

トロピカル代数幾何学(入門)

トロピカル幾何学は, みんなのお役にたつんだよ!!

トー

東京都立大学大学院 数理科学専攻

2026/10/12

内容としては割と簡単です． 2 日目でヘトヘトでも聞いててついていけるとおもいます．

Caution

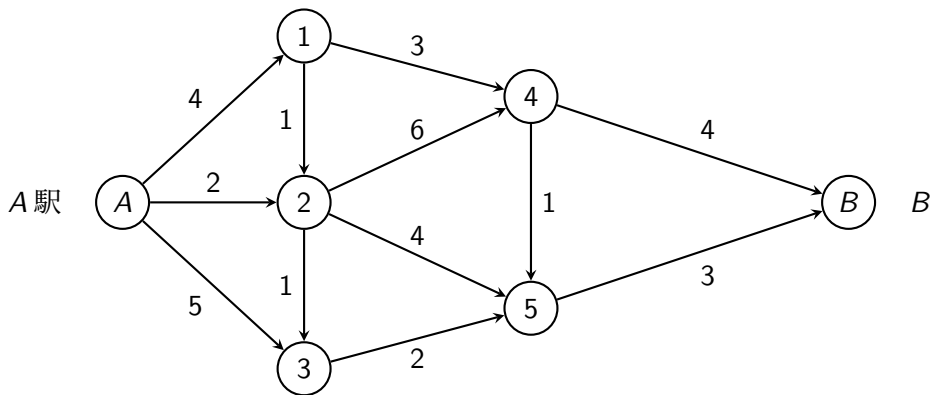
この発表では、「トロピカル（コンパクト化）」や「トーリック幾何とのつながり」の話はできません（自分の勉強が追いついてないため）

主張

逆に、「トロピカル幾何学」や「 $\max, +$ 」という単語を聞いたことがある小学生でも分かるくらい簡単な話から始めますので，何も知らない人の方がむしろ歓迎かもです．

（トロピカル幾何学入門って名前にすればよかった）

問い1



- 各路線に書かれた数は、移動にかかる時間を表す。
- A 駅から B 駅まで、最速で何分かかかるか？

問い2

以下のような作業を考える．作業は平行して行えるとする．

作業	所要時間 (年)	先に終わっている必要
<i>A</i>	3	なし
<i>B</i>	1	なし
<i>C</i>	2	なし
<i>D</i>	3	<i>A, B, C</i>
<i>E</i>	2	なし
<i>F</i>	2	<i>D, E</i>
<i>G</i>	3	<i>E</i>
<i>H</i>	完成品	<i>F, G</i>

H を完成させるには，最低何年かかる？

目次

- ① トロピカルな半体
- ② トロピカルな多項式, 曲線
- ③ 最適化問題への応用
- ④ トロピカル幾何学の基本定理

目次

- ① トロピカルな半体
- ② トロピカルな多項式, 曲線
- ③ 最適化問題への応用
- ④ トロピカル幾何学の基本定理

半環と半体

半体とは

可換半環 + 非零元が乗法逆元をもつ $+ 0_R \neq 1_R$

ような代数系である.

Definition ((可換) 半環)

(可換) 半環 $(R, +, \cdot)$ とは

- ❶ $(R, +)$ は可換モノイドである. 加法単位元を 0_R と書く.
- ❷ $(R, \cdot)$ は(可換)モノイドである. 乗法単位元を 1_R と書く.
- ❸ 分配法則が成り立つ.
- ❹ 0_R は吸収的, すなわち,

$$a \cdot 0_R = 0_R \cdot a = 0_R \quad (a \in R)$$

が成り立つ.

What is

$$a \cdot 0_R = 0_R \cdot a = 0_R \quad (a \in R)$$

※普通の環は、加法に関して群である、つまり引き算が与えられる
→ 引き算を使って、 0_R が吸収的であることが示せる
→ 今回は引き算を考慮していないため、吸収的零の存在を公理として加えている。

Definition (半体)

可換半環 $(R, +, \cdot)$ が $0_R \neq 1_R$ を満たし、 $(R \setminus \{0_R\}, \cdot)$ がアーベル群の時、 R を半体という。

Definition (トロピカル半体)

集合 $\mathbb{T}_{\min} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に対して、和と積を

$$x \oplus y := \min\{x, y\}, \quad x \odot y := x + y$$

ただし、 $\min\{x, \infty\} = \min\{\infty, x\} = x$, $x + \infty = \infty + x = \infty$
で入れたものを **(min-plus) トロピカル半体**という。

トロピカル半体

命題

$(\mathbb{T}_{\min}, \oplus, \odot)$ は半体である.

(証明)

(i) $(\mathbb{T}_{\min}, \oplus)$: 可換モノイド

(結合律)

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= \min\{\min\{a, b\}, c\} \\ &= \min\{a, b, c\} \\ &= \min\{a, \min\{b, c\}\} \\ &= a \oplus (b \oplus c)\end{aligned}$$

(加法単位元 (零元)) $a \oplus \infty = \min\{a, \infty\} = a = \infty \oplus a$

$$\therefore 0_{\mathbb{T}_{\min}} = \infty$$

(可換性) 明らか

トロピカル半体

(ii) $(\mathbb{T}_{\min}, \odot)$: 可換モノイド

(結合律, 可換性) 明らか

(単位元) $1_{\mathbb{T}_{\min}} = 0$

(iii) (分配法則)

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \odot c &= \min\{a, b\} + c \\ &= \min\{a + c, b + c\} \\ &= (a \odot c) \oplus (b \odot c)\end{aligned}$$

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

(iv) (吸収的零)

$$a \odot 0_{\mathbb{T}_{\min}} = a \odot \infty = a + \infty = \infty$$

$$0_{\mathbb{T}_{\min}} \odot a = \infty \odot a = \infty + a = \infty$$

(v) $(0_R \neq 1_R)$ $0_{\mathbb{T}_{\min}} = \infty \neq 0 = 1_{\mathbb{T}_{\min}}$

(vi) (非零元の乗法逆元の存在) $a \in \mathbb{T}_{\min} \setminus \{0_{\mathbb{T}_{\min}}\}$ の乗法逆元は $-a$

トロピカル半体

- ・引き算は定まらない. 例えば,

$$x \oplus 0 = 1$$

を満たす $x \in \mathbb{T}_{\min}$ は存在しない. 実際,

$$x \oplus 0 = \min\{x, 0\} \leq 0$$

- ・ $\oplus$ に関して冪等性をもつ.

$$a \oplus a = \min\{a, a\} = a$$

→ トロピカル半体 $(\mathbb{T}_{\min}, \oplus, \odot)$ はべき等半体 (特にべき等半環)

主張 (新入生の夢)

$$(x \oplus y)^{\odot n} = x^{\odot n} \oplus y^{\odot n}.$$

証明.

$$\begin{aligned}(x \oplus y)^{\odot n} &= \underbrace{(x \oplus y) \odot \cdots \odot (x \oplus y)}_{n \text{ 個}} \\ &= n \min\{x, y\} \\ &= \min\{nx, ny\} \\ &= x^{\odot n} \oplus y^{\odot n}\end{aligned}$$



二つのトロピカル半体

$(\min, +)$ トロピカル半体

$$\mathbb{T}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad x \oplus_{\min} y := \min\{x, y\}, \quad x \odot_{\min} y := x + y.$$

加法単位元は ∞ , 乗法単位元は 0 である.

$(\max, +)$ トロピカル半体

$$\mathbb{T}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad x \oplus_{\max} y := \max\{x, y\}, \quad x \odot_{\max} y := x + y.$$

加法単位元は $-\infty$, 乗法単位元は 0 である.

二つのトロピカル半体

命題

写像

$$\iota : \mathbb{T}_{\min} \rightarrow \mathbb{T}_{\max}, \quad \iota(x) := -x, \quad \iota(\infty) := -\infty$$

は半体同型である． すなわち，

$$\iota(x \oplus_{\min} y) = \iota(x) \oplus_{\max} \iota(y), \quad \iota(x \odot_{\min} y) = \iota(x) \odot_{\max} \iota(y)$$

証明． 全単射は明らか． $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} \iota(x \oplus_{\min} y) &= -\min\{x, y\} \\ &= \max\{-x, -y\} \\ &= \iota(x) \oplus_{\max} \iota(y), \end{aligned}$$

$$\iota(x \odot_{\min} y) = -(x + y) = (-x) + (-y) = \iota(x) \odot_{\max} \iota(y).$$

∞ に対しても同様.



余談：なぜ「トロピカル」？

($\min, +$) 半環に関する先駆的な研究：Imre Simon in ブラジル

その研究に敬意を表して、フランスの数学者 Dominique Perrin が tropical semiring と名付けたとされる.

トロピカルは,

フランスから見たブラジルの「熱帯」のイメージ

(? ブラジルと赤道が近いから?)

参考：J.-É. Pin, “Tropical Semirings” ;

D. Maclagan and B. Sturmfels, *Introduction to Tropical Geometry*.

目次

- ① トロピカルな半体
- ② トロピカルな多項式, 曲線
- ③ 最適化問題への応用
- ④ トロピカル幾何学の基本定理

トロピカル多項式

定義

有限集合 $I \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ と係数 $a_i \in \mathbb{T}_{\min} \setminus \{0_{\mathbb{T}_{\min}}\}$ に対し,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &:= \bigoplus_{i \in I} a_i \odot x_1^{\odot i_1} \odot \cdots \odot x_n^{\odot i_n} \\ &= \min_{i \in I} \{a_i + i_1 x_1 + \cdots + i_n x_n\}. \end{aligned}$$

をトロピカル多項式という.

トロピカル多項式は関数 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を定めている.

トロピカル多項式は以下の性質を持つ.

- ① (連続)
- ② 有限個の区分で線形
- ③ 上に凸

実は, この性質をもつ関数はトロピカル多項式関数である.

トロピカル多項式

例

$a < b < c$ とし, 二次トロピカル多項式

$$p(x) := a \odot x^{\odot 2} \oplus b \odot x \oplus c = \min\{a + 2x, b + x, c\}$$

を考える.

$p(x)$ が関数 $a + 2x$ になるとき:

$$a + 2x \leq b + x \quad \text{かつ} \quad a + 2x \leq c$$

つまり

$$x \leq b - a \quad \text{かつ} \quad x \leq \frac{1}{2}(c - a)$$

トロピカル多項式

例

$a < b < c$ とし, 二次トロピカル多項式

$$p(x) := a \odot x^{\odot 2} \oplus b \odot x \oplus c = \min\{a + 2x, b + x, c\}$$

を考える.

各項が最小値を与えるための条件は,

$$a + 2x \text{ が最小} \iff x \leq \min \left\{ b - a, \frac{c - a}{2} \right\},$$

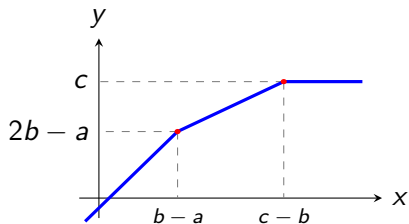
$$b + x \text{ が最小} \iff b - a \leq x \leq c - b,$$

$$c \text{ が最小} \iff x \geq \max \left\{ \frac{c - a}{2}, c - b \right\}.$$

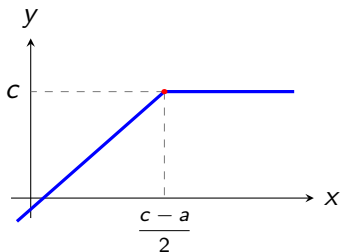
トロピカル多項式

$$\begin{aligned}a + 2x : \quad & x \leq \min \left\{ b - a, \frac{c - a}{2} \right\}, \\b + x : \quad & b - a \leq x \leq c - b, \\c : \quad & x \geq \max \left\{ \frac{c - a}{2}, c - b \right\}.\end{aligned}$$

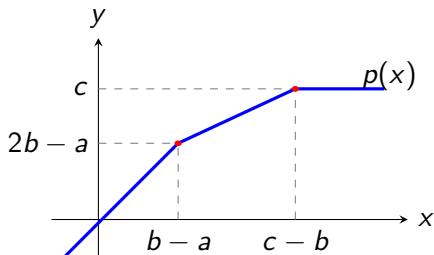
$b - a \leq c - b$ の時



$c - b < b - a$ の時



トロピカル多項式



$$\begin{aligned} p(x) &= a + \min\{x, b - a\} + \min\{x, c - b\} \\ &= a \odot (x \oplus (b - a)) \odot (x \oplus (c - b)). \end{aligned}$$

定理（トロピカル版代数学の基本定理）

任意の一変数トロピカル多項式関数 $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\deg p = m \geq 1$ に対して、ある $a, r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$p(x) = a \odot (x \oplus r_1) \odot \cdots \odot (x \oplus r_m)$$

トロピカル曲線

多項式が定義されたら零点集合を考えたい.

→ $p(x) = a \odot (x \oplus (b - a)) \odot (x \oplus (c - b))$ の根に対応するのは
 $(b - a), (c - b),$

→ つまり, 多項式の「折れ点」が零点集合の集まりとすればよい.

折れ点=min を達成する点が少なくとも 2 個以上

だったので,

Definition (トロピカル超平面)

トロピカル多項式 $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, p のトロピカル超曲面を

$$V(p) := \{w \in \mathbb{R}^n \mid p(w) \text{ が複数項で最小値を取る} \}$$

で定める. これを折れ点集合と呼んだりもする.

トロピカル曲線

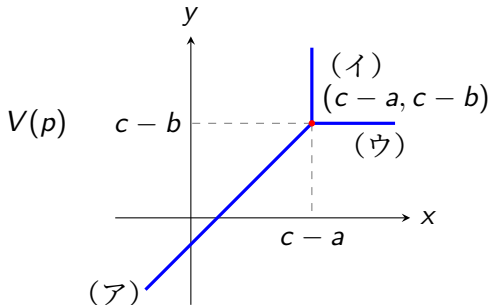
例

$$p(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c = \min\{a + x, b + y, c\}$$

$$a + x = b + y \iff y = x + a - b \quad (\text{ア}),$$

$$a + x = c \iff x = c - a \quad (\text{イ}),$$

$$b + y = c \iff y = c - b \quad (\text{ウ}).$$



トロピカル多項式 2

(min, +) 代数としての

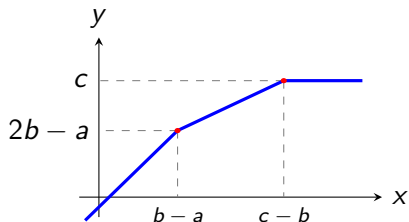
$$p(x) := a \odot x^{\odot 2} \oplus b \odot x \oplus c = \min\{a + 2x, b + x, c\}$$

(max, +) 代数としての

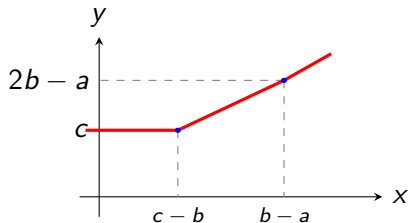
$$q(x) := a \odot x^{\odot 2} \oplus b \odot x \oplus c = \max\{a + 2x, b + x, c\}$$

を考えると,

$b - a \leq c - b$ の時の $p(x)$



$c - b \leq b - a$ の時の $q(x)$



トロピカル多項式2

$(\min, +)$ トロピカル多項式

$$P_{\min}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{i} \in E} \{a_{\mathbf{i}} + \langle \mathbf{i}, \mathbf{x} \rangle\}$$

を考える. $\mathbf{y} := -\mathbf{x}$ と置き, 対応する $(\max, +)$ 多項式を

$$P_{\max}(\mathbf{y}) := \max_{\mathbf{i} \in E} \{-a_{\mathbf{i}} + \langle \mathbf{i}, \mathbf{y} \rangle\}$$

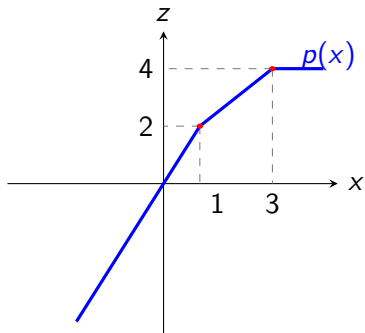
と定めると,

$$\begin{aligned} -P_{\min}(-\mathbf{y}) &= -\min_{\mathbf{i} \in E} \{a_{\mathbf{i}} - \langle \mathbf{i}, \mathbf{y} \rangle\} \\ &= \max_{\mathbf{i} \in E} \{-a_{\mathbf{i}} + \langle \mathbf{i}, \mathbf{y} \rangle\} \\ &= P_{\max}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

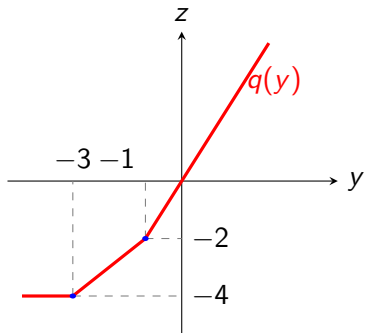
つまり 180 度回転をして対応がある.

トロピカル多項式2

$$p(x) = \min\{2x, 1+x, 4\}$$



$$q(y) = \max\{2y, -1+y, -4\}$$



$$q(y) = -p(-y)$$

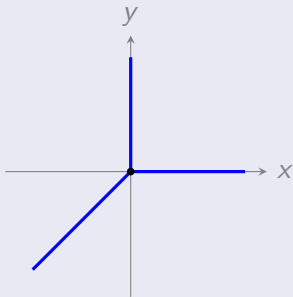
トロピカル曲線2

命題

$$V_{\max}(P_{\max}) = -V_{\min}(P_{\min})$$

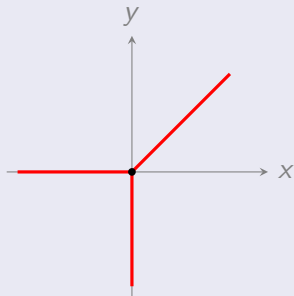
$(\min, +)$ トロピカル直線

$$P_{\min}(x, y) = \min\{0, x, y\}.$$



トロピカル曲線2

$$P_{\max}(x, y) = \max\{0, x, y\}.$$



余談：式変形とトロピカル化

通常の演算では,

$$1 + x - x = 1$$

である. 左辺をトロピカル化すると,

$$\begin{aligned} 1 \oplus x \oplus x^{\odot(-1)} &= \min\{1, x, -x\} \\ &= \min\{1, -|x|\} \\ &= -|x| \end{aligned}$$

したがって,

$$1 \neq \min\{1, x, -x\} = -|x|$$

→ 1 と $1 \oplus x \oplus x^{\odot(-1)}$ は異なるトロピカル多項式関数である.

多項式のトロピカル化を考えるときは, 元々の多項式環の要素の等号を厳密にしないといけない.

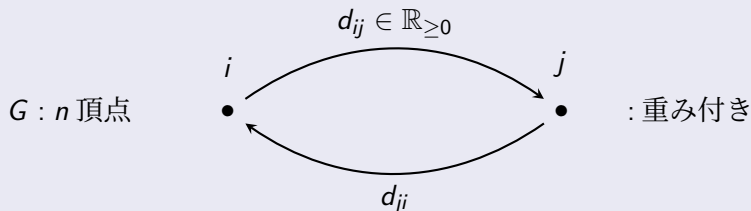
目次

- ① トロピカルな半体
- ② トロピカルな多項式, 曲線
- ③ 最適化問題への応用
- ④ トロピカル幾何学の基本定理

重み付き有向グラフの最短経路問題

最短経路を見つける問題を考える：

設定



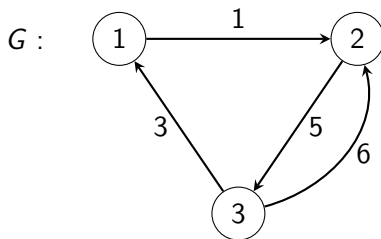
有向辺がない場合は $d_{ij} = \infty$, また $d_{ii} = 0$ とする.

$D_G := [d_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$: 隣接行列

記法： $D_G^{\odot(n)} := \underbrace{D_G \odot D_G \odot \cdots \odot D_G}_{n \text{ 個}}.$

重み付き有向グラフの最短経路問題

例：



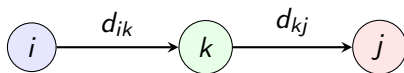
このグラフの隣接行列は

$$D_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \infty & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

また,

$$D_G^{\odot(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

重み付き有向グラフの最短経路問題



に対し, $i \rightarrow k \rightarrow j$ の長さは $d_{ik} + d_{kj}$

i から j までの長さの和が最小になるものを探したい

→ 和が最小...

→ トロピカルチャンス！

命題

$$i \rightarrow \cdots \rightarrow j \text{ の最短経路の長さ} = (D_G^{\odot(n-1)})_{ij}$$

重み付き有向グラフの最短経路問題

命題

$$i \rightarrow \cdots \rightarrow j \text{ の最短経路の長さ} = (D_G^{\odot(n-1)})_{ij}$$

$1 \leq r \leq n-1$ に対し,

$$\begin{aligned} d_{ij}^{(r)} &:= r \text{ 本以下の辺を通る経路での最小の長さ} \\ &= \min \left\{ d_{ij_1} + d_{i_1 i_2} + \cdots + d_{i_{k-1} j} \mid \begin{array}{l} k \leq r, \\ i \rightarrow i_1 \rightarrow \cdots \rightarrow i_{k-1} \rightarrow j \end{array} \right\} \end{aligned}$$

とする.

$$d_{ij}^{(r)} = (D_G^{\odot r})_{ij}$$

を帰納法で示す. $r=1$ は明らか. $r-1$ で成り立つとする.

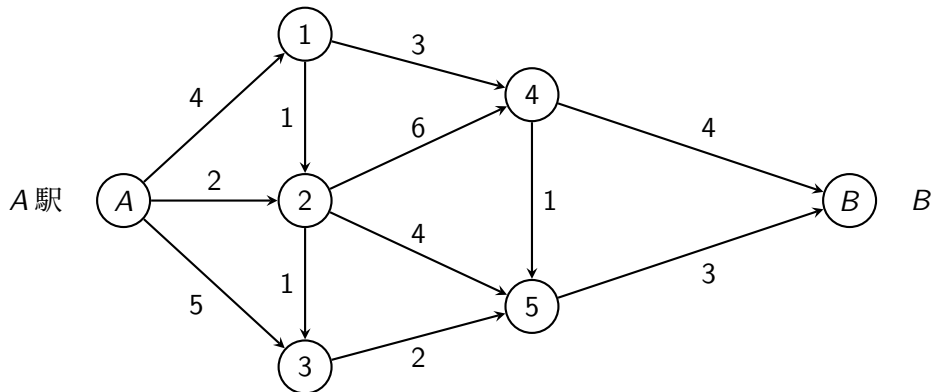
重み付き有向グラフの最短経路問題

$$\begin{aligned}d_{ij}^{(r)} &= \min \left\{ d_{ik}^{(r-1)} + d_{kj} \mid k = 1, \dots, n \right\} \\&= d_{i1}^{(r-1)} \odot d_{1j} \oplus d_{i2}^{(r-1)} \odot d_{2j} \oplus \dots \oplus d_{in}^{(r-1)} \odot d_{nj} \\&= \begin{pmatrix} d_{i1}^{(r-1)} & \dots & d_{in}^{(r-1)} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} d_{1j} \\ \vdots \\ d_{nj} \end{pmatrix} \\&= (D_G^{\odot(r-1)} \text{ の第 } i \text{ 行}) \odot (D_G \text{ の第 } j \text{ 列}) \\&= (D_G^{\odot r})_{ij}.\end{aligned}$$

$d_{ij} = 0$ を何回か追加すれば $d_{ij}^{(n-1)} = d_{ij}^{(r)}$. したがって,

$(D_G^{\odot(n-1)})_{ij} = i$ から j への最短経路の長さ.

問い 1(再掲)



問い1をトロピカル行列で解く

頂点を

$A, 1, 2, 3, 4, 5, B$

の順に並べると、隣接行列は

$$D_G = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 1 & 6 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

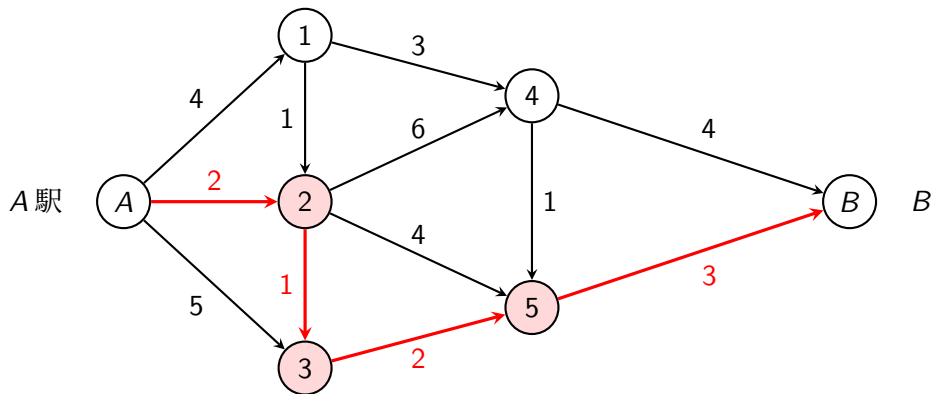
頂点数は 7 だから、

$$A \text{ 駅から } B \text{ 駅までの最短時間} = (D_G^{\odot 6})_{A,B}.$$

計算すると、

$$(D_G^{\odot 6})_{A,B} = 8$$

問い1の答え



$A \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow B$

$$2 + 1 + 2 + 3 = 8$$

最短経路は $A \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow B$, 最短時間は 8

トロピカル行列式

通常の行列式は符号を含むため、引き算のない半環へそのまま移せない。
そこで行列のパーマメント

$$\sum_{\sigma \in S_n} x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

で定める.

Definition

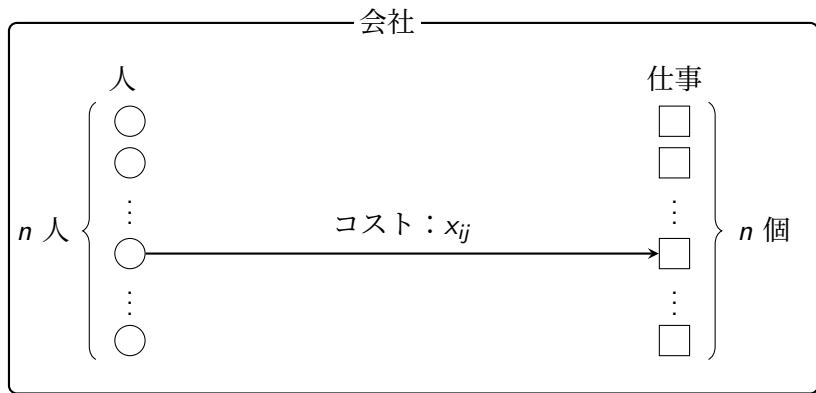
トロピカル行列式

$$\text{tropdet}(X) := \bigoplus_{\sigma \in S_n} x_{1\sigma(1)} \odot \cdots \odot x_{n\sigma(n)} = \min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}$$

例：

$$\text{tropdet} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \min\{a + d, b + c\}.$$

トロピカル行列式と割当て問題



最適コスト:

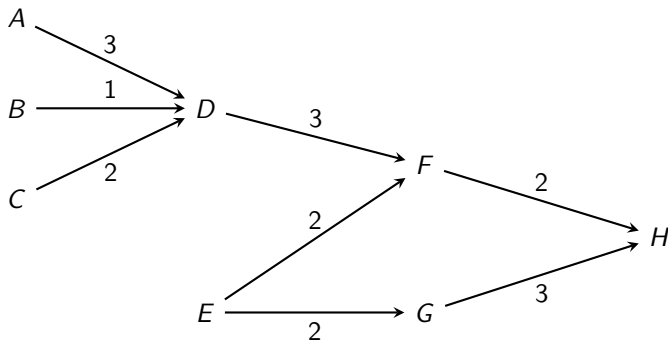
$$\begin{aligned} \min \{ & x_{1\sigma(1)} + \cdots + x_{n\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n \} \\ & = \text{tropdet}(x_{ij}). \end{aligned}$$

工程計画問題 (問 2 の答え)

以下のような作業を考える．作業は平行して行えるとする．

作業	所要時間 (年)	先に終わっている必要
A	3	なし
B	1	なし
C	2	なし
D	3	A, B, C
E	2	なし
F	2	D, E
G	3	E
H	完成品	F, G

工程計画問題 (問 2 の答え)

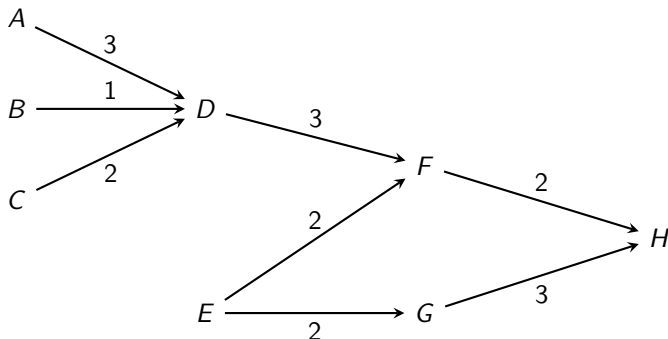


作業 D を始めるには, A, B, C が終わっていないといけない.

$$sD := D \text{ の開始時刻} = \max\{A, B, C\} = \max\{3, 1, 2\} = 3$$

$$sF := F \text{ の開始時刻} = \max\{sD + 3, 2\} = 6$$

工程計画問題 (問 2 の答え)

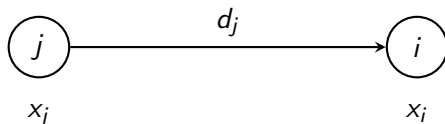


$sG : 2$

$H : \max\{sF + 2, sG + 3\} = \max\{6 + 2, 1 + 3\} = 8.$

$\therefore H$ ができるまでに 8(年).

$$\begin{aligned} & (\max\{sF + 2, sG + 3\} = \max\{\max\{sD + 3, 2\} + 2, E + 3\} = \\ & \max\{\max\{\max\{A, B, C\} + 3, 2\} + 2, E + 3\} = (((A \oplus B \oplus C) \odot 3) \oplus 2) \odot 2 \oplus (E \odot 2)) \end{aligned}$$



d_j : 作業 j にかかる時間

x_j : 作業 j の最早開始時刻

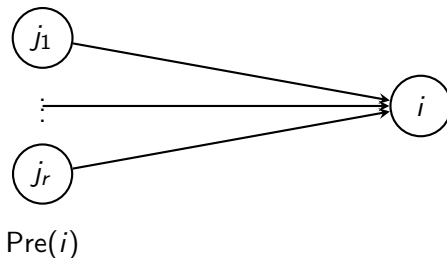
作業 j が終わってから作業 i を開始するため,

$$x_i \geq x_j + d_j$$

である.

工程計画問題

作業 i に複数の事前作業があるとする.



すべての事前作業が終了してから, 作業 i を開始する:

$$x_i = \odot_{j \in \text{Pre}(i)} \{x_j + d_j\}.$$

$$x_i = \bigoplus_{\substack{\max \\ j \in \text{Pre}(i)}} x_j \odot d_j$$

と書ける.

工程計画問題

各作業の最早開始時刻を

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とする.

$$a_{ij} := \begin{cases} d_j & (j \rightarrow i), \\ -\infty & (j \not\rightarrow i) \end{cases} \quad A := (a_{ij})$$

とすると,

$$\begin{aligned} (A \odot \mathbf{x})_i &= \max_{1 \leq j \leq n} \{a_{ij} + x_j\} \\ &= \max_{j \in \text{Pre}(i)} \{x_j + d_j\}. \end{aligned}$$

したがって, 事前作業をもつ作業 i に対して,

$$x_i = (A \odot \mathbf{x})_i$$

である.

工程計画問題

先行作業をもたない作業の開始時刻を 0 とするため,

$$b_i := \begin{cases} 0 & (\text{Pre}(i) = \emptyset), \\ -\infty & (\text{Pre}(i) \neq \emptyset) \end{cases}$$

とおく. すると, 各作業 i に対して,

$$x_i = \max \{ (A \odot \mathbf{x})_i, b_i \}$$

である. $(\max, +)$ 代数の記号を用いると,

$$x_i = (A \odot \mathbf{x})_i \oplus_{\max} b_i$$

となる. したがって,

最早開始時刻方程式

$$\mathbf{x} = A \odot \mathbf{x} \oplus_{\max} \mathbf{b}$$

を得る.

最早開始時刻方程式はよく解ける.

Theorem

$$A^* := I \oplus A \oplus A^{\odot 2} \oplus \dots \oplus A^{\odot (n-1)}$$

$$\mathbf{x} = A^* \odot \mathbf{b}$$

は, 最早開始時刻方程式

$$\mathbf{x} = A \odot \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$$

の解である.

(常識的に循環はないものとする)

→ 最適化問題がトロピカルによって線形方程式で表すことができてうれしい. トロピカルサイコー!!(と言いなさい)

証明.

$$\begin{aligned}A \odot \mathbf{x} \oplus \mathbf{b} &= A \odot (A^* \odot \mathbf{b}) \oplus \mathbf{b} \\&= (A \odot A^*) \odot \mathbf{b} \oplus \mathbf{b} \\&= (A \oplus A^{\odot 2} \oplus \dots \oplus A^{\odot n} \oplus I) \odot \mathbf{b}.\end{aligned}$$

n 本以上の辺を通る経路は存在しないから,

$$A^{\odot n} = \begin{pmatrix} -\infty & \dots & -\infty \\ \vdots & & \vdots \\ -\infty & \dots & -\infty \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{aligned}A \odot \mathbf{x} \oplus \mathbf{b} &= \left(I \oplus A \oplus A^{\odot 2} \oplus \dots \oplus A^{\odot(n-1)} \right) \odot \mathbf{b} \\&= A^* \odot \mathbf{b} \\&= \mathbf{x}.\end{aligned}$$

目次

- ① トロピカルな半体
- ② トロピカルな多項式, 曲線
- ③ 最適化問題への応用
- ④ トロピカル幾何学の基本定理

付値

K を体, $\Gamma \subset \mathbb{R}$ を加法部分群とする.

定義：付値

写像 $\text{val}: K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ が**付値**であるとは, 任意の $a, b \in K$ に対して

$$\text{val}(ab) = \text{val}(a) + \text{val}(b),$$

$$\text{val}(a + b) \geq \min\{\text{val}(a), \text{val}(b)\}$$

$$\text{val}(0) = \infty$$

を満たすことをいう.

体の積 $\mapsto$ 通常のと, 体の和 $\mapsto$ '最小値'

$\rightarrow (\min, +)$ トロピカル半体は, 付値の性質を反映した代数系.

付値の切断

技術的な仮定を入れる.

定義：切断

付値写像の制限 $\text{val}: K^\times \longrightarrow \Gamma$ に対し, 群準同型

$$\tau: \Gamma \longrightarrow K^\times, \quad \text{val}(\tau(\gamma)) = \gamma$$

を付値の**切断**または**分裂**という. $\tau(\gamma)$ を t^γ と書く.

切断があれば, トロピカル係数を

$$\gamma \longmapsto t^\gamma, \quad \text{val}(t^\gamma) = \gamma$$

によって K の元へ持ち上げられる.

(純粋な) 多項式の根が常に存在するとは限らないため, K を代数閉体と仮定する.

初期形式

これまで： $f = \sum_{i_1, i_2} c_{i_1 i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$

$$\mapsto \text{trop}(f) = \min \{ c_{i_1 i_2} + i_1 x_1 + i_2 x_2 \mid i_1, i_2 \}.$$

付値付き： $f = \sum_{i_1, i_2} c_{i_1 i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$

$$\mapsto \text{trop}(f)(\mathbf{x}) := \min \{ \text{val}(c_i) + \mathbf{i} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{i} = (i_1, i_2) \}.$$

Definition (初項形式)

$\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ に対し、

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f) := \sum_{\text{val}(c_i) + \mathbf{i} \cdot \mathbf{w} = \text{trop}(f)(\mathbf{w})} \overline{t^{-\text{val}(c_i)} c_i} \mathbf{x}^{\mathbf{i}}.$$

と定め、 f の**初項形式**と呼ぶ。イデアル I に対し

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(I) := \langle \text{in}_{\mathbf{w}}(f) \mid f \in I \rangle$$

と定め、 I の**初項形式**と呼ぶ。

多変数でも同様。

トロピカル幾何学の基本定理

Definition (超曲面のトロピカル化)

f の超曲面 $V(f) = \{y \in (K^\times)^n \mid f(y)\}$ に対し,

$$\text{trop}(V(f)) := V(\text{trop}(f))$$

$$= \{w \in (\mathbb{R})^n \mid \text{trop}(f)(w) \text{ が少なくとも 2 項で最小値を取る} \}$$

と定め, **トロピカル超曲面**と呼ぶ.

以下, 代数多様体 $X = V(I) \subset (K^\times)^n, I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$: イデアルについて考える. $\text{trop}(X)$ は自然に定める.

Theorem (トロピカル代数幾何学の基本定理)

$$\text{trop}(X) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle\} = \overline{\text{val}(X)}$$

→ トロピカル多様体は付置や初項形式の情報で表せる.
以下これの簡単なところを示す.

鍵定理1：カプラノフの定理

カプラノフの定理

$f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ とする。このとき,

$$\text{trop}(V(f)) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \text{in}_{\mathbf{w}}(f) \text{ は単項式でない}\} = \overline{\text{val}(V(f))}.$$

(証明) :

(一つ目の等号)

$$\mathbf{w} \notin \text{trop}(V(f)) \iff \text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min_{\mathbf{u}} (\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$$

の最小値がただ1つの項で達成される

$$\iff \text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{\substack{\mathbf{u} \\ \text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}}} \text{ が単項式である}$$

$$\iff \mathbf{w} \notin \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \text{in}_{\mathbf{w}}(f) \text{ は単項式でない}\}.$$

したがって,

$$\text{trop}(V(f)) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \text{in}_{\mathbf{w}}(f) \text{ は単項式でない}\}.$$

(3つ目 $\subset$ 1つ目)

$y \in V(f)$ とする. このとき $f(y) = 0$ である. ここで,

$$\min_{\mathbf{u}} (\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{u} \cdot \text{val}(y))$$

がただ1つの指数 $\mathbf{v}$ によって達成されると仮定する. すると,

$$\min_{\mathbf{u} \neq \mathbf{v}} (\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{u} \cdot \text{val}(y)) > \text{val}(c_{\mathbf{v}}) + \mathbf{v} \cdot \text{val}(y).$$

一方, $f(y) = 0$ より,

$$\sum_{\mathbf{u} \neq \mathbf{v}} c_{\mathbf{u}} y^{\mathbf{u}} = -c_{\mathbf{v}} y^{\mathbf{v}}.$$

$$\begin{aligned} \text{val}(c_{\mathbf{v}}) + \mathbf{v} \cdot \text{val}(y) &= \text{val} \left(\sum_{\mathbf{u} \neq \mathbf{v}} c_{\mathbf{u}} y^{\mathbf{u}} \right) \\ &\geq \min_{\mathbf{u} \neq \mathbf{v}} (\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{u} \cdot \text{val}(y)) \\ &> \text{val}(c_{\mathbf{v}}) + \mathbf{v} \cdot \text{val}(y), \end{aligned}$$

となり矛盾する.

したがって、最小値は複数の項で達成される: $\text{val}(y) \in \text{trop}(V(f))$.
 $A = \text{supp}(f)$ とおくと,

$$\text{trop}(V(f)) = \bigcup_{\substack{\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in A \\ \mathbf{u} \neq \mathbf{u}'}} \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \text{val}(c_{\mathbf{u}'} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{w}, \\ \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \leq \text{val}(c_{\mathbf{u}''}) + \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{w} \\ (\forall \mathbf{u}'' \in A) \end{array} \right\}.$$

各集合: 有限個の閉半空間とアフィン超平面との共通部分 $\rightarrow$ 閉多面体.
 $A: f$ はローラン多項式 $\rightarrow$ 有限集合

$\rightarrow$ 有限個の閉多面体の和集合より. $\text{trop}(V(f))$ は閉集合. ゆえに,

$$\{\text{val}(y) \mid y \in V(f)\} \subset \text{trop}(V(f)).$$

$$\therefore \overline{\{\text{val}(y) \mid y \in V(f)\}} \subset \text{trop}(V(f)) = \overline{\text{trop}(V(f))}.$$

(2つ目 $\subset$ 3つ目) 大変.

トロピカル幾何学の基本定理

定理（トロピカル幾何学の基本定理）

$$\text{trop}(X) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq (1)\} = \overline{\text{val}(X)}.$$

(証明) :

$(\text{val}(X) \subseteq \text{trop}(X))$

$$\mathbf{y} \in X = V(I) \implies \forall f \in I, \quad f(\mathbf{y}) = 0.$$

$$\implies \forall f \in I, \quad \text{val}(\mathbf{y}) \in \text{trop}(V(f))$$

$$\implies \text{val}(\mathbf{y}) \in \bigcap_{f \in I} \text{trop}(V(f)) = \text{trop}(X)$$

したがって,

$$\text{val}(X) \subseteq \text{trop}(X).$$

$\text{trop}(X)$ は閉集合であるから, 示せた.

トロピカル幾何学の基本定理

$$(\text{trop}(X) \subseteq \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq (1)\})$$

$$\mathbf{w} \in \bigcap_{f \in I} \text{trop}(V(f)) \implies \forall f \in I, \mathbf{w} \in \text{trop}(V(f))$$

$$\implies \forall f \in I, \text{in}_{\mathbf{w}}(f) \text{ は単項式でない}$$

$$\implies \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq (1).$$

$(\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq (1)\} \subseteq \overline{\text{val}(X)})$ は別命題.

まとめ：トロピカル代数幾何学

トロピカル代数

$$x \oplus y = \min\{x, y\}, \quad \max\{x, y\}, \quad x \odot y = x + y$$

トロピカル多項式, 曲線

$$P(\mathbf{x}) = \min_i \{a_i + \mathbf{i} \cdot \mathbf{x}\}$$

$V(P)$: 折れ点集合

最適化問題への応用

- 最短経路問題
- 割当て問題
- 工程計画問題

トロピカルチャンス！

トロピカル代数幾何学の基本定理

$$\text{trop}(X) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle\} = \overline{\text{val}(X)}$$

参考文献



東京理科大学数理連携プロジェクト 編,
『特異点と McKay 対応・トロピカル幾何学とその応用 : 数理連携プロジェクト講義録』,
近代科学社 Digital, 2026.



D. マクラガン, B. シュツルムフェルズ 著,
石川剛郎, 梶原健, 小林正典, 前野俊昭 訳,
『トロピカル幾何学入門』,
丸善出版, 2023.



B. Heidergott, G. J. Olsder, J. van der Woude 著,
五島洋行, 福田亜希子, 渡邊扇之介 訳,
『max-plus 代数とその応用』,
森北出版, 2022.



G. Mikhalkin and J. Rau,
Tropical Geometry,
lecture notes, 2018.



G. Mikhalkin,
“Tropical Geometry and Its Applications,”
Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, 2006,
Vol. II, pp. 827–852.



小林正典,
「トロピカル幾何による工程計画問題の可視化」,
『計測と制御』第 52 巻第 12 号, pp. 1090–1095, 2013.