

幾何と幾何をつなげよう

可微分多様体と代数多様体

はる

October 14, 2026

お品書き

- 位相空間論の復習
- $\mathbb{R}^m$ 上の接ベクトル
- 可微分多様体
- 可微分多様体上での接ベクトル
- 環論の復習
- 代数幾何学入門
- 可微分多様体論からの考察
- まとめ
- おまけ (スキーム論の小話 (多分できない))

概略

幾何学を考える上ではその上に乗った構造を捉えることがしばしば重要になってくる。

それは例えば空間の上の関数だったり、作用素だったりするわけだが、今回は「接ベクトル空間」に焦点を絞って話をしたいと思う。

これは微分幾何学では重要な対象になって来て、その双対からなる微分形式から作られるドラムコホモロジーには空間の様子が強く反映されていることは良く知られている。

今回は初心者枠なので、位相空間論、環論の初歩のみを仮定して、微分幾何学の方に接ベクトル空間を定義し、これを代数幾何の側にも類似概念を導入してみようというのが大まかな流れである。

位相空間の復習

def. 位相空間

集合 X と部分集合族 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ が位相空間であるとは

- (1) $X \in \mathcal{O}$ かつ $\emptyset \in \mathcal{O}$
 - (2) $U_1, U_2, \dots, U_k \in \mathcal{O}$ ならば $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$
 - (3) 任意の集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O}$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ を満たすことをいう。
- また、 $\mathcal{O}$ を開集合系、 $U \in \mathcal{O}$ を開集合という。
また、開集合の補集合を閉集合といい、閉集合系で位相空間を定めることもできる。

以降、 $(X, \mathcal{O})$ を X と略記することがある。

def. ハウスドルフ空間

位相空間 X がハウスドルフであるとは

任意の異なる2点 $p, q \in X$ に対して、 p を含む開集合 U と q を含む開集合 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する。

位相空間の復習

def. 細分

位相空間 X の2つの開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ に対して $\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の細分であるとは、 $\forall \beta, \exists \alpha, V_\beta \subset U_\alpha$ となること。

def. 局所有限

位相空間 X の部分集合族 $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が局所有限であるとは、任意の $x \in X$ に対してある開近傍 U が存在して $\#\{\lambda \mid U_\lambda \cap U \neq \emptyset\} < +\infty$ となることである。

def. パラコンパクト空間

位相空間 X がパラコンパクトとは、任意の開被覆に対して、局所有限な細分が存在することである。

位相空間の復習

def. 連続写像

X, Y を位相空間とする。 $f : X \rightarrow Y$ が連続写像であるとは
 Y の任意の開集合 U に対して、 $f^{-1}(U)$ が X の開集合になることをいう。

def. 同相写像

X, Y を位相空間とする。 $f : X \rightarrow Y$ が同相写像であるとは

- (1) $f : X \rightarrow Y$ は全単射である。
- (2) $f : X \rightarrow Y, f^{-1} : Y \rightarrow X$ は共に連続写像である。

R^m 上の接ベクトル

def. 接ベクトル

R^n 上の C^∞ 級曲線 $c(t)$ を考える。

$c(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ とすると、 $t = a$ での接ベクトル v は $v = \frac{dc}{dt}|_{t=a} = (\frac{dx_1}{dt}(a), \frac{dx_2}{dt}(a), \dots, \frac{dx_n}{dt}(a))$ と書ける。

これを位相空間の上に拡張したい。

なぜならば、微分ができれば解析学の技術を使えるようになるからである。

そして微分ができればその図形の幾何学を、さらに知ることができるからだ。

ただ、一般の位相空間の上に拡張しようとする、病的な例が出てきてしまうので考える位相空間はある程度ユークリッド空間に近くなるようにいくつか条件を課す。そのための準備をしていく。

可微分多様体

まず、考えたい位相空間は局所的に見てユークリッド空間であってほしい。
微分は局所的な概念だからである。

また、どのように見ても本質的に同じに見えてほしい。

def. 座標近傍

位相空間 M の開集合 U から R^n へのある開集合 U' への同相写像 $\varphi: U \rightarrow U'$ が存在するとき、 (U, φ) を n 次元座標近傍という。

def. 座標変換

位相空間 M の n 次元座標近傍 $(U, \varphi), (V, \psi)$ の座標変換とは同相写像 $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ のことをいう。

可微分多様体

def. C^∞ 級多様体

位相空間 M と M の n 次元座標系の族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ の組 $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A})$ が n 次元 C^∞ 級多様体とは

- (1) M はハウスドルフ空間である。
- (2) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ は $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ となる。
- (3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となる任意の $\alpha, \beta \in A$ について、座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ 級である。
- (4) M はパラコンパクト空間である。

- (1) の条件は、点列の極限が収束するため。
 - (2) の条件は、任意の点が局所的にユークリッド空間であると見なすため。
 - (3) の条件は、見方を変えた時に関数の微分可能性を保つためである。
 - (4) の条件は、多様体がユークリッド空間に埋め込まれるため。
- また、以下では C^∞ 級多様体を単に可微分多様体という。

可微分多様体上の関数

C^∞ 級関数

M : 可微分多様体、 M 上の関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ が C^∞ 級であるとは、
 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ に属する任意の座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対して、

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

が C^∞ 級であること。

$\mathbb{R}^n$ 上の接ベクトル

M を n 次元可微分多様体とする。

M 上の点 p を固定し、その上の曲線 $c(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ を考える。

ただし、 $c(0) = p$ とする。

p を含む座標近傍 $(U, \phi), (V, \psi)$ をとる。

このとき、それぞれの座標近傍上で $\phi \circ c(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$,

$\psi \circ c(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$ と局所座標表示して、

素直に接ベクトルを計算してみるが一般に

$$\left(\frac{dx_1}{dt}(0), \frac{dx_2}{dt}(0), \dots, \frac{dx_n}{dt}(0) \right) \neq \left(\frac{dy_1}{dt}(0), \frac{dy_2}{dt}(0), \dots, \frac{dy_n}{dt}(0) \right)$$

であるから、他の手段で曲線 $c(t)$ の接ベクトルを与えたい。

$\mathbb{R}^n$ 上の接ベクトル

問題となったのは、座標近傍の取り方で値が異なってしまったことが原因である。よって、 $\mathbb{R}^n$ の接ベクトルの性質で $\mathbb{R}^n$ の基底の取り方に依らないものを考えたい。ここで、 $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を曲線 $c(t)$ の $t = 0$ での接ベクトル $(\frac{dc_1}{dt}(0), \frac{dc_2}{dt}(0), \dots, \frac{dc_n}{dt}(0))$ で微分することを考える。すると、以下が成立する。

$$\frac{d}{dt}f(c(t))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{dc_i}{dt}(0) \frac{df}{dx_i}(0)$$

つまり、曲線 $c(t)$ の $t = 0$ での接ベクトルとは、

$$f \mapsto \frac{d}{dt}f(c(t))|_{t=0}$$

という作用素であると解釈できる。これは $\mathbb{R}^n$ の基底の取り方に依らない。

可微分多様体上での接ベクトル

以上の考察を元に、可微分多様体上に次のような作用素を定める。

def. 曲線 $c(t)$ の $t = 0$ での接ベクトル

M : 可微分多様体, 曲線 $c(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, C^\infty$ 級関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、 f の $c(t)$ に沿う方向微分 v_c を次のように定める。

$$v_c : f \mapsto \frac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0}$$

可微分多様体上での接ベクトル

この作用素の性質としては以下のようなものがある。

性質

f, g を $c(0)$ の開近傍で定義された C^∞ 級関数とする。

- (1) 十分小さな開近傍上で $f = g$ のとき、 $v_c(f) = v_c(g)$
- (2) $a, b \in R$ とするとき、 $v_c(af + bg) = av_c(f) + bv_c(g)$
- (3) $v_c(fg) = v_c(f)g(c(0)) + v_c(g)f(c(0))$ (ライプニッツ則)

可微分多様体上での接ベクトル

このような作用素を抽象化して、全て集めることで可微分多様体の上に接ベクトル空間を構成することが可能となる。

def. 接ベクトル空間

可微分多様体 M の点 p に対して、点 p における M の接ベクトル空間とは、 f を p のある開近傍上 C^∞ 級関数とし、作用素 $v: f \mapsto v(f)$ で以下を満たすものの全体とする。

- (1) 十分小さな開近傍上で $f = g$ のとき、 $v(f) = v(g)$
- (2) $a, b \in \mathbb{R}$ とするとき、 $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$
- (3) $v(fg) = v(f)g(p) + v(g)f(p)$ (ライプニッツ則)

可微分多様体上での接ベクトル

また、接ベクトル空間は名前の通り、 R 上ベクトル空間に実際になっていることが確かめられる。

また、その基底として次のようなものを考えることができる。

Thm. 接ベクトル空間の基底

p を含む座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ を一つ固定する。

p の開近傍上定義された C^∞ 級関数 f に対して、 $\frac{\partial f(\varphi)}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p))$ を対応させる作用素を $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ と定める。

このとき、 $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ は点 p における接ベクトル空間の元であり、 $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_p\}_{i=1, \dots, n}$ は接ベクトル空間の基底である。

以降、点 p における M の接ベクトル空間を $T_p M$ と表す。

代数幾何入門

話は大きく変わるが、古くから研究されている幾何的対象として、「多項式の零点集合」がある。

$y = x^2$ (放物線)、 $y^2 = x^2(x + 1)$ (自己交叉する曲線)、楕円曲線が代表例となる。

放物線や(非特異)楕円曲線は適切な可微分多様体の構造を入れることで幾何を見ることができるが、一般に多項式の零点集合は尖っていたり、自己交叉したりと可微分多様体の構造が入らないことが多い。(局所的にユークリッドでは無かったり、点が"滑らか"ではない)

そこで多項式の零点集合の幾何を見るために発展してきたのが代数幾何である。

そこでここからは可微分多様体と所々で対比しながら、古典的代数幾何の入り口を見て行こうと思う。

環論の復習

代数幾何の話の前に環論の復習をする。

def. 環

集合 R が環であるとは、二つの二項演算 $+$, $\cdot$ が定義されていて、以下を満たすことを言う。

- $(R, +)$ は可換群である。
- $(R, \cdot)$ はモノイドである。
- $+$, $\cdot$ の間に分配法則が成立する。

def. (両側) イデアル

$I \subset R$ がイデアルであるとは、

- I は加法について部分群である。
- $\forall r \in R, \forall x \in I$ に対して、 $rx, xr \in I$ となる。

環論の復習

def. 剰余環

R を環、 I をその両側イデアルとする。
このとき、 $R/I := \{r + I \mid r \in R\}$ は環になる。

def. 素イデアル, 極大イデアル, 根基イデアル

- $I \subset R$ が素イデアルとは、
 R/I が整域であること。(整域とは非自明な零因子のない環)
- $I \subset R$ が極大イデアルとは、
 R/I が体であること。(体は乗法に関する逆元が取れる環)
- $I \subset R$ が根基イデアルとは、
 R/I に非自明な幂零元 ($r \in R, \exists n \in \mathbb{N}, r^n = 0$ となる元) がないこと。

環論の復習

def. 多項式環

$R := k[x_1, \dots, x_n]$ を k 係数 n 変数多項式環という。

def. T の生成するイデアル

$T \subset R, \langle T \rangle := \{ \sum_{i \in I} f_i g_i \mid f_i \in R, g_i \in T, |I| < +\infty \}$

ネーター環

環 A の任意のイデアルが有限生成なとき、ネーター環という。

Rem. R はネーター環。(ヒルベルトの基底定理より従う。)

代数幾何入門

まずは代数幾何の舞台を用意していきたい。

def. 代数閉体

k が代数閉体とは、 k が体であって、任意の k 係数 1 変数多項式が k 上に根を持つことをいう。

Rem. 例えば複素数 $\mathbb{C}$ は代数閉体である。

また、以後特に断らなければ k は代数閉体とする。

def. アフィン空間

k : 代数閉体に対し、 $\mathbb{A}^n := k^n$ をアフィン空間と呼ぶ。

古典的代数幾何学は基本的にアフィン空間上で行われる。(射影空間もあるが、これはアフィン空間のコンパクト化のようなものである。今回は時間の都合上アフィン空間の話のみ行う。)

代数幾何学入門

def. アフィン代数的集合

$T \subset k[x_1, \dots, x_n]$ に対して、
 $Z(T) := \{p \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in T, f(p) = 0\}$ をアフィン代数的集合という。

以後、これを代数的集合という。

def. 定義イデアル

$Y \subset \mathbb{A}^n$ に対して、
 $I(Y) := \{f \in R \mid \forall p \in Y, f(p) = 0\}$ を Y の定義イデアルという。

これは実際にイデアルとなっている。

代数幾何学入門

次の命題から、代数的集合の全体はアフィン空間の閉集合系を定めることが分かる。

Prop. 代数的集合は閉集合系の公理を満たす

- (1) $\{I_\alpha\}$ を R の部分集合族とする。このとき、 $Z(\cup_\alpha I_\alpha) = \cap_\alpha Z(I_\alpha)$
- (2) $Z(I) \cup Z(J) = Z(I \cap J)$
- (3) $Z(0) = \mathbb{A}^n, Z(1) = \emptyset$

def. ザリスキー位相

$(\mathbb{A}^n, \{Z \subset \mathbb{A}^n | Z : \text{alg.set}\})$ をザリスキー位相空間という。

Rem. ザリスキー位相空間は一般にハウスドルフにはならない。一次元アフィン空間でのザリスキー位相は補有限位相となることが知られている。(全体ではない閉集合を取ると、それはあるイデアルに Z を取ったもので、多項式環のネーター性から有限個の多項式で表せて OK)

代数幾何学入門

def. 既約性

位相空間 X の空でない部分集合 Y が既約であるとは、 Y の閉集合 Y_1, Y_2 を用いて、 $Y = Y_1 \cup Y_2$ として表せないことをいう。ただし、空集合は既約でないとする。

def. アフィン代数多様体

アフィン代数多様体とは、 $\mathbb{A}^n$ の既約閉集合のことである。

def. アフィン座標環

$Y \subset \mathbb{A}^n$ に対して、 $A(Y) := R/I(Y)$ を Y のアフィン座標環という。

代数幾何学入門

Thm. 代数的集合と定義イデアル

- $T_1 \subset T_2 \subset R$ に対して、 $Z(T_1) \supset Z(T_2)$
- $Y_1 \subset Y_2 \subset \mathbb{A}^n$ に対して、 $I(Y_1) \supset I(Y_2)$
- $\forall Y_1, Y_2 \subset \mathbb{A}^n$ に対して、 $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$
- $\forall \mathfrak{a} \subset R$ に対して、 $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}, f^n \in \mathfrak{a}\}$
- $\forall Y \subset \mathbb{A}^n$ に対して、 $Z(I(Y)) = \bar{Y}$

Thm. 既約閉集合と根基イデアル

$Y \subset \mathbb{A}^n \mapsto I(Y) \subset R$ と $\mathfrak{a} \subset R \mapsto Z(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}^n$ によって、
 $\mathbb{A}^n$ の代数的集合と R の根基イデアルは包含を反転するように一対一対応する。
特に、

- 既約閉集合と素イデアルは一対一に対応し、
- 閉点 $P \in \mathbb{A}^n$ と極大イデアル $\mathfrak{m}_P \subset R$ は一対一に対応する。

可微分多様体と代数多様体

可微分多様体と代数多様体の大きく異なる点として、定義が内在的か外在的か、という点にある。

可微分多様体の定義には局所的にユークリッド空間と同相なことのみを要請していて、外の世界を必要としていない。

一方で、代数多様体の定義は外側のアフィン空間に大きく依存している。

であるが、可微分多様体はホイトニーの埋め込み定理によりユークリッド空間に埋め込めることも知られている。(可微分多様体の定義でばかした(4)の条件が効いている)

つまり、可微分多様体と代数多様体はユークリッド空間に埋め込まれているか、アフィン空間に埋め込まれているか。という点で比較できる。

代数幾何学入門

こうしてできたアフィン代数多様体の上に"良い"関数を考えたい。
可微分多様体では C^∞ 級関数を扱ったが、今回はそのようなものは持ってこれそうにない。
では、どのようなものであってほしいかというと、まずアフィン空間の座標関数は"良く"あってほしい。
つまり、その線形和である多項式は"良い"関数であってほしい。
また、アフィン空間の閉集合は $V(f)$ のような形をしている。逆に言えば開集合を $D(f)$ とすると、これは f が消えないような点の集合である。
このような集合の上では f は単元のような振る舞いをするため、 $D(f)$ 上では分母に f を許容したい。
このような思考は「局所化」という操作で正当化されるが、今回は紙面の都合上割愛する。

代数幾何学入門

アフィン代数多様体上の正則 (regular) 関数

Y を $\mathbb{A}^n$ のアフィン代数多様体 X の開集合とする。

関数 $f: Y \rightarrow k$ が点 $P \in Y$ で正則であるとは、 $P \in U \subset Y$ なる開近傍 U と多項式 $g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$ が存在して、 h が U 上で 0 にならず、 $f = \frac{g}{h}$ となることをいう。
 f が Y 上の全ての点で正則なとき、 f は Y 上正則という。

考察

一般に代数多様体には自然には微分が定まらない。

そこで可微分多様体の接ベクトル空間が満たしている代数構造から代数的に特徴付けをして代数幾何学側に接ベクトル空間を構成したい。

接空間とは各点での概念だったので、次のようなものを考えてみる。

局所環 (可微分多様体)

X : 可微分多様体とする。 X 上の C^∞ 級関数のなす環を C_X^∞ とする。

P が X の点であるとき、 X 上の P における局所環 C_P^∞ を、 C_P^∞ の元はペア $\langle U, f \rangle$ とする。ここで、 U は P を含む X の開部分集合、 f は U 上の C^∞ 級関数であり、 $U \cap V$ 上で $f = g$ となるとき、2つのペア $\langle U, f \rangle$ と $\langle V, g \rangle$ を同一視する。

局所環の極大イデアル

C_P^∞ はただ一つの極大イデアル $\mathfrak{m}_P := \{f \in C_P^\infty \mid f(P) = 0\}$ を持つ。

考察

可微分多様体上では接空間はその点での座標関数に対する方向微分で張られる空間であった。

すなわち、関数の1階微分の情報を取り出した空間からその情報を元に $\mathbb{R}$ を吐き出すような線形写像の空間であった。

ところで m_p というのは p 上で0になる関数であったが、これは元としてはテイラー展開した時に定数項がない多項式であるということを示している。そこから、2次以上の項を消せたら1次の項だけが残る関数の一回微分の情報を得られそうで良いのだが、そのためには $(m_p)^2$ で割れば良さそうで、そこに対して双対を取れば接空間もどきができそうであり、実際それが次の定理の意味で成り立つ。

考察

Thm. 接空間の代数的な定義

$$\Phi : T_P M \cong (\mathfrak{m}_P / (\mathfrak{m}_P)^2)^* \text{ as linear sp.}$$

これは次の補題を用いて簡単に示せる。

Lem. アダマールの補題

ユークリッド空間上の C^∞ 級関数 f に対し、次を満たす C^∞ 級関数が存在する。

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{ただし、} \frac{\partial f}{\partial x_k}(0, \dots, 0) = g_k(0, \dots, 0)$$

考察

proof)

まず、 Φ を定める。任意の $v \in T_p M$ に対して $f, g \in \mathfrak{m}_p$ は $v(fg) = 0$ となる。

よって、 $\bar{v} : \mathfrak{m}_p / (\mathfrak{m}_p)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $[f] \mapsto v(f)$ が誘導される。

これを、 $\Phi : T_p M \rightarrow (\mathfrak{m}_p / (\mathfrak{m}_p)^2)^*$; $v \mapsto \bar{v}$ と定める。

単射性は $\Phi(v) = 0$ の時に $v = 0$ を示せばよいわけだが、

これは $f \in \mathcal{C}_p^\infty$ が $(f(x) - f(p)) + f(p)$ と分解できることから明らか。

$$(0 = \Phi(v)([f]) = v(f(x) - f(p)) = v(f))$$

考察

proof)

全射性は $f \in \mathfrak{m}_p$ に対してアダマールの補題を適用すると、

$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$ と書ける。

ここで、 $x_i g_i(x) = x_i(g_i(x) - g_i(p)) + x_i g_i(p)$ であり、

$x_i(g_i(x) - g_i(p)) \in (\mathfrak{m}_p)^2$ より、 f の $\mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2$ での代表元は

$$[f] = \sum_{i=1}^n g_i(P)[x_i] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)[x_i]$$

つまり、 $\mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2$ の基底は $\{[x_1], \dots, [x_n]\}$ である。

また、 $T_p M$ の標準的な基底に対し、それを送った元 $\Phi((\frac{\partial}{\partial x_i})_p)$ に、 $[x_j]$ を食わせると定義からクロネッカーの δ になることから双対基底になっている。

よって、

$$\Phi : T_p M \cong (\mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2)^*$$

は基底に依らない同型である。(圏論の言葉を用いれば、自然同型になっている。)

代数幾何学入門

局所環

X : アフィン代数多様体とする。 X 上の正則関数のなす環を $\mathcal{O}(X)$ とする。
 P が X の点であるとき、 X 上の P における局所環 $\mathcal{O}_P$ を以下のように定める。
 $\mathcal{O}_P$ の元はペア $\langle U, f \rangle$ とする。 U は P を含む X の開部分集合、 f は U 上の正則関数であり、 $U \cap V$ 上で $f = g$ となるとき、2つのペア $\langle U, f \rangle$ と $\langle V, g \rangle$ を同一視する。

局所環の極大イデアル

X : 代数多様体、 $P \in X$ に対し $\mathfrak{m}_P := \{f \in \mathcal{O}_P \mid f(P) = 0\}$

そして、事実として代数多様体側でも正則関数の局所環を使った構成ができる。
よって、代数多様体側にも同様にして接空間が定まる。

代数幾何学入門

ザリスキー接空間

$T_p(X) = (\mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2)^*$ をザリスキー接空間という。

さて、長い時間をかけてザリスキー接空間を定義したわけだがこれを用いると、最初に言ったようなこと (自己交叉や尖点) があるかないかを判定できる。

Thm. 接空間を用いた非特異性の判定

X : 代数多様体、任意の点 $P \in X$ に対して、 $\dim(X) \leq \dim(T_p(X))$

特に、等号成立と P : 非特異は同値

例えば、自己交叉する直線を考えると、その点で2方向の微分があるがそのようなことが起こるのが特異点である。と理解できる。

まとめ

このようにして微分幾何学と代数幾何学という異なるところから出発した2つの幾何学であったが、接ベクトル空間という部分で類似を見ることができた。
これは接ベクトル空間以外にも往々にしてあることで、その中でもコホモロジーの間の対応などはGAGA型の定理として知られている。
ご清聴ありがとうございました。

おまけ1

可微分多様体では接ベクトル空間の双対を束ねて余接束を作り、そこに住んでいる微分形式達からドラムコホモロジーを構成できる。

同様に各点で $(\mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2)$ となるようなケーラー微分の層を構成して、層係数コホモロジーを見ることでコホモロジー論を展開することができる。

適当な複素多様体の上ではこれらの出自の違うコホモロジーが実際に同型になる。(ケーラー微分の層は1形式のようなものだから適切に高次元化する必要はある。)

おまけ2

$\mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2$ はあまりにも代数的な定義すぎる、と思った人は $k[\varepsilon]/[\varepsilon^2]$ (まじで1次近似っぽい!) を用いた定め方もある。しかし、これにはスキームという道具が必要になってくる。(古典的代数幾何の枠組みでは冪零元を捉えることができない。) ちゃんと言うと、 k 上のスキームという枠組みの上で動くのだが、接空間っぽさは被約スキームとかいうやつを考えたらよいと思う。

参考文献

多様体の基礎/松本 幸夫 (可微分多様体パート)

Algebraic Geometry/R.Hartshorne (代数幾何パート)

多様体入門/坪井 俊 (アダマールの補題など)