

PA の可算超準モデルってマジやばくて！

いことんど

2026 年 10 月 11 日

@ 神戸大学

何の話？

- PA の可算超準モデルがやばい！って話をします.
- 証明の概略と，鍵となる概念を紹介します.
- 古典一階述語論理の完全性定理の主張を理解できることを前提とします.
 - 論理式，理論，証明，構造，モデル，……

1. 基本的な事柄
2. 順序だけ見るとやばくない！
3. てんねんばうむ！
4. ふり～どまん！
5. もっと！ふり～どまん！
6. まとめ

1. 基本的な事柄

1. 基本的な事柄

2. 順序だけ見るとやばくない！

3. てんねんばうむ！

4. ふり～どまん！

5. もっと！ふり～どまん！

6. まとめ

PA とは？

- 言語 $\mathcal{L}_A = \{+, \times, <, 0, 1\}$
- PA = 離散全順序可換半環の非負部分 + 帰納法公理図式

定義 1.1 (離散全順序可換半環の非負部分)

可換半環

- $\forall x(x + 0 = x)$
- $\forall x, y, z((x + y) + z = x + (y + z))$
- $\forall x, y(x + y = y + x)$
- $\forall x, y, z((x \times y) \times z = x \times (y \times z))$
- $\forall x(x \times 1 = x)$
- $\forall x, y, z(x \times (y + z) = x \times y + x \times z)$
- $\forall x, y(x \times y = y \times x)$
- $\forall x(x \times 0 = 0)$

全順序

- $\forall x, y, z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$
- $\forall x \neg(x < x)$
- $\forall x, y(x < y \vee x = y \vee y < x)$
- $\forall x, y, z(x < y \rightarrow x + z < y + z)$
- $\forall x, y, z(0 < z \wedge x < y \rightarrow x \times z < y \times z)$
- $\forall x, y(x < y \rightarrow \exists z(x + z = y))$

離散 $0 < 1 \wedge \forall x(0 < x \rightarrow 1 \leq x)$

非負 $\forall x(0 \leq x)$

定義 1.2 (PA)

PA = 離散全順序可換半環の非負部分 + 帰納法公理図式

帰納法公理図式 $\mathcal{L}_A$ -論理式 $\varphi(x, \vec{y})$ について,

$$\forall \vec{y}((\varphi(0, \vec{y}) \wedge \forall x(\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow \varphi(x+1, \vec{y}))) \rightarrow \forall x \varphi(x, \vec{y}))$$

- 不完全性定理の分析に便利.
- 自然数についての何かしらの性質を表しているように見える.
 - 通常 of 自然数構造は, PA のモデルになる.

- 不完全性定理の分析に便利.
- 自然数についての何かしらの性質を表しているように見える. ← 今回はこっちに注目.
 - ▶ 通常 of 自然数構造は, PA のモデルになる.
 - ▶ PA のモデル = PA が表す自然数についての性質を満たす構造.
 - ▶ PA は標準的な自然数構造 $\mathbb{N}$ とは異なる超準モデルを持つ.
 - ▶ PA の可算超準モデルの“構造”がヤバいことを紹介する.

超準モデルとは？

- 自然数全体の集合 ω に対して, $\mathcal{L}_A = \{+, \times, <, 0, 1\}$ を通常通りに解釈した構造を $\mathbb{N}$ と書く.
- $\mathbb{N} \models \text{PA}$ である.

定義 1.3 (超準モデル)

PA のモデルで, $\mathbb{N}$ と同型でないものを PA の**超準モデル**という.

定理 1.4

PA の超準モデルが存在する.

これはコンパクト性定理から従う.

事実 1.5 (コンパクト性定理)

理論 T の全ての有限部分理論がモデルを持つなら, T もモデルを持つ.

超準モデルとは？

再掲 (定理 1.4)

PA の超準モデルが存在する。

再掲 (コンパクト性定理)

理論 T の全ての有限部分理論がモデルを持つなら、 T もモデルを持つ。

$\bar{0} := 0$, $\bar{1} := 1$, $n \geq 2$ に対して, $\bar{n} := \underbrace{((1 + 1) + 1) + \dots + 1}_{1 \text{ が } n \text{ 個}}$ と略記する. これらを数項という.

証明：

1. c を新しい定数記号とし, $\mathcal{L}_A \cup \{c\}$ -理論 $T = \text{PA} + \{c > \bar{n} : n \in \omega\}$ を考える.
2. $k \in \omega$ に対して, $\text{PA} + \{c > \bar{n} : n < k\}$ は $c := k$ とすれば $\mathcal{L}_A \cup \{c\}$ -構造 $\mathbb{N}$ をモデルに持つ.
3. $k \in \omega$ は任意なので, T の全ての有限部分理論がモデルを持つ.
4. 従って, コンパクト性定理から T はモデル M を持つ.
5. 任意の $n \in \omega$ に対して, $M \models \bar{n}^M < c^M$ なので, M は $\mathbb{N}$ と同型でない.

□

超準モデルとは？

再掲 (定理 1.4)

PA の超準モデルが存在する。

この定理は、超準モデルの濃度については言及していない。

しかし、証明の 4. の後に下方 Löwenheim–Skolem の定理を適用すると、可算性が言える。

定理 1.6

PA の **可算** 超準モデルが存在する。

すぐに分かる超準モデルの構造

定義 1.7 (部分構造)

$\mathcal{L}$ -構造 M と N について, M が N の部分構造 $M \subset N$ であるとは,
ある単射 $\sigma : M \rightarrow N$ が存在して

- 任意の定数記号 $c \in \mathcal{L}$ について $\sigma(c^M) = c^N$
- 任意の n -変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ と $a_0, \dots, a_{n-1} \in M$ に対して

$$\sigma(f^M(a_0, \dots, a_{n-1})) = f^N(\sigma(a_0), \dots, \sigma(a_{n-1}))$$

- 任意の n -変数関係記号 $R \in \mathcal{L}$ と $a_0, \dots, a_{n-1} \in M$ に対して

$$R^M(a_0, \dots, a_{n-1}) \iff R^N(\sigma(a_0), \dots, \sigma(a_{n-1}))$$

- この σ を M から N への埋込という.
- 以降, 埋込の存在とドメインが部分集合になっていることを同一視する.

▶ 例えば埋込 $\sigma : M \rightarrow N$, $a \in M$ と $b \in N$ に対し,

$N \models \sigma(a) < b$ は $N \models a < b$ と書き, $\sigma^{-1}(b) \in M$ のとき $M \models \sigma^{-1}(b) < a$ は $M \models b < a$ と書く.

すぐに分かる超準モデルの構造

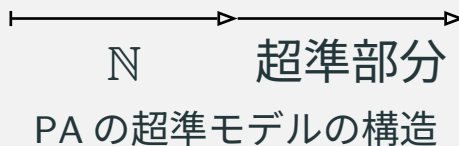
定義 1.8 (始切片)

$\mathcal{L}_A$ -構造 M と N に対して, M が N の始切片 $M \subset_i N$ であるとは,

- $M \subset N$
- $\forall b \in N (\exists a \in M \text{ s.t. } N \models b < a) \implies b \in M$

定理 1.9

PA の超準モデルは $\mathbb{N}$ を最小の始切片に持つ.



$\sigma : \mathbb{N} \rightarrow M; n \mapsto \bar{n}^M$ を考えれば良い.

2. 順序だけ見るとやばくない！

1. 基本的な事柄
2. 順序だけ見るとやばくない！
3. てんねんばうむ！
4. ふり～どまん！
5. もっと！ふり～どまん！
6. まとめ

順序だけ見るとやばくない！：準備

PA の超準モデルは，順序構造だけに注目するとヤバくないことを見る。
まずはその準備。

定義 2.1 (同型)

$\mathcal{L}$ -構造 M と N について， M と N が同型 $M \cong N$ であるとは，全射な埋込が存在すること：
ある全単射 $\sigma : M \rightarrow N$ が存在して

- 任意の定数記号 $c \in \mathcal{L}$ について $\sigma(c^M) = c^N$
- 任意の n -変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ と $a_0, \dots, a_{n-1} \in M$ に対して

$$\sigma(f^M(a_0, \dots, a_{n-1})) = f^N(\sigma(a_0), \dots, \sigma(a_{n-1}))$$

- 任意の n -変数関係記号 $R \in \mathcal{L}$ と $a_0, \dots, a_{n-1} \in M$ に対して

$$R^M(a_0, \dots, a_{n-1}) \iff R^N(\sigma(a_0), \dots, \sigma(a_{n-1}))$$

定義 2.2 (DLO)

DLO とは，端点のない稠密全順序の理論のことで，次の公理からなる：

全順序

- $\forall x \neg(x < x)$
- $\forall x, y, z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$
- $\forall x, y (x < y \vee x = y \vee y < x)$

稠密性 $\forall x, y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$

端点がない $\forall x \exists y, z (y < x \wedge x < z)$

Cantor の往復論法により，可算な DLO のモデルは $\mathbb{Q}$ と同型．

順序だけ見るとやばくない！

- PA の超準モデル M の順序構造だけに注目するとやばくないことを見る．
- $\mathcal{L}_A$ -構造 M において， $+$, $\times$, 0 , 1 の解釈を忘れた $\{<\}$ -構造を $M \upharpoonright <$ と書く．

定理 2.3

任意の PA の超準モデル M に対して，ある $\{<\}$ -構造 $A \models \text{DLO}$ が存在して $M \upharpoonright < \cong \mathbb{N} + A \times \mathbb{Z}$ ．
ただし， $A \times \mathbb{Z}$ は A と $\mathbb{Z}$ から誘導される辞書式順序．

$$\xrightarrow{\mathbb{N}} \underbrace{\dots \left(\frac{\quad}{\mathbb{Z}} \right) \dots \left(\frac{\quad}{\mathbb{Z}} \right) \dots}_{A \text{ に沿って } \mathbb{Z} \text{ が並ぶ}}$$

- 可算な DLO のモデルは $\mathbb{Q}$ と同型．
~~~~> **可算超準モデルは順序構造としては全部同型！**

$M$  を PA の超準モデルとする.

1.  $M$  上の同値関係  $\sim$  を次で定める:  $a, b \in M$  に対して

$$a \sim b \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } M \models a + n = b \vee a = b + n$$

2.  $A := (M \setminus [0]) / \sim$  とする.

•  $A$  の  $<$  の解釈は,  $M \models <$  から誘導される順序  $[a] <^A [b] \stackrel{\text{def}}{\iff} [a] \neq [b] \ \& \ M \models a < b$  とする.

3.  $A \models \text{DLO}$  を示す.

4.  $f : \mathbb{N} + A \times \mathbb{Z} \rightarrow M$  を次で定める: 各  $[a] \in A$  の代表元  $a$  をそれぞれ固定し,

$$f : \begin{cases} n & \mapsto \bar{n}^M & \text{if } n \in \mathbb{N} \\ ([a], m) & \mapsto a + m & \text{if } [a] \in A \ \& \ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

5.  $f$  が同型であることを示す.

$M$  を PA の超準モデルとする.

1.  $M$  上の同値関係  $\sim$  を次で定める:  $a, b \in M$  に対して

$$a \sim b \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } M \models a + n = b \vee a = b + n$$

2.  $A := (M \setminus [0]) / \sim$  とする.

•  $A$  の  $<$  の解釈は,  $M \models <$  から誘導される順序  $[a] <^A [b] \stackrel{\text{def}}{\iff} [a] \neq [b] \ \& \ M \models a < b$  とする.

3.  $A \models \text{DLO}$  を示す.

4.  $f: \mathbb{N} + A \times \mathbb{Z} \rightarrow M$  を次で定める: 各  $[a] \in A$  の代表元  $a$  をそれぞれ固定し,

$$f: \begin{cases} n & \mapsto \bar{n}^M & \text{if } n \in \mathbb{N} \\ ([a], m) & \mapsto a + m & \text{if } [a] \in A \ \& \ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

5.  $f$  が同型であることを示す.

1., 2., 4., 5. はやればできる.

問題は 3.

1.  $a, b \in M$  に対して,  $a \sim b \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } M \models a + n = b \vee a = b + n$
2.  $A := (M \setminus [0]) / \sim$  とする.  $[a] <^A [b] \stackrel{\text{def}}{\iff} [a] \neq [b] \ \& \ M \models a < b$

## 再掲 (DLO)

DLO とは, 端点のない稠密全順序の理論のことで, 次の公理からなる:

### 全順序

- $\forall x \neg(x < x)$
- $\forall x, y, z(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$
- $\forall x, y(x < y \vee x = y \vee y < x)$

**稠密性**  $\forall x, y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$

**端点がない**  $\forall x \exists y, z(y < x \wedge x < z)$

全順序性と端点がないことはやればできる. (端点がないことは多少の算術が必要)

**問題は稠密性**

再掲 (帰納法公理図式)

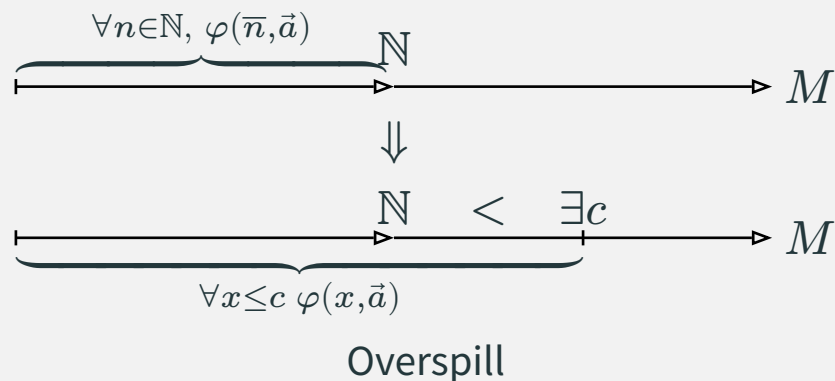
論理式  $\varphi(x, \vec{y})$  について,  $\forall \vec{y}((\varphi(0, \vec{y}) \wedge \forall x(\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow \varphi(x+1, \vec{y}))) \rightarrow \forall x\varphi(x, \vec{y}))$

PA の帰納法公理図式から次が従う.

定理 2.4 (Overspill)

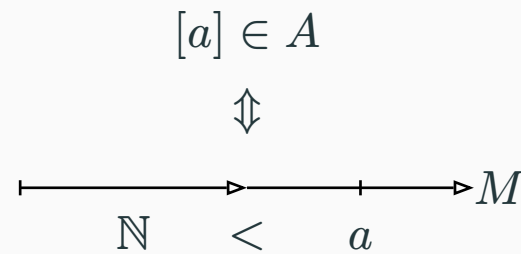
$M$  を PA の超準モデル,  $\vec{a} \in M$ ,  $\varphi(x, \vec{y})$  を論理式とする.

このとき,  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  ならば  $\exists c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$ .



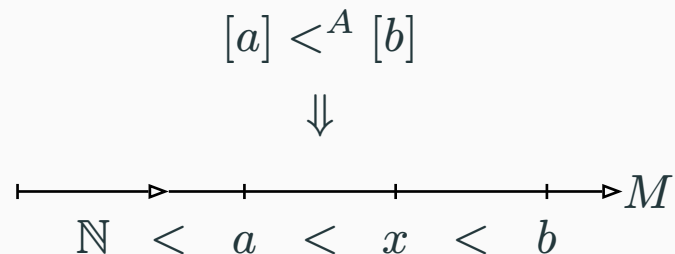
# 稠密性の証明

- $a \sim b \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } M \models a + n = b \vee a = b + n$
  - $A := (M \setminus [0]) / \sim$ .
  - $[a] <^A [b] \stackrel{\text{def}}{\iff} [a] \neq [b] \ \& \ M \models a < b$
- このとき,  $[a] \in A \iff a > \mathbb{N}$ .



すると,  $[a] <^A [b]$  なら  $<^A$  と  $\sim$  の定義から,

$$\forall n \in \mathbb{N}, M \models \exists x (a + n < x \wedge x + n < b)$$



すると **overspill** から,

$$\exists c > \mathbb{N} \text{ s.t. } M \models \forall n \leq c \exists x (a + n < x \wedge x + n < b)$$

$n$  として  $c$  を取れば, ある  $d \in M$  があって  $M \models a + c < d \wedge d + c < b$ .

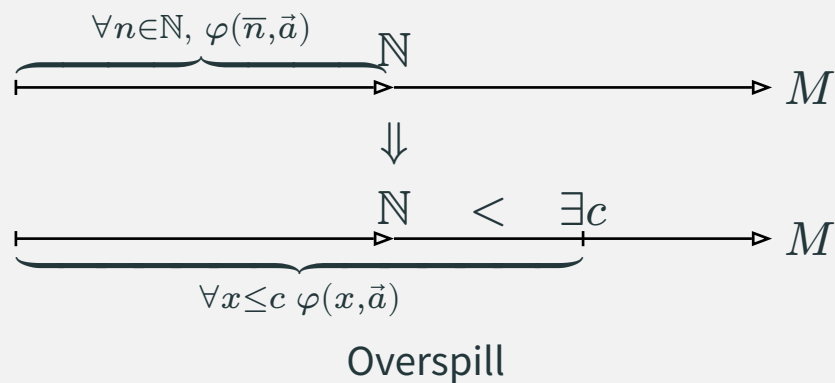
この  $d$  が  $[a] <^A [d] <^A [b]$  を満たす.

# Overspill が偉いんです！

## 再掲 (定理 2.4 : Overspill)

$M$  を PA の超準モデル,  $\vec{a} \in M$ ,  $\varphi(x, \vec{y})$  を論理式とする.

このとき,  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  ならば  $\exists c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$ .



Overspill は以降で紹介する定理でも効いてくる. めちゃえらい！

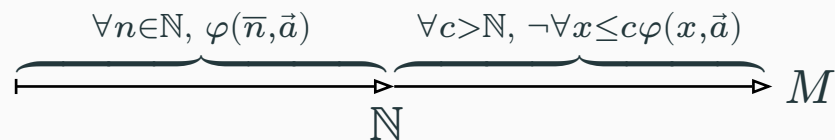
## 再掲 (定理 2.4 : Overspill)

$M$  を PA の超準モデル,  $\vec{a} \in M$ ,  $\varphi(x, \vec{y})$  を論理式とする.

このとき,  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  ならば  $\exists c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$ .

Overspill は帰納法公理から従う.

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  であって,  $c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$  なる  $c \in M$  が存在しないとする.



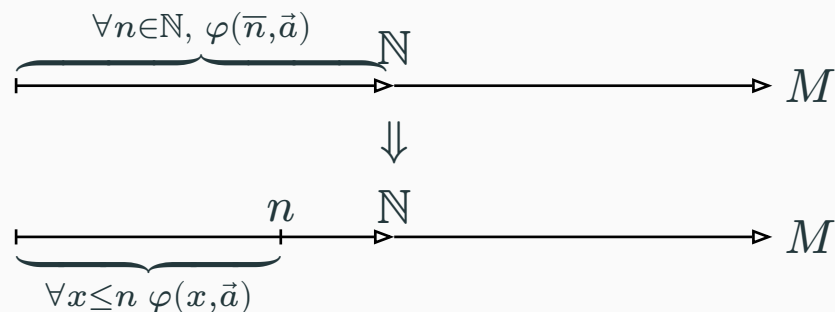
再掲 (定理 2.4 : Overspill)

$M$  を PA の超準モデル,  $\vec{a} \in M$ ,  $\varphi(x, \vec{y})$  を論理式とする.

このとき,  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  ならば  $\exists c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$ .

Overspill は帰納法公理から従う.

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  であって,  $c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$  なる  $c \in M$  が存在しないとする.
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  より  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \forall x \leq n \varphi(x, \vec{a})$ .



## 再掲 (定理 2.4 : Overspill)

$M$  を PA の超準モデル,  $\vec{a} \in M$ ,  $\varphi(x, \vec{y})$  を論理式とする.

このとき,  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  ならば  $\exists c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$ .

Overspill は帰納法公理から従う.

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  であって,  $c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$  なる  $c \in M$  が存在しないとする.
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  より  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \forall x \leq n \varphi(x, \vec{a})$ .
3.  $\forall c > \mathbb{N}, M \models \neg \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$  なので,  $\mathbb{N} = \{n \in M : M \models \forall x \leq n \varphi(x, \vec{a})\}$ .

再掲 (定理 2.4 : Overspill)

$M$  を PA の超準モデル,  $\vec{a} \in M$ ,  $\varphi(x, \vec{y})$  を論理式とする.

このとき,  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  ならば  $\exists c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$ .

Overspill は帰納法公理から従う.

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  であって,  $c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$  なる  $c \in M$  が存在しないとする.
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  より  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \forall x \leq n \varphi(x, \vec{a})$ .
3.  $\forall c > \mathbb{N}, M \models \neg \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$  なので,  $\mathbb{N} = \{n \in M : M \models \forall x \leq n \varphi(x, \vec{a})\}$ .
4. このとき,  $\forall x \leq y \varphi(x, \vec{a})$  に対して帰納法公理を適用する:
  - $0 \in \mathbb{N}$  なので,  $M \models \forall x \leq 0 \varphi(x, \vec{a})$
  - 任意の  $n \in M$  について,  $n \in \mathbb{N}$  なら  $n+1 \in \mathbb{N}$  なので,  
 $M \models \forall y (\forall x \leq y \varphi(x, \vec{a}) \rightarrow \forall x \leq y+1 \varphi(x, \vec{a}))$ .

## 再掲 (定理 2.4 : Overspill)

$M$  を PA の超準モデル,  $\vec{a} \in M$ ,  $\varphi(x, \vec{y})$  を論理式とする.

このとき,  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  ならば  $\exists c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$ .

Overspill は帰納法公理から従う.

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  であって,  $c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$  なる  $c \in M$  が存在しないとする.
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  より  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \forall x \leq n \varphi(x, \vec{a})$ .
3.  $\forall c > \mathbb{N}, M \models \neg \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$  なので,  $\mathbb{N} = \{n \in M : M \models \forall x \leq n \varphi(x, \vec{a})\}$ .
4. このとき,  $\forall x \leq y \varphi(x, \vec{a})$  に対して帰納法公理を適用する:
  - $0 \in \mathbb{N}$  なので,  $M \models \forall x \leq 0 \varphi(x, \vec{a})$
  - 任意の  $n \in M$  について,  $n \in \mathbb{N}$  なら  $n+1 \in \mathbb{N}$  なので,  
 $M \models \forall y (\forall x \leq y \varphi(x, \vec{a}) \rightarrow \forall x \leq y+1 \varphi(x, \vec{a}))$ .
5. 従って  $\forall x \leq y \varphi(x, \vec{a})$  に対する帰納法公理より,  $M \models \forall y \forall x \leq y \varphi(x, \vec{a})$ . すなわち  $\mathbb{N} = M$ .  
これは  $M$  が超準モデルであることに反する.

# ここまでのまとめと、ここからの話

## ここまでのまとめ

- PA の可算超準モデルが存在する.
- PA の可算超準モデルは、順序構造としては全て同型.
  - この証明には、overspill が効いていた.

# ここまでのまとめと、ここからの話

## ここまでのまとめ

- PA の可算超準モデルが存在する.
- PA の可算超準モデルは、順序構造としては全て同型.
  - ▶ この証明には、overspill が効いていた.

## ここからの話

- でも、算術の言語には  $+$  と  $\times$  もある.
- $+$  と  $\times$  も考慮すると、非同型な可算超準モデルが取れる.
  - ▶ 第一不完全性定理から、ある文  $\sigma$  があって  $PA + \sigma$  と  $PA + \neg\sigma$  が共に無矛盾.
  - ▶ 可算超準モデルの存在の証明と同様に、それぞれ可算超準モデル  $M_0$ ,  $M_1$  が取れる.
  - ▶  $M_0 \models \sigma$ ,  $M_1 \models \neg\sigma$  なので、 $M_0$  と  $M_1$  は同型でない.
- では、 $+$  と  $\times$  も考慮に入れると、超準モデルの“構造”はどうなるか？

# ここまでのまとめと、ここからの話

## ここまでのまとめ

- PA の可算超準モデルが存在する.
- PA の可算超準モデルは、順序構造としては全て同型.
  - この証明には、overspill が効いていた.

## ここからの話

- でも、算術の言語には  $+$  と  $\times$  もある.
- $+$  と  $\times$  も考慮すると、非同型な可算超準モデルが取れる.
  - 第一不完全性定理から、ある文  $\sigma$  があって  $PA + \sigma$  と  $PA + \neg\sigma$  が共に無矛盾.
  - 可算超準モデルの存在の証明と同様に、それぞれ可算超準モデル  $M_0, M_1$  が取れる.
  - $M_0 \models \sigma, M_1 \models \neg\sigma$  なので、 $M_0$  と  $M_1$  は同型でない.
- では、 $+$  と  $\times$  も考慮に入れると、超準モデルの“構造”はどうなるか？
- 実は、可算超準モデルの構造は「やばい」ことが知られている.
  - Overspill が陰に陽に効いてくる.

### 3. てんねんばうむ！

1. 基本的な事柄
2. 順序だけ見るとやばくない！
3. てんねんばうむ！
4. ふり～どまん！
5. もっと！ふり～どまん！
6. まとめ

### 3. てんねんばうむ！

PA の可算超準モデルが，計算の観点からやばいことを紹介する．

定理 (Tennenbaum の定理の気持ち)

PA の可算超準モデルの足し算と掛け算は，どちらもコンピュータで計算できない．

### 3. てんねんばうむ！

PA の可算超準モデルが，計算の観点からやばいことを紹介する．

定理 (Tennenbaum の定理の気持ち)

PA の可算超準モデルの足し算と掛け算は，どちらもコンピュータで計算できない．

- PA ← 済
- 可算超準モデル ← 済
- コンピュータで計算できる ← **New !**

「コンピュータの計算」を数学的に定義する.

## 定義 3.1 (再帰的関数)

次のように再帰的に定義される部分関数  $\omega^k \rightarrow \omega$  を再帰的関数という.

初期関数

- 零関数  $Z(x) = 0$
- 後者関数  $S(x) = x + 1$
- 射影  $P_i^k(x_1, \dots, x_k) = x_i$

$g, h_1, \dots, h_m, h$  が再帰的関数のとき,

- 合成  $g(h_1(\vec{x}), \dots, h_m(\vec{x}))$
- 原始再帰
  - ▶  $f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}),$
  - ▶  $f(\vec{x}, y + 1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y))$
- $\mu$ -最小化  $f(\vec{x}) = \mu y (g(\vec{x}, y) = 0)$

## 再帰的関数の気持ち

コンピュータが任意有限の計算リソースを用いてできる計算.

## 定理 3.2 (Tennenbaum の定理)

PA の可算超準モデル  $M = (\omega, +^M, \times^M, <^M, 0^M, 1^M)$  の足し算  $+^M : \omega^2 \rightarrow \omega$  と掛け算  $\times^M : \omega^2 \rightarrow \omega$  は, どちらも再帰的関数でない.

## 再掲 (Tennenbaum の定理の気持ち)

PA の可算超準モデルの足し算と掛け算は, どちらもコンピュータで計算できない.

## 定義 3.3 (再帰的集合)

特性関数が再帰的関数である集合を再帰的集合という。

**再帰的集合の気持ち** あるアルゴリズムがあって、

- 入ってたらいつか入ってるって判定してくれて、
- 入ってなかったらいつか入ってないって判定してくれる。

## 定義 3.4 (r.e. 集合)

ある再帰的（部分）関数の定義域になるような集合を r.e. 集合という。

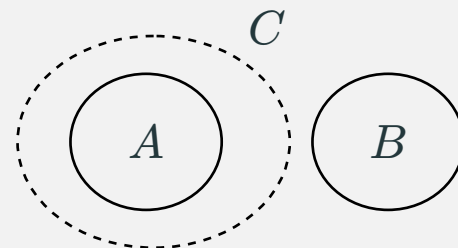
**r.e. 集合の気持ち** あるアルゴリズムがあって、

- 入ってたらいつか入ってるって判定してくれる。
- 入ってない場合は止まらない。

## 定理 3.5 (再帰的分離不可能性)

互いに素な r.e. 集合  $A$  と  $B$  が存在して、  
どんな再帰的集合  $C$  に対しても、次は成立しない：

- $A \subset C$
- $B \cap C = \emptyset$



こんな  $C$  は存在しない

## 定義 3.6 ( $\Delta_0$ -論理式)

$\mathcal{L}_A$ -論理式のうち、現れる量化が、 $t$  を  $x$  が現れない項として

- $\forall x(x < t \rightarrow \dots)$
- $\exists x(x < t \wedge \dots)$

の形になっているものを  $\Delta_0$ -論理式という。

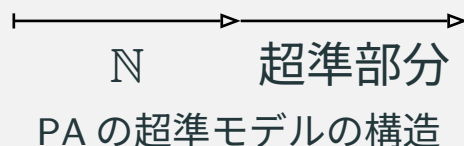
## 事実 3.7

任意の r.e. 集合  $X$  に対して、ある  $\Delta_0$ -論理式  $\varphi(x, \vec{y})$  が存在して、任意の  $n \in \omega$  に対して

$$n \in X \iff \mathbb{N} \models \exists \vec{y} \varphi(\bar{n}, \vec{y})$$

再掲 (定理 1.9)

PA の超準モデルは  $\mathbb{N}$  を最小の始切片に持つ.



このことから、 $M$  と  $\mathbb{N}$  における  $\Delta_0$ -論理式の真偽について次が成立する.

定理 3.8 ( $\Delta_0$ -絶対性)

任意の  $\Delta_0$ -論理式  $\varphi(\vec{x})$  と  $\vec{n} \in \mathbb{N}$  に対して,  $\mathbb{N} \models \varphi(\vec{n}) \iff M \models \varphi(\vec{n})$ .

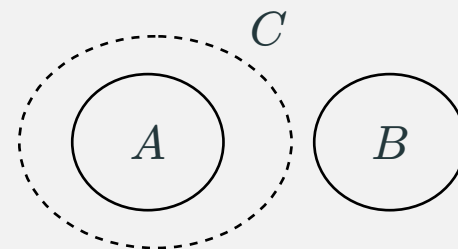
# 証明の概略

1.  $A$  と  $B$  を互いに素な r.e. 集合で再帰的に分離不可能なものとする.

再掲 (定理 3.5 : 再帰的分離不可能性)

互いに素な r.e. 集合  $A$  と  $B$  が存在して、  
どんな再帰的集合  $C$  に対しても、次は成立しない：

- $A \subset C$
- $B \cap C = \emptyset$



こんな  $C$  は存在しない

2. ある  $\Delta_0$ -論理式  $\alpha(x, \vec{y})$  と  $\beta(x, \vec{z})$  が存在して、任意の  $n \in \omega$  に対して

- $n \in A \iff \mathbb{N} \models \exists \vec{y} \alpha(\bar{n}, \vec{y})$
- $n \in B \iff \mathbb{N} \models \exists \vec{z} \beta(\bar{n}, \vec{z})$

再掲 (事実 3.7)

任意の r.e. 集合  $X$  に対して、ある  $\Delta_0$ -論理式  $\varphi(x, \vec{y})$  が存在して、任意の  $n \in \omega$  に対して

$$n \in X \iff \mathbb{N} \models \exists \vec{y} \varphi(\bar{n}, \vec{y})$$

3.  $A$  と  $B$  は互いに素なので,  $\mathbb{N} \models \forall x \neg (\exists \vec{y} \alpha(x, \vec{y}) \wedge \exists \vec{z} \beta(x, \vec{z}))$ .

これを变形すると,  $\mathbb{N} \models \forall x, \vec{y}, \vec{z} \neg (\alpha(x, \vec{y}) \wedge \beta(x, \vec{z}))$ .

4. 従って, 任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対して  $\mathbb{N} \models \forall x, \vec{y}, \vec{z} \leq \bar{k} \neg (\alpha(x, \vec{y}) \wedge \beta(x, \vec{z}))$ .

$\Delta_0$ -絶対性から,  $M \models \forall x, \vec{y}, \vec{z} \leq \bar{k} \neg (\alpha(x, \vec{y}) \wedge \beta(x, \vec{z}))$  とできる.

5. すると, **overspill** より, ある  $c > \mathbb{N}$  が存在して

$$M \models \forall x, \vec{y}, \vec{z} \leq c \neg (\alpha(x, \vec{y}) \wedge \beta(x, \vec{z})).$$

再掲 (定理 2.4 : Overspill)

$M$  を PA の超準モデル,  $\vec{a} \in M$ ,  $\varphi(x, \vec{y})$  を論理式とする.

このとき,  $\forall n \in \mathbb{N}, M \models \varphi(n, \vec{a})$  ならば  $\exists c > \mathbb{N}$  s.t.  $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \vec{a})$ .

6.  $C := \{n \in \omega : M \models \exists \vec{y} \leq c \alpha(\bar{n}, \vec{y})\}$  とする.

7.  $A \subset C$  かつ  $B \cap C = \emptyset$  を示す. (やればできる)

8. 次を示す．（多少の算術は用いるが，やればできる．）

主張 3.1

$M = (\omega, +^M, \times^M, <^M, 0^M, 1^M)$  で  $+^M$  が再帰的だったら， $C$  も再帰的．

9. しかし， $A$  と  $B$  の取り方から  $C$  は再帰的でないので， $+^M$  は再帰的でない．  
 $\times^M$  についても同様に示せる．

- PA の可算超準モデルが計算の視点からヤバいことを紹介した.

## 定理 (Tennenbaum の定理)

PA の可算超準モデル  $M = (\omega, +^M, \times^M, <^M, 0^M, 1^M)$  の足し算  $+^M : \omega^2 \rightarrow \omega$  と掛け算  $\times^M : \omega^2 \rightarrow \omega$  は, どちらも再帰的関数でない.

## 再掲 (Tennenbaum の定理の気持ち)

PA の可算超準モデルの足し算と掛け算は, どちらもコンピュータで計算できない.

## 4. ふり〜どまん！

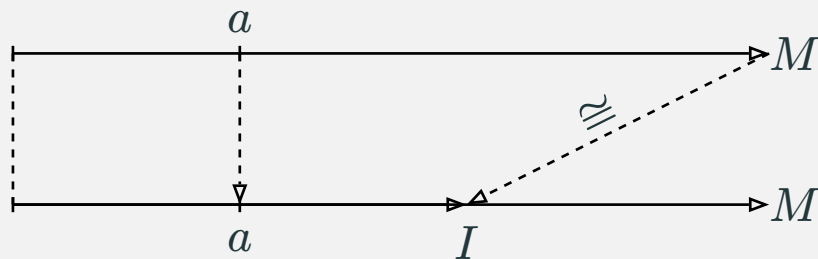
1. 基本的な事柄
2. 順序だけ見るとやばくない！
3. てんねんばうむ！
4. ふり〜どまん！
5. もっと！ふり〜どまん！
6. まとめ

## 4. ふり〜どまん！

PA の可算超準モデルが，自分自身に真の始切片として埋め込めることを紹介する．

### 定理 4.1 (Friedman の定理)

任意の PA の可算超準モデル  $M$  と  $a \in M$  に対して，ある  $I$  が存在し  $a \in I \subsetneq_i M$  かつ  $I \cong M$  .



### 再掲 (定義 1.8 : 始切片)

構造  $M$  と  $N$  に対して， $M$  が  $N$  の始切片  $M \subsetneq_i N$  であるとは，

- $M \subset N$
- $\forall b \in N (\exists a \in M \text{ s.t. } N \models b < a) \implies b \in M$

## 定義 4.2 (type)

構造  $M$  上の type  $p(\vec{x})$  とは,  $M$  の元の有限個のパラメータ付き論理式  $\varphi(\vec{x}, \vec{a})$  の集合で, 有限充足的なもの:

$p(\vec{x})$  の任意の有限部分集合  $\{\varphi_0(\vec{x}, \vec{a}), \dots, \varphi_k(\vec{x}, \vec{a})\}$  に対して, ある  $\vec{b} \in M$  が存在して,

$$M \models \bigwedge_{0 \leq i \leq k} \varphi_i(\vec{b}, \vec{a})$$

が成り立つもののこと.

## 定義 4.3 (type の realize)

$M$  上の type  $p(\vec{x})$  が  $M$  で realize されるとは, ある  $\vec{b} \in M$  が存在して, 任意の  $\varphi(\vec{x}, \vec{a}) \in p(\vec{x})$  に対して  $M \models \varphi(\vec{b}, \vec{a})$  となること.

## 再掲 (定理 4.1)

任意の PA の可算超準モデル  $M$  と  $a \in M$  に対して, ある  $I$  が存在し  $a \in I \subsetneq M$  かつ  $I \cong M$ .

1.  $M$  の元を  $\{d_0, d_1, \dots\}, \{e_0, e_1, \dots\}$  と並べる.
  - ただし,  $M$  の元は列  $e_0, e_1, \dots$  に無限回現れるようにする.

## 再掲 (定理 4.1)

任意の PA の可算超準モデル  $M$  と  $a \in M$  に対して, ある  $I$  が存在し  $a \in I \subsetneq_i M$  かつ  $I \cong M$ .

1.  $M$  の元を  $\{d_0, d_1, \dots\}$ ,  $\{e_0, e_1, \dots\}$  と並べる.
  - ただし,  $M$  の元は列  $e_0, e_1, \dots$  に無限回現れるようにする.
2.  $b$  を  $\text{type } p(y) := \{\exists \vec{x} \theta(\vec{x}, a) \rightarrow \exists \vec{x} < y \theta(\vec{x}, a) : \theta \text{ は } \Delta_0\text{-論理式}\}$  を  $M$  で realize する元とする.
  - そのような  $b$  が存在することの証明に **overspill** を使う.

## 再掲 (定理 4.1)

任意の PA の可算超準モデル  $M$  と  $a \in M$  に対して, ある  $I$  が存在し  $a \in I \subsetneq M$  かつ  $I \cong M$ .

1.  $M$  の元を  $\{d_0, d_1, \dots\}$ ,  $\{e_0, e_1, \dots\}$  と並べる.
    - ただし,  $M$  の元は列  $e_0, e_1, \dots$  に無限回現れるようにする.
  2.  $b$  を  $\text{type } p(y) := \{\exists \vec{x} \theta(\vec{x}, a) \rightarrow \exists \vec{x} < y \theta(\vec{x}, a) : \theta \text{ は } \Delta_0\text{-論理式}\}$  を  $M$  で realize する元とする.
    - そのような  $b$  が存在することの証明に **overspill** を使う.
  3. Cantor の往復論法で, 次を満たす列  $\{u_0 = a, u_1, \dots\} = M$  と  $\{v_0 = a, v_1, \dots\} \subset M$  を作る.
    - ★  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) 全ての } i \in \omega \text{ と } \Delta_0\text{-論理式 } \varphi(\vec{x}, y_0, \dots, y_{i-1}) \text{ について} \\ M \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{i-1}) \implies M \models \exists \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{i-1}) \\ \text{(b) 全ての } i \in \omega \text{ に対して, } M \models e_i \leq \max(v_0, \dots, v_{2i+1}) \implies v_{2i+2} = e_i \end{array} \right.$
- ここでも **overspill** を用いる.

## 再掲 (定理 4.1)

任意の PA の可算超準モデル  $M$  と  $a \in M$  に対して, ある  $I$  が存在し  $a \in I \subsetneq M$  かつ  $I \cong M$ .

1.  $M$  の元を  $\{d_0, d_1, \dots\}$ ,  $\{e_0, e_1, \dots\}$  と並べる.
  - ただし,  $M$  の元は列  $e_0, e_1, \dots$  に無限回現れるようにする.
2.  $b$  を  $\text{type } p(y) := \{\exists \vec{x} \theta(\vec{x}, a) \rightarrow \exists \vec{x} < y \theta(\vec{x}, a) : \theta \text{ は } \Delta_0\text{-論理式}\}$  を  $M$  で realize する元とする.
  - そのような  $b$  が存在することの証明に **overspill** を使う.
3. Cantor の往復論法で, 次を満たす列  $\{u_0 = a, u_1, \dots\} = M$  と  $\{v_0 = a, v_1, \dots\} \subset M$  を作る.
  - ★  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) 全ての } i \in \omega \text{ と } \Delta_0\text{-論理式 } \varphi(\vec{x}, y_0, \dots, y_{i-1}) \text{ について} \\ M \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{i-1}) \implies M \models \exists \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{i-1}) \\ \text{(b) 全ての } i \in \omega \text{ に対して, } M \models e_i \leq \max(v_0, \dots, v_{2i+1}) \implies v_{2i+2} = e_i \end{array} \right.$
  - ここでも **overspill** を用いる.
4.  $h : M \rightarrow M; u_i \mapsto v_i$  が目的の埋込になる.

# 証明の概略：真の始切片であること

## 再掲

3. Cantor の往復論法で、次を満たす 2 つの列  $\{u_0, u_1, \dots\} = M$  と  $\{v_0, v_1, \dots\} \subset M$  を作る.

$$\star \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) 全ての } i \in \omega \text{ と } \Delta_0\text{-論理式 } \varphi(\vec{x}, y_0, \dots, y_{i-1}) \text{ について} \\ M \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{i-1}) \implies M \models \exists \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{i-1}) \\ \text{(b) 全ての } i \in \omega \text{ に対して, } M \models e_i \leq \max(v_0, \dots, v_{2i+1}) \implies v_{2i+2} = e_i \end{array} \right.$$

4.  $h : M \rightarrow M; u_i \mapsto v_i$  が目的の埋込になる.

- $h$  の全域性は  $\{u_0, u_1, \dots\} = M$  より.
- $h$  が埋込であることは, (a) で  $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$  としてそれぞれ次のリテラルを取れば良い.

**関数性**  $y_i = y_j$

**単射性**  $\neg(y_i = y_j)$

**保存性**  $y_i + y_j = y_k, y_i \times y_j = y_k, y_i < y_j, \neg(y_i < y_j)$

- $h(M) \subset_i M$  であることは (b) と  $e_i$  の並べ方 ( $M$  の元は列  $e_0, e_1, \dots$  に無限回現れる) より.
- $h(M) \subsetneq_i M$  であることは, (a) で  $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$  として  $x = y_i$  を取れば,  $\forall i \in \omega, M \models v_i < b$ .

## 再掲

2.  $b$  は type  $p(y) := \{\exists \vec{x} \theta(\vec{x}, a) \rightarrow \exists \vec{x} < y \theta(\vec{x}, a) : \theta \text{ は } \Delta_0\text{-論理式}\}$  を  $M$  で realize する元.
- そのような  $b$  が存在することの証明に **overspill** を使う.
3. Cantor の往復論法で, 次を満たす 2 つの列  $\{u_0, u_1, \dots\} = M$  と  $\{v_0, v_1, \dots\} \subset M$  を作る.

$$\star \begin{cases} \text{(a) 全ての } i \in \omega \text{ と } \Delta_0\text{-論理式 } \varphi(\vec{x}, y_0, \dots, y_{i-1}) \text{ について} \\ M \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{i-1}) \implies M \models \exists \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{i-1}) \\ \text{(b) 全ての } i \in \omega \text{ に対して, } M \models e_i \leq \max(v_0, \dots, v_{2i+1}) \implies v_{2i+2} = e_i \end{cases}$$

ここでも **overspill** を用いる.

この 2 つの overspill の使い方を紹介する.

## 定義 4.4 (standard system)

超準モデル  $M$  上で、有限個のパラメータ  $\vec{a} \in M$  付き論理式  $\varphi(x, \vec{a})$  で定義できる自然数の部分集合の全体を  $M$  の standard system  $\text{SSy}(M)$  という。

$$\text{SSy}(M) = \{X \subset \mathbb{N} : \exists \vec{a} \in M, \varphi(x, \vec{y}) \text{ s.t. } X = \{n \in \mathbb{N} : M \models \varphi(n, \vec{a})\}\}$$

以降、コード化や部分真理定義など、ある程度の算術の知識を前提する。

## 約束

$M$  上の type  $p(\vec{x})$  に対して、ある変数の列  $\vec{y}$  が存在して

$$\{\ulcorner \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \urcorner \in \mathbb{N} : \varphi(\vec{x}, \vec{a}) \in p(\vec{x})\} \in \text{SSy}(M)$$

となることを、 $p(\vec{x}) \in \text{SSy}(M)$  と書く。

- 2. における  $b$  や 3. における列  $\{u_0, u_1, \dots\}$  と  $\{v_0, v_1, \dots\}$  は、次の補題を用いて取る.
- overspill は、これらの補題を示すために用いられる.

### 補題 4.5

---

$M$  上の type  $p(\vec{x})$  と  $n \in \omega$  に対して、

- $p(\vec{x})$  に属す論理式が全て  $\Sigma_n$ -論理式で
- $p(\vec{x}) \in \text{SSy}(M)$

ならば、 $p(\vec{x})$  は  $M$  で realize される.

### 補題 4.6

---

$\text{SSy}(M)$  は相対的再帰で閉じている.

## 再掲 (補題 4.5)

$M$  上の type  $p(\vec{x})$  と  $n \in \omega$  に対して,

- $p(\vec{x})$  に属す論理式が全て  $\Sigma_n$ -論理式で
- $p(\vec{x}) \in \text{SSy}(M)$

ならば,  $p(\vec{x})$  は  $M$  で realize される.

1.  $p(\vec{x}) \in \text{SSy}(M)$  より, ある  $\vec{b} \in M$  と論理式  $\psi(z, \vec{w})$  があって,

$$\{\ulcorner \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \urcorner \in \mathbb{N} : \varphi(\vec{x}, \vec{a}) \in p(\vec{x})\} = \{n \in \mathbb{N} : M \models \psi(n, \vec{b})\}.$$

2.  $p(\vec{x})$  が  $M$  上の type であることと,  $p(\vec{x})$  に属す論理式が全て  $\Sigma_n$ -論理式であることから, 任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対して  $M \models \exists \vec{x} \forall y \leq k (\psi(y, \vec{b}) \rightarrow \text{True}_{\Sigma_n}(y, [\vec{x}, \vec{a}]))$ .

3. **Overspill** より, ある  $c > \mathbb{N}$  が存在して

$$M \models \exists \vec{x} \forall y \leq c (\psi(y, \vec{b}) \rightarrow \text{True}_{\Sigma_n}(y, [\vec{x}, \vec{a}])).$$

4. この  $\vec{x}$  の witness  $\vec{d}$  が  $p(\vec{x})$  を realize する.

再掲 (補題 4.6)

$\text{SSy}(M)$  は相対的再帰で閉じている.

再掲 (補題 4.6)

$\text{SSy}(M)$  は相対的再帰で閉じている.

長すぎて諦めたので, Kaye を読んでください…….

## 再掲

2.  $b$  は type  $p(y) := \{\exists \vec{x} \theta(\vec{x}, a) \rightarrow \exists \vec{x} < y \theta(\vec{x}, a) : \theta \text{ は } \Delta_0\text{-論理式}\}$  を  $M$  で realize する元.

- $p(y)$  に属する論理式は全て  $\Pi_1$ .
- $p(y)$  は再帰的なので, 補題 4.6 から  $p(y) \in \text{SSy}(M)$ .

従って 補題 4.5 より  $p(y)$  は  $M$  で realize される.

## 再掲 (補題 4.5)

$M$  上の type  $p(\vec{x})$  と  $n \in \omega$  に対して,

- $p(\vec{x})$  に属する論理式が全て  $\Sigma_n$ -論理式で
- $p(\vec{x}) \in \text{SSy}(M)$

ならば,  $p(\vec{x})$  は  $M$  で realize される.

## 再掲 (補題 4.6)

$\text{SSy}(M)$  は相対的再帰で閉じている.

# 証明の概略：列 $\{u_0, u_1, \dots\}$ と $\{v_0, v_1, \dots\}$ の取り方

再掲

3. Cantor の往復論法で、次を満たす 2 つの列  $\{u_0, u_1, \dots\} = M$  と  $\{v_0, v_1, \dots\} \subset M$  を作る.

$$\star \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) 全ての } i \in \omega \text{ と } \Delta_0\text{-論理式 } \varphi(\vec{x}, y_0, \dots, y_{i-1}) \text{ について} \\ M \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{i-1}) \implies M \models \exists \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{i-1}) \\ \text{(b) 全ての } i \in \omega \text{ に対して, } M \models e_i \leq \max(v_0, \dots, v_{2i+1}) \implies v_{2i+2} = e_i \end{array} \right.$$

**Base**  $u_0 = v_0 = a$ .

(a)  $b$  の取り方より ok.

(b)  $v_1, v_2$  が無いので考えなくて良い.

再掲

2.  $b$  は type  $p(y) := \{\exists \vec{x} \theta(\vec{x}, a) \rightarrow \exists \vec{x} < y \theta(\vec{x}, a) : \theta \text{ は } \Delta_0\text{-論理式}\}$  を  $M$  で realize する元.

# 証明の概略：列 $\{u_0, u_1, \dots\}$ と $\{v_0, v_1, \dots\}$ の取り方

再掲

(a) 全ての  $i \in \omega$  と  $\Delta_0$ -論理式  $\varphi(\vec{x}, y_0, \dots, y_{i-1})$  について

$$M \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{i-1}) \implies M \models \exists \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{i-1})$$

往路： $u_{2i+1}$  と  $v_{2i+1}$   $u_0, \dots, u_{2i}$  と  $v_0, \dots, v_{2i}$  が構成されたとする． ((b) は気にしなくて良い．)

1.  $u_{2i+1} := d_i$ ．

2.  $v_{2i+1}$  は，次の  $M$  上の type  $p(y)$  を realize する元． (type であることは I.H. から．)

$$p(y) := \{ \exists \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{2i}, y) : \varphi(\vec{x}, \vec{z}, y) \in \Delta_0 \ \& \ M \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{2i}, u_{2i+1}) \}$$

再掲 (補題 4.5)

$M$  上の type  $p(\vec{x})$  と  $n \in \omega$  に対して，

- $p(\vec{x})$  に属す論理式が全て  $\Sigma_n$ -論理式で
- $p(\vec{x}) \in \text{SSy}(M)$

ならば， $p(\vec{x})$  は  $M$  で realize される．

再掲 (補題 4.6)

$\text{SSy}(M)$  は相対的再帰で閉じている．

- $\Sigma_n$ -論理式の真偽は  $M$  上で定義できる．

# 証明の概略：列 $\{u_0, u_1, \dots\}$ と $\{v_0, v_1, \dots\}$ の取り方

再掲

(a) 全ての  $i \in \omega$  と  $\Delta_0$ -論理式  $\varphi(\vec{x}, y_0, \dots, y_{i-1})$  について

$$M \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{i-1}) \implies M \models \exists \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{i-1})$$

(b) 全ての  $i \in \omega$  に対して,  $M \models e_i \leq \max(v_0, \dots, v_{2i+1}) \implies v_{2i+2} = e_i$

復路： $u_{2i+2}$  と  $v_{2i+2}$   $u_0, \dots, u_{2i+1}$  と  $v_0, \dots, v_{2i+1}$  が構成されたとする.

- $M \models e_i > \max(v_0, \dots, v_{2i+1})$  のときは,  $u_{2i+2} = v_{2i+2} = a$ .
- $M \models e_i \leq \max(v_0, \dots, v_{2i+1})$  のときは,  $v_{2i+2} := e_i$ .

$u_{2i+2}$  は, 次の  $M$  上の type  $q(y)$  を realize する元.

$$q(y) := \{\forall \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{2i+1}, y) : \varphi(\vec{x}, \vec{z}, y) \in \Delta_0 \ \& \ M \models \forall \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{2i+1}, v_{2i+2})\}.$$

- ▶ type であることは I.H. から.
- ▶ realize する元の存在は, 同様に補題 4.5 と補題 4.6 によって保証される.

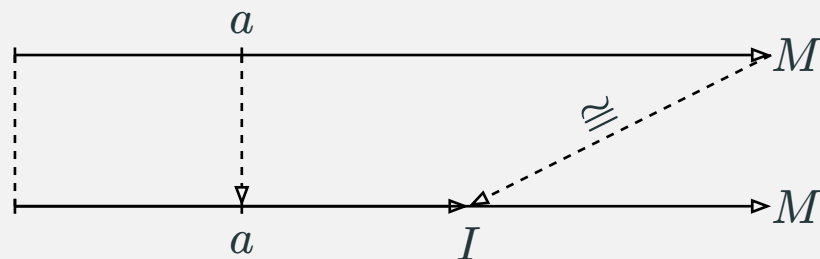
## 5. もっと！ふり～どまん！

1. 基本的な事柄
2. 順序だけ見るとやばくない！
3. てんねんばうむ！
4. ふり～どまん！
5. もっと！ふり～どまん！
6. まとめ

## 5. もっと！ふり～どまん！

再掲 (Friedman の定理)

任意の PA の可算超準モデル  $M$  と  $a \in M$  に対して、ある  $I$  が存在し  $a \in I \subsetneq_i M$  かつ  $I \cong M$ .



- $M$  が可算なので、これによって保証される始切片の数は可算個.
- しかし、証明を改造すると次が成り立つ：

定理 5.1 (連続体版 Friedman の定理)

PA の可算超準モデルは、自身と同型な始切片を連続体濃度個持つ.

## 再掲 (Friedman の定理の証明の概略)

1.  $M$  の元を  $\{d_0, d_1, \dots\}$ ,  $\{e_0, e_1, \dots\}$  と並べる.
    - ただし,  $M$  の元は列  $e_0, e_1, \dots$  に無限回現れるようにする.
  2.  $b$  を  $\text{type } p(y) := \{\exists \vec{x} \theta(\vec{x}, a) \rightarrow \exists \vec{x} < y \theta(\vec{x}, a) : \theta \text{ は } \Delta_0\text{-論理式}\}$  を  $M$  で realize する元とする.
    - そのような  $b$  が存在することの証明に **overspill** を使う.
  3. Cantor の往復論法で, 次を満たす 2 つの列  $\{u_0, u_1, \dots\} = M$  と  $\{v_0, v_1, \dots\} \subset M$  を作る.
    - ★  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) 全ての } i \in \omega \text{ と } \Delta_0\text{-論理式 } \varphi(\vec{x}, y_0, \dots, y_{i-1}) \text{ について} \\ M \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{i-1}) \implies M \models \exists \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{i-1}) \\ \text{(b) 全ての } i \in \omega \text{ に対して, } M \models e_i \leq \max(v_0, \dots, v_{2i+1}) \implies v_{2i+2} = e_i \end{array} \right.$
- ここでも **overspill** を用いる.
4.  $h : M \rightarrow M; u_i \mapsto v_i$  が目的の埋込になる.

## 再掲

3. Cantor の往復論法で、次を満たす 2 つの列  $\{u_0, u_1, \dots\} = M$  と  $\{v_0, v_1, \dots\} \subset M$  を作る.

$$\star \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) 全ての } i \in \omega \text{ と } \Delta_0\text{-論理式 } \varphi(\vec{x}, y_0, \dots, y_{i-1}) \text{ について} \\ M \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{i-1}) \implies M \models \exists \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{i-1}) \\ \text{(b) 全ての } i \in \omega \text{ に対して, } M \models e_i \leq \max(v_0, \dots, v_{2i+1}) \implies v_{2i+2} = e_i \end{array} \right.$$

ここでも **overspill** を用いる.

- この部分を改良する.
- これは,  $i \in \omega$  に沿った  $u_i$  と  $v_i$  の再帰的構成.
  - $h : u_i \mapsto v_i$  が目的の埋込になる.

## 再掲

3. Cantor の往復論法で、次を満たす 2 つの列  $\{u_0, u_1, \dots\} = M$  と  $\{v_0, v_1, \dots\} \subset M$  を作る.

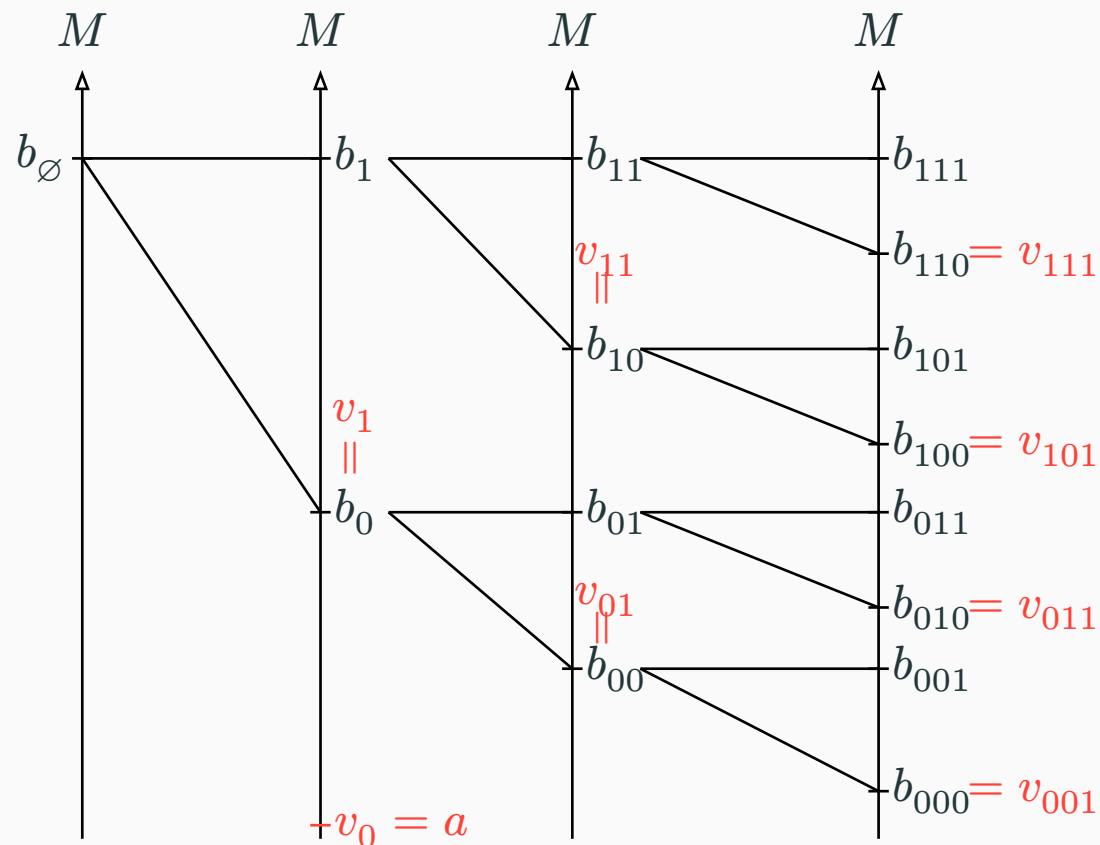
$$\star \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) 全ての } i \in \omega \text{ と } \Delta_0\text{-論理式 } \varphi(\vec{x}, y_0, \dots, y_{i-1}) \text{ について} \\ M \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, u_0, \dots, u_{i-1}) \implies M \models \exists \vec{x} < b \varphi(\vec{x}, v_0, \dots, v_{i-1}) \\ \text{(b) 全ての } i \in \omega \text{ に対して, } M \models e_i \leq \max(v_0, \dots, v_{2i+1}) \implies v_{2i+2} = e_i \end{array} \right.$$

ここでも **overspill** を用いる.

- この部分を改良する.
- これは,  $i \in \omega$  に沿った  $u_i$  と  $v_i$  の再帰的構成.
  - ▶  $h : u_i \mapsto v_i$  が目的の埋込になる.
- これを, 0-1 有限列  $\sigma \in {}^{<\omega}2$  に沿った  $u_\sigma$  と  $v_\sigma$  の再帰的構成にする.
  - ▶ 0-1 無限列  $f$  に対して  $h : u_{f \upharpoonright n} \mapsto v_{f \upharpoonright n}$  が目的の埋込  $h : M \xrightarrow{\cong} I_f \subsetneq_i M$  になる.
  - ▶ このとき, 0-1 無限列  $f, g$  に対して  $f \neq g$  なら  $I_f \neq I_g$  となるようにすれば良い.

「0-1 無限列  $f, g$  に対して  $f \neq g$  なら  $I_f \neq I_g$  となるようにする」

- 長さ  $n$  の 0-1 有限列  $\sigma$  に対して,  
 $b_\sigma$  が  $\sigma$  に沿った辞書式に並ぶようにして,
- $\sigma = f \upharpoonright n$  なる 0-1 無限列  $f$  に対して,  
 $\tau < \sigma$  なら,  $b_\tau \in I_f < b_\sigma$  となるようにする.



## 6. まとめ

1. 基本的な事柄
2. 順序だけ見るとやばくない！
3. てんねんばうむ！
4. ふり～どまん！
5. もっと！ふり～どまん！
6. まとめ

## 6. まとめ

本講演では，PA の可算超準モデルの「やばさ」を紹介した．

1. 順序構造としては全て  $\mathbb{N} + \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$  と同型でやばくない．
2. Tennenbaum の定理：可算超準モデルの  $+$  と  $\times$  は計算不可能でやばい．
3. Friedman の定理：可算超準モデルは自身と同型な始切片を連続体濃度個持ってやばい．

これらの証明には，陰に陽に **overspill** が効いていた．

本講演は、

- Richard Kaye, Models of Peano Arithmetic. Oxford University Press, 1991  
の第 6, 11, 12, 13 章を再構成したもの.