき $(A, <)$ は**基数的**とよぶ.

$$\forall a \in A \ A \not\preceq [a]_{(A, <)}. \quad \text{}$$

定理

整列順序 $(A, <)$ について次は同値.

- ① $(A, <)$ は基数的.
- ② $\forall B \forall <' ((B, <') : \text{整列順序} \Rightarrow (B, <') <_{\text{ord}} (A, <) \Rightarrow A \not\preceq B).$

極限整列順序

このあと、最大元が存在しない整列順序を使います。

定義

整列順序 $(A, <)$ が次をみたすとき**極限整列順序**とよぶ。

- ① $A \neq \emptyset$,
- ② $\forall x \in A \exists y \in A x < y$.

定理

基数的な無限整列順序 $(A, <)$ は極限整列順序。

証明. A は無限集合より $A \neq \emptyset$.

背理法で示す. $\exists m \in A \exists y \in A m \not< y$ とすると $[m]_{(A, <)}$ は整列可能な無限集合. よって

$$A = [m]_{(A, <) } \cup \{m\} \cong [m]_{(A, <) } \amalg \{m\} \cong [m]_{(A, <) }$$

となり基数的であることと矛盾.



定義

整列順序 $(A, <)$ について二項関係 $<_x \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$ を次で定義する.

$w, x, y, z \in A$ について

$$\langle w, x \rangle <_x \langle y, z \rangle :\Leftrightarrow$$

$$\max\{w, x\} < \max\{y, z\} \vee$$

$$\max\{w, x\} = \max\{y, z\} \wedge (w < y \vee w = y \wedge x < z).$$

無限集合の直積

定理 (Z-無限公理)

整列順序 $(A, <)$ について $(A \times A, <_x)$ は整列順序.

(三分律) $<_x$ の定義.

(整礎性) $S \subseteq A \times A, S \neq \emptyset$ とする.

$$S_0 := \{z \in A \mid \exists x \exists y (\langle x, y \rangle \in S \wedge \max\{x, y\} = z)\}$$

とにおいて S_0 の最小元 m_0 をとる.

$$S_1 := \{x \in A \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in S \wedge m_0 = \max\{x, y\})\}$$

とにおいて S_1 の最小元 m_1 をとる.

$$S_2 := \{y \in A \mid (\langle m_1, y \rangle \in S, m_0 = \max\{m_1, y\})\}$$

とにおいて S_2 の最小元 m_2 をとる. $\langle m_1, m_2 \rangle$ が S の最小元.



無限集合の直積

次の定理は重要です.

定理 ($\aleph_1$ – 無限公理)

基数的な無限整列順序 $(A, <)$ について $(A \times A, <_{\times}) \cong_{\text{ord}} (A, <)$.

証明. 整列順序のクラスの超限帰納法で証明する. $(A, <)$ と $(A \times A, <_{\times})$ は整列順序より, 整列順序の比較可能定理を使う.

(i) $(A \times A, <_{\times}) <_{\text{ord}} (A, <)$ のとき, $(A, <)$ は基数的より $A \not\leq A \times A$ となり, $A \leq A \times A$ と矛盾.

(ii) $(A, <) <_{\text{ord}} (A \times A, <_{\times})$ のとき,
 $(A, <) \cong_{\text{ord}} ([\langle x, y \rangle]_{(A \times A, <_{\times})}, <_{\times} \upharpoonright [\langle x, y \rangle]_{(A \times A, <_{\times})})$ となる $x, y \in A$ が存在する.

無限集合の直積

$(A, <)$ は極限整列順序より $\text{suc}_{(A, <)}(\max\{x, y\}) \in A$.

$B := [\text{suc}_{(A, <)}(\max\{x, y\})]_{(A, <)}$ とおく.

$\langle w, z \rangle \in [\langle x, y \rangle]_{(A \times A, <_x)}$ とすると

$$\max\{w, z\} < \max\{x, y\} \vee \max\{w, z\} = \max\{x, y\} \wedge (w < x \vee w = x \wedge z < y).$$

よって

$$w, z \leq \max\{w, z\} \leq \max\{x, y\} < \text{suc}_{(A, <)}(\max\{x, y\})$$

より $w, z \in [\text{suc}_{(A, <)}(\max\{x, y\})]_{(A, <)} = B$. ゆえに

$$A \cong [\langle x, y \rangle]_{(A \times A, <_x)} \subseteq B \times B.$$

無限集合の直積

$(A, <)$ は基数的より $A \not\preceq B$.

$B \times B \cong B$ を示す.

B が有限集合とすると, $A \preceq B \times B$ より A は有限集合となり仮定と矛盾.
よって B は無限集合.

$B \subseteq A$ より B は整列可能. よって B に基数的な整列順序 $<'$ が存在する.

$(A, <) \leq_{\text{ord}} (B, <')$ とすると $A \preceq B$ となり $A \not\preceq B$ と矛盾. よって

$(B, <') <_{\text{ord}} (A, <)$.

帰納法の仮定より $(B \times B, <'_{\times}) \cong_{\text{ord}} (B, <')$. よって $A \preceq B \times B \cong B$ となり $A \not\preceq B$ と矛盾. □

定理 (Z^- – 無限公理)

整列可能な無限集合 A について次が成り立つ.

- ① $A \times A \cong A$.
- ② $A \amalg A \cong A$.
- ③ $\forall B \neq \emptyset (B \preccurlyeq A \Rightarrow A \times B \cong A)$.
- ④ $\forall B \preccurlyeq A \ A \amalg B \cong A$.

ハルトークス集合

ハルトークス関数 A^+ と順序同型な整列順序 $H(A)$ を構成します.

定義

集合 A について, 集合 W_A と二項関係 $\sim_A \subseteq W_A \times W_A$ を次で定義する.

$$W_A := \{z \mid \exists B \subseteq A \exists R(z = \langle B, R \rangle \wedge (B, R) \text{ は整列順序})\},$$

$$\langle B, R \rangle \sim_A \langle C, S \rangle :\Leftrightarrow (B, R) \cong_{\text{ord}} (C, S).$$

W_A の well-defined は $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A \times A)$ を使えばよい.

定理

集合 A について $(W_A, \sim_A)$ は同値関係.

証明. 順序同型の性質.



定義

集合 A について, 集合 $H(A)$ と二項関係 $<_{H(A)} \subseteq H(A) \times H(A)$ を次で定義する.

$$H(A) := W_A / \sim_A,$$

$$[\langle B, R \rangle]_{(W_A, \sim_A)} <_{H(A)} [\langle C, S \rangle]_{(W_A, \sim_A)} : \Leftrightarrow (B, R) <_{\text{ord}} (C, S).$$

ここでは, $H(A)$ をハルトークス集合とよぶことにする.

$<_{H(A)}$ の well-defined は順序同型と $\leq_{\text{ord}}$ の性質を使えばよい.

定理 (Z – 無限公理)

集合 A について, 次が成り立つ.

- ① $(H(A), <_{H(A)})$ は整列順序.
- ② $B \subseteq A$ と整列順序 $(B, <)$ について

$$(B, <) \cong_{\text{ord}}$$

$$([\langle B, < \rangle]_{(W_A, \sim_A)}]_{(H(A), <_{H(A)})}, <_{H(A)} \mid [\langle B, < \rangle]_{(W_A, \sim_A)}]_{(H(A), <_{H(A)})}).$$

- ③ $H(A) \not\approx A$.
- ④ 整列順序 $(B, <)$ について

$$(B, <) <_{\text{ord}} (H(A), <_{H(A)}) \Leftrightarrow$$

$$\exists C \subseteq A \exists R((C, R) : \text{整列順序} \wedge (C, R) \cong_{\text{ord}} (B, <)).$$

定理 (続き)

- ⑤ 整列順序 $(B, <)$ について $(B, <) <_{\text{ord}} (H(A), <_{H(A)}) \Leftrightarrow B \preccurlyeq A$.
- ⑥ 整列可能な B について $B \not\preccurlyeq A$ なら $H(A) \preccurlyeq B$.
- ⑦ $(H(A), <_{H(A)})$ は基数的.

ハルトークス集合

証明. (1) 三分律は $\preceq_{\text{ord}}$ の三分律を使う. 整礎性は $S \subseteq H(A), S \neq \emptyset$ について

$$P(B, <) :\Leftrightarrow (B, <) \text{ は整列順序} \wedge B \subseteq A \wedge [\langle B, < \rangle]_{(W_A, \sim_A)} \in S$$

とにおいて, $P(B, <)$ に整列順序のクラスの整礎性を使う.

(2) 順序同型 $f: B \rightarrow [[\langle B, < \rangle]_{(W_A, \sim_A)}]_{(H(A), <_{H(A)})}$ を次で定義すればよい.
 $a \in B$ について

$$f(a) := [\langle [a]_{(B, <)}, < \upharpoonright_{[a]_{(B, <)}} \rangle]_{(W_A, \sim_A)}.$$

(3) $H(A) \preceq A$ とすると $f: (H(A), <_{H(A)}) \cong_{\text{ord}} (\text{im}(f), <)$ かつ $(\text{im}(f), <)$ が整列順序となる $f, <$ が存在する. (2) より

$$(H(A), <_{H(A)}) \cong_{\text{ord}} (\text{im}(f), <) \cong_{\text{ord}}$$

$$([\langle \text{im}(f), < \rangle]_{(W_A, \sim_A)})_{(H(A), <_{H(A)})}, <_{H(A)} \upharpoonright_{([\langle \text{im}(f), < \rangle]_{(W_A, \sim_A)})_{(H(A), <_{H(A)})}}$$

となり矛盾.

(4) $(\Rightarrow)$ (2) を使う. $(\Leftarrow)$ (3) を使う.

(5) (4) を使う.

(6) $<_{\text{ord}}$ の三分律のあとに (5) を使う.

(7) (3) と (5) を使う. □

まとめると, A への単射が存在しない最小の整列可能な集合が $H(A)$ です. 濃度の反対称律 (CSB), 無限の濃度の冪等性, 濃度を一段階増やす操作 $H(A)$ ができるようになりました. ここから, 濃度について多くのことがわかります.

定理

集合 A について、次が成り立つ.

- ① A は整列可能 $\Leftrightarrow A \preceq H(A)$.
- ② A は有限集合 $\Rightarrow A \preceq H(A)$.
- ③ A は無限集合 $\Rightarrow H(A) \times H(A) \cong H(A)$.
- ④ A は無限集合 $\Rightarrow H(A) \amalg H(A) \cong H(A)$.

証明. (1) $(\Rightarrow)$ 仮定より $(A, <)$ が整列順序となる $<$ が存在する.

(i) $(H(A), <_{H(A)}) \leq_{\text{ord}} (A, <)$ のとき, $H(A) \preceq A$ となり $H(A) \not\preceq A$ と矛盾.

(ii) $(A, <) \leq_{\text{ord}} (H(A), <_{H(A)})$ のとき, $A \preceq H(A)$.

$(\Rightarrow)$ $(H(A), <_{H(A)})$ は整列順序かつ, 単射 $f: A \rightarrow H(A)$ が存在するから A は整列可能.

(2) A は有限集合より整列可能. (1) より $A \preceq H(A)$.

(3) と (4) $H(A)$ は無限集合かつ整列可能よりわかる. □

定理

無限集合 A について, 次は同値.

- ① A は整列可能.
- ② $A \times H(A) \cong H(A)$.
- ③ $A \amalg H(A) \cong H(A)$.
- ④ $A \amalg H(A) \cong A \times H(A)$.

定理 (Z^- – 無限公理)

次は同値.

- ① 選択公理.
- ② (整列可能定理) すべての集合は整列可能.
- ③ (比較可能定理) $\forall A \forall B (A \preceq B \vee B \preceq A)$.
- ④ $\forall A$: 無限集合 $A \times A \cong A$.

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) 略.

(2) $\Rightarrow$ (3) 集合 A, B について, 仮定より $(A, <), (B, <')$ が整列順序となる $<, <'$ が存在する. $\leq_{\text{ord}}$ の線形性より

$(A, <) \leq_{\text{ord}} (B, <') \vee (B, <') \leq_{\text{ord}} (A, <)$. よって $A \preceq B \vee B \preceq A$.

(3) $\Rightarrow$ (2) 集合 A について, 仮定より $A \preceq H(A) \vee H(A) \preceq A$. $H(A) \not\preceq A$ より $A \preceq H(A)$. よって A は整列可能.

(2) $\Rightarrow$ (4) 集合 A は整列可能な無限集合より $A \times A \cong A$.

(4) $\Rightarrow$ (2) 集合 A について A が有限集合のときは明らか. A が無限集合のとき

$$A \amalg H(A) \preceq A \times H(A) \preceq (A \amalg H(A)) \times (A \amalg H(A)) \cong A \amalg H(A).$$

よって $A \amalg H(A) \cong A \times H(A)$ より A は整列可能.



公理を減らしてなにが嬉しいのか？

- 一般化できた.
- 普通の数学で出番が少ない置換公理図式, 基礎の公理を使わなくても, 多くの濃度の性質が示せる.
- **もしも**運悪く ZFC が矛盾して, その原因が無限公理や置換公理図式にあったとしても, 今回の内容ならあまり気にしないでいい.

- [1] K. Kunen (藤田博司 訳), キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016.
- [2] 篠田寿一, 米澤佳己, 集合・位相演習 (数学演習ライブラリ 7), サイエンス社, 1995.

定義

- ① (濃度をもつ) A が濃度をもつ $:\Leftrightarrow \exists a : \mathbf{On} \ A \cong a$.
- ② A が濃度をもつとき, A の濃度 $|A|$ を次で定義する.

$$|A| : \mathbf{On} \wedge A \cong |A| \wedge \forall a : \mathbf{On} \ (A \cong a \Rightarrow |A| \subseteq a).$$

- ③ (基数) $a : \mathbf{Cn} :\Leftrightarrow a : \mathbf{On} \wedge \forall b \in a \ a \not\cong b$.
- ④ (所属関係の制限) $\in_a \subseteq a \times a$ を次で定義する.

$$x \in_a y :\Leftrightarrow x \in y.$$

定理

- ① $a : \mathbf{On}$ なら $(a, \in_a)$ は整列順序.
- ② (順序同型な順序数と順序同型は一意)
 $\forall a, b : \mathbf{On} \forall f : (a, \in_a) \cong_{\text{ord}} (b, \in_b) (f = \text{id}_a \wedge a = b).$
- ③ 有限集合 A は濃度をもつ.
- ④ $a : \mathbf{On}$ は濃度をもつ.
- ⑤ $a, b : \mathbf{On}$ について $a \amalg b, a \times b$ は濃度をもつ.
- ⑥ $a : \mathbf{On}, n : \mathbf{N}$ について $\text{map}(n, a)$ は濃度をもつ.

証明. (1), (3), (4) 定義から明らか.

(2) 超限帰納法で $\forall x \in a f(x) = x$ を示せばよい.

(5) $a, b : \mathbf{N}$ のとき自然数のたし算とかけ算を使う. a か b が無限集合のとき, a, b が整列可能であることを使う.

(6) $a : \mathbf{N}$ のとき自然数の冪を使う. a が無限集合のときは n についての帰納法. □

定理

- ① A が濃度をもつなら $|A| : \mathbf{Cn}$.
- ② A, B が濃度をもつなら $A \cong B \Leftrightarrow |A| = |B|$.
- ③ A, B が濃度をもつなら $A \preceq B \Leftrightarrow |A| \subseteq |B|$.
- ④ A, B が濃度をもつなら $A \prec B \Leftrightarrow |A| \in |B|$.

証明. 順序数の性質と濃度の定義.



(1) から, 基数の演算を定義するのが自然に思える.

定義

- ① (基数のたし算) $a, b : \mathbf{Cn}$ について $a +_{\mathbf{Cn}} b := |a \amalg b|$.
- ② (基数のかけ算) $a, b : \mathbf{Cn}$ について $a \times_{\mathbf{Cn}} b := |a \times b|$.
- ③ (基数の冪) $a, b : \mathbf{Cn}$ について $\text{map}(b, a)$ が濃度もつとき $a_{\mathbf{Cn}}^b := |\text{map}(b, a)|$.

濃度

基数のたし算, かけ算は基数について閉じていて, 結合法則, 可換法則, 分配法則, 順序 $\subseteq$ の保存などの普通の数のような性質が成り立ちます.

a, b が無限基数のとき $a +_{\mathbf{Cn}} b = a \times_{\mathbf{Cn}} b = \max\{a, b\}$ になります. つまり, たし算とかけ算は, 有限のときの方が複雑で, 無限のときは大小だけ考えればよくて簡単です.

一方, 基数の冪は, **濃度をもてば**普通の数のように計算できます. ただし, 濃度をもつかどうかは選択公理なしでは難しい問題です.

定理 ($\mathbf{Z}$ – 無限公理)

- ① 集合 A が濃度をもつなら A は整列可能.
- ② $(\forall A \ A \text{ が濃度をもつ}) \Rightarrow$ 選択公理.

証明. (1) 定義より $A \cong a$ となる $a : \mathbf{On}$ が存在する. a は整列可能より A は整列可能.

(2) (1) からわかる. □

疑問

- ① 整列可能なら濃度をもつか?
- ② 選択公理 $\Rightarrow \forall A$ A が濃度をもつ?

答え: 置換公理図式を仮定すると証明できる.

疑問 ($\mathbb{Z}$ – 無限公理)

整列可能なら濃度をもつような条件はなにか?

答え: 順序型をもつ.

順序型

定義

整列順序 $(A, <)$ について次のように定義する.

① (良質な要素)

$$\text{good}(A, <) := \{a \in A \mid \exists t : \mathbf{On} \ ([a]_{(A, <)}, < \restriction_{[a]_{(A, <)}}) \cong_{\text{ord}} (t, \in_t)\}.$$

② $(A, <)$ が順序型をもつ $:\Leftrightarrow \exists / \forall a \in \text{good}(A, <) \exists t \in I$
 $(t : \mathbf{On} \wedge ([a]_{(A, <)}, < \restriction_{[a]_{(A, <)}}) \cong_{\text{ord}} (t, \in_t)).$

③ (順序型)

$$\text{type}(A, <) := \{t \mid t : \mathbf{On} \wedge \exists a \in A \ ([a]_{(A, <)}, < \restriction_{[a]_{(A, <)}}) \cong_{\text{ord}} (t, \in_t)\}.$$

定理 (Z – 無限公理) (順序型の well-defined)

整列順序 $(A, <)$ が順序型をもつなら次が成り立つ.

- $\text{type}(A, <) : \mathbf{On}.$
- $(A, <) \cong_{\text{ord}} (\text{type}(A, <), \in_{\text{type}(A, <)}).$
- $\forall t : \mathbf{On} \ ((A, <) \cong_{\text{ord}} (t, \in_t) \Rightarrow t = \text{type}(A, <)).$

証明の概要. 順序同型な順序数は一意より

$$\forall a \in \text{good}(A, <) \quad \forall t, u : \mathbf{On} \quad ([a]_{(A, <)}, <|_{[a]_{(A, <)}}) \cong_{\text{ord}} (t, \in_t) \Rightarrow$$

$$([a]_{(A, <)}, <|_{[a]_{(A, <)}}) \cong_{\text{ord}} (u, \in_u) \Rightarrow t = u. \quad (1)$$

(1) と $(A, <)$ が順序型をもつことより

$$\forall a \in \text{good}(A, <) \quad \exists ! t \in I \quad (t : \mathbf{On} \wedge ([a]_{(A, <)}, <|_{[a]_{(A, <)}}) \cong_{\text{ord}} (t, \in_t))$$

となる集合 I が存在する. よって写像 $f: \text{good}(A, <) \rightarrow I$ を次のように定義できる. $a \in \text{good}(A, <)$ について

$$f(a) : \mathbf{On}, ([a]_{(A, <)}, <|_{[a]_{(A, <)}}) \cong_{\text{ord}} (f(a), \in_{f(a)}).$$

(1) より $\text{type}(A, <)$ が定義できて $\text{im}(f) = \text{type}(A, <)$.

がんばって次を示す.

$$\forall a \in \text{good}(A, <) \quad \forall b \in [a]_{(A, <)} \quad (b \in \text{good}(A, <) \wedge$$

$$\exists h: ([a]_{(A, <)}, <|_{[a]_{(A, <)}}) \cong_{\text{ord}} (f(a), \in_{f(a)}) \quad h(b) = f(b)).$$

ここから $\text{im}(f)$ が **On** の切片かつ推移的集合であることが示せて
 $\text{im}(f) : \mathbf{On}$.

さらに $f: (\text{good}(A, <), <|_{\text{good}(A, <)}) \cong_{\text{ord}} (\text{im}(f), \in_{\text{im}(f)})$ もわかる.
 $A \setminus \text{good}(A, <) \neq \emptyset$ すると整礎性から矛盾が示せて $\text{good}(A, <) = A$.

よって $(A, <) \cong_{\text{ord}} (\text{im}(f), \in_{\text{im}(f)})$.

(一意性) 順序同型な順序数は一意からわかる.



順序型

定理 (Z – 無限公理)

整列順序 $(A, <)$ について次は同値.

- ① $(A, <)$ が順序型をもつ.
- ② $\exists t : \mathbf{On} (A, <) \leq_{\text{ord}} (t, \in_t)$.

証明. (1) $\rightarrow$ (2) 順序型の well-defined から明らか.

(2) $\rightarrow$ (1) t を順序型をもつことの定義内の I とおけばよい. □

定理 (Z – 無限公理)

集合 A について次は同値.

- ① A が濃度をもつ.
- ② $(A, <)$ が順序型をもつ整列順序となる $<$ が存在する.

よって, すべての集合に濃度を定義するには, 置換公理図式と選択公理が必要になります.